

# ТЕОРИЯ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

В. Я. АЛТАЕВ, В. Н. БУРКОВ, А. И. ТЕЙМАН

(Москва)

В статье приводятся основные результаты теории сетевого планирования и управления (СПУ) в области анализа, преобразования и оптимизации сетей.

С момента появления систем сетевого планирования и управления (СПУ) прошло более восьми лет. За этот период опубликовано большое число работ, посвященных сетевым системам. Полная библиография этих работ насчитывает, пожалуй, несколько тысяч названий. В значительной части этих публикаций рассматриваются различные практические модификации сетевых систем, примеры их использования, преимущества и ограничения, предлагаются рекомендации, связанные с внедрением систем СПУ, а также содержатся учебные сведения.

В работах теоретического характера можно выделить следующие основные направления, привлекающие внимание ученых и в первую очередь специалистов по математическому программированию и статистике, работающих в области исследования операций. Это проблемы анализа сетей, в том числе с детерминированными и стохастическими параметрами; оценки и улучшения статистических допущений, положенных в основу так называемой канонической модели PERT; проблемы распределения ресурсов различного типа на базе сетевых моделей, относящиеся к классу задач оптимизации, и, наконец, проблемы преобразования структуры сетей с целью упрощения алгоритмов определения важнейших параметров сетевой модели. Круг перечисленных проблем, естественно, не охватывает всех теоретических исследований, проводимых в рамках СПУ, к которым принадлежат и задачи программирования ЭВМ, и ряд попыток включения в сетевую модель технических параметров операций, а также исследования так называемых альтернативных сетей. Однако именно указанные выше проблемы характеризуют общее направление развития теории СПУ, так что на них и будет сосредоточено внимание настоящего обзора.

Следует отметить, что в обзоре не рассматриваются вопросы синтеза и анализа систем СПУ, т. е. вопросы выбора структуры этих систем, критерия эффективности, алгоритма функционирования и т. п., так как он посвящен теоретическим аспектам метода СПУ и не затрагивает вопросов, касающихся построения физических систем.

В списке литературы, разделенном по разделам обзора, приведен краткий перечень книг и брошюр, посвященных системам СПУ, часть из которых содержит описание ряда теоретических проблем, а также систем класса СПУ.

## I. АНАЛИЗ СЕТЕЙ

Целью анализа сетей является определение основных характеристик сетевых моделей комплексов операций. Особое значение имеют временные характеристики: сроки наступления событий, резервы времени операций, критические пути, распределение вероятностей времени реализации проекта, различные показатели критичности операций и т. д. Такие временные характеристики (во всяком случае большинство из них) используются во всех типах систем сетевого планирования и управления, и определение их является основной задачей всякого анализа сетей. Методы анализа можно разделить на два класса в зависимости от того, являются ли оценки продолжительности операций детерминированными (детерминированные сети) или случайными величинами (случайные сети). Такое разделение, связанное с видом используемой математической модели комплекса операций (детерминированной или стохастиче-

ской), позволяет исключить смещение содержания ряда понятий, используемых в обеих моделях под одинаковыми названиями. Кроме того, при анализе случайных сетей возникает ряд специфических, сложных и пока нерешенных задач, которые имеет смысл выделить и рассмотреть отдельно.

## 1. Определение характеристик детерминированных сетей

Основная задача анализа детерминированных сетей формулируется следующим образом [2, 7, 12, 19].

Задана сеть  $S$ , содержащая  $n + 1$  событие в  $n$  операций. Каждой операции сети  $(i, j)$  поставлено в соответствие число  $y_{ij} \geq 0$  — ее продолжительность. Необходимо определить ранние и поздние сроки наступления событий  $t_j^{(0)}$  и  $t_j^{(1)}$ , критические пути (т. е. пути максимальной продолжительности между начальными и конечными событиями сети), резервы времени событий  $R(i)$  и резервы времени операций (полный, свободный, независимый и аварийный).

Очевидно, что нетривиальным в этой задаче является выделение критических путей и определение сроков  $t_j^{(0)}$  и  $t_j^{(1)}$ , резервы времени событий и операций подсчитываются затем элементарным образом.

Наиболее широко распространенными методами решения указанной задачи являются алгоритмы, описанные в работах [7, 12, 14—16, 19]. Если нумерация сети произвольна, то как основной используется алгоритм Форда [7, 14, 15].

Для определения  $t_j^{(0)}$  используется итеративная процедура, в качестве первого приближения полагают все  $t_j^{(0)} = 0$ , и затем это значение заменяется на  $\tilde{t}_j^{(0)}$ , если  $t_j^{(0)} = t_i^{(0)} + y_{ij} > t_j^{(0)}$ . Процесс заканчивается, если не остается ни одной операции  $(i, j)$ , для которой можно увеличить  $t_j^{(0)}$ .

Вычисление поздних сроков проводится аналогичным образом, только в качестве первого приближения выбирают значения  $t_i^{(1)} = T = \max\{t_i^{(0)}\}$ , а замена величины  $t_i^{(1)}$  проводится из условия  $\tilde{t}_i^{(1)} = t_i^{(1)} - y_{ij} < t_i^{(1)}$ . Критический путь можно найти, используя условие «критичности»  $t_i^{(0)} = t_i^{(1)}$  или определяя, исходя из конечного события сети, последовательность критических событий.

Описанный алгоритм не требует предварительного упорядочения нумерации событий сети. Для применения другой группы алгоритмов необходимо упорядочить эту нумерацию таким образом, что если событие  $(j)$  предшествует событию  $(i)$ , то  $i < j$ .

Такую нумерацию можно провести различными способами. В [7] и [12] описывается метод упорядочения с помощью вычеркивания операций сети. Процесс проводится следующим образом. Находится событие  $e_0$ , не имеющее входящих операций. Ему присваивается номер 0, и оно образует нулевой слой. Вычеркиваются все операции, исходящие из  $e_0$ . Все события, имеющие после этого лишь исходящие операции, образуют первый слой, и им присваиваются номера от 1 до  $k$ .

Далее продолжают аналогично. Внутри каждого слоя нумерация произвольная, поэтому общая нумерация сети неоднозначна.

Упорядочение по слоям можно провести, используя алгоритм Форда. Достаточно положить все  $y_{ij} = 1$ . В этом случае все события, отстоящие от начального на одну операцию, получат номер 1, на две операции — номер 2 и т. д., т. е. произойдет разбиение сети на слои. Последующая нумерация внутри слоя приведет к упорядоченной нумерации всей сети. Для анализа такой сети можно использовать следующий «естественный» алгоритм [12, 19], определенный рекуррентными соотношениями:

$$t_0^{(0)} = 0,$$

$$t_j^{(0)} = \max_{(i,j) \in U_j^-} (t_i^{(0)} + y_{ij}) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$t_n^{(1)} = t_n^{(0)},$$

$$t_i^{(1)} = \min_{(i,j) \in U_i^+} (t_j^{(1)} - y_{ij}) \quad (i = n - 1, \dots, 0).$$

В [17, 18] приведены алгоритмы, использующие идеи динамического программирования. Последовательно вычисляются значения длины максимального пути  $x_i^{(1)}$  от конечного события до событий, отстоящих от конечного на одну операцию, затем на две  $x_i^{(2)}$  и т. д. Используя эти алгоритмы, находят сначала поздние сроки поступления событий  $t_i^{(1)} = T - x_i^{(k)} (T = x_0^{(k)})$ . Получать ранние сроки можно, применяя аналогичную процедуру, исходя из начального события сети, изменения предварительно ориентацию всех дуг операций сети на противоположную. Упорядоченная нумерация сети не нужна.

В [1] приведен алгоритм определения временных характеристик сети, использующий метод полного перебора, описанный в [3]. События предполагаются произвольно нумерованными, и допускается произвольное расположение информации об отдельных операциях.

В [9] описывается алгоритм, основанный на информации об отдельных операциях, причем полная структура сети неизвестна. Операции задаются не событиями, а своими «названиями», расположеными в произвольном порядке, с указанием для каждой операции ее предшествующих. Этот алгоритм фактически выполняет построение сети на основании данных об отдельных операциях и затем определяет ее временные характеристики.

В [8] приведен специальный метод поиска и выделения контуров в сети, основанный на последовательном исключении из сети всех незамкнутых путей.

Различные алгоритмы определения временных характеристик детерминированных сетей приведены в работах [6, 11].

Обычно используются также модификации алгоритмов, вызванные или конкретными условиями выполнения вычислительного процесса (большие или небольшие сети, ручной или машинный счет и т. д.), или стремлением к «оригинальности». Часто, особенно при анализе небольших сетей, оказывается удобным соединять представление комплексов операций в виде сети и в виде линейных графиков, что позволяет получать значение сроков наступления событий, критический путь и резервы времени операций на масштабном графике.

Один способ такого изображения описан в работах [7, 13, 20]. Операции изображаются горизонтальными стрелками в масштабе времени. Все операции, входящие в одно событие  $j$ , объединяются в одну группу, группы располагаются в порядке возрастания номера  $j$ , а внутри каждой группы операции располагаются в порядке возрастания номера  $i$  (нумерация сети упорядочена). По оси абсцисс откладывается время  $t$ , по оси ординат — номера групп  $j$  и входящие в каждую группу номера  $i$ . После построения такого линейного графика немедленно получаются все значения  $t_i^{(0)}$ , критический путь и свободные резервы времени операций, так как операции оказываются расположеными в порядке, определяемом «технологическими» ограничениями следования и ранними сроками наступления событий.

Определение остальных характеристик сети требует выполнения ряда дополнительных элементарных преобразований графика — сдвига всех операций вправо на максимально допустимые расстояния.

Таким образом, при анализе временных детерминированных сетей не возникает принципиальных трудностей, если не считать затруднений, обусловленных размером сетей, которые преодолеваются с помощью современных ЭВМ.

Несколько сложнее обстоит дело с исследованием более тонкой структуры сетей и определением параметров, необходимых на этапе управления: различных оценок критичности операций, путей, сети, плановых резервов.

## 2. Определение характеристик стохастических сетей

Если продолжительности операций  $y_{ij}$  являются случайными величинами, задачи анализа сетей существенно усложняются. В настоящее время отсутствуют точные методы определения временных характеристик стохастических сетей, причем даже приближенное определение некоторых характеристик является трудной вычислительной задачей уже для сетей малого размера.

Основная задача анализа стохастических сетей формулируется следующим образом. Пусть задана сеть  $S$ . Без ограничения общности ее можно предполагать правило пронумерованной и с одним начальным и одним окончательным событием. Кроме того, полагают  $t_0 = 0$ . Пусть заданы распределения вероятностей случайных величин  $y_{ij}$  и их совместное распределение. В этих условиях необходимо определить вероятностные характеристики основных временных параметров сети — сроки наступления событий  $t_i$ , длины критических путей, резервы времени событий и операций и т. д.

Как и обычно, когда имеют дело со случайными величинами, при исследовании иногда ограничиваются усредненными характеристиками, например математическим ожиданием и дисперсией этих величин, а в ряде случаев определяют распределение их вероятностей.

Основными временными характеристиками, определяемыми при анализе стохастических сетей, являются средние, ранние и поздние сроки наступления событий сети  $t_i^{(0)}, t_i^{(1)}$ , средние резервы времени событий и операций, дисперсии сроков наступления событий, распределение вероятностей этих сроков, а также вероятности того, что пути могут стать критическими, и вероятности принадлежности операций критическому пути.

### Метод усреднения

Основная идея этого метода очень проста — случайные продолжительности  $y_{ij}$  операций заменяются их математическими ожиданиями, и таким образом совершается переход к детерминированной сети, что позволяет применять все известные алгоритмы, разработанные для анализа детерминированных сетей. Общепринятой является методика, изложенная в [13] и [21]. Она состоит в следующем.

Предполагается, что  $y_{ij}$  — независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} K_{ij}(x - a_{ij})^\alpha(b_{ij} - x)^\gamma, & a_{ij} \leq x \leq b_{ij}, \\ 0, & a_{ij} < x > b_{ij}, \end{cases}$$

где  $f_{ij}(x)$  — плотность распределения вероятностей  $\beta$ -распределения.

Постулируется, что математическое ожидание и дисперсия продолжительности операций  $y_{ij}$  определяются формулами

$$My_{ij} = \bar{y}_{ij} = \frac{1}{6} (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}),$$

$$Dy_{ij} = \sigma_{ij}^2 = \frac{1}{36} (b_{ij} - a_{ij})^2.$$

Здесь  $m_{ij}$  — мода распределения  $y_{ij}$ ;  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  — граничные значения. Вычисление  $t_{ij}^{(0)}$  и  $t_{ij}^{(1)}$  проводится по формулам для детерминированных сетей с заменой  $y_{ij}$  их средним значением  $\bar{y}_{ij}$ . Дисперсии  $\sigma_{ij}^2$  определяются из рекуррентных соотношений

$$\sigma_0^2 = 0,$$

$$\sigma_j^2 = D(t_i^* + y_i^*) = \sigma_i^{*2} + \sigma_j^{*2} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где  $i^*$  равно тому значению индекса  $i$ , при котором достигается максимум  $t_i^{(0)} + \bar{y}_{ii}$ .

Дополнительное предположение о том, что общая продолжительность реализации комплекса операций  $T = t_n(\sigma_n = \sigma_T)$  распределена по нормальному закону, позволяет определить вероятность выполнения комплекса в заданный срок  $T_d$ .

В этих предположениях величина

$$x = \frac{T_d - \bar{T}}{\sigma_T}$$

нормально распределена с параметрами  $(0,1)$  и очевидно

$$P\{T \leq T_{\alpha}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{T_{\alpha} - \bar{T}}{\sigma_T}} e^{-y^2/2} dy = \Phi\left(\frac{T_{\alpha} - \bar{T}}{\sigma_T}\right).$$

Аналогичным путем решается обратная задача — нахождение директивного срока  $T_d$  заданной «надежности»  $P_d$ . Для этого из уравнения

$$\Phi\left(\frac{T_x - \bar{T}}{\sigma_T}\right) \geq P_x$$

определяют значение  $T_d$ , принимаемое за директивный срок выполнения комплекса.

В работе [5] в качестве основного распределения предлагается использовать  $\beta$ -распределение вида  $f(x) = \frac{12}{(b-a)^2} (x-a)(b-x)^2$  и пользоваться двумя оценками  $a$  и  $b$  для определения математического ожидания и дисперсии  $y_{ij}$ , вычисляя их по формулам

$$\bar{u} = \frac{3a + 2b}{5} \text{ и } Dy = 0,04(b - a)^2.$$

В этом случае мода равна  $m = \frac{2a + b}{3}$ .

Кроме анализа временных характеристик, аналогичную методику применяют для анализа ряда характеристик используемых ресурсов, в частности для оценки будущих прямых затрат.

Одни из возможных приемов такой оценки приведен в [29]. Ожидаемые общие прямые затраты  $S$  на реализацию комплекса предлагается разбить в момент оценки на две части — уже произведенные затраты  $S_1$  и ожидаемые будущие затраты  $S_2$ . Исходя из предположения, что затраты в единицу времени постоянны, можно, вычислив среднюю продолжительность операций, определить ожидаемые затраты и их дисперсии. Дополнительное предположение о нормальности распределения общих затрат позволяет определить вероятность превышения суммой затрат некоторой величины  $S_0$ .

Описанная методика является наиболее употребительной, что объясняется ее простотой. Но она обладает рядом существенных недостатков, указанных в разделе, посвященном анализу основных вероятностных предположений, принятых в модели PERT.

## Аналитические методы

Попытки улучшения методов усреднения связаны с учетом распределения вероятностей продолжительностей операций  $y_{ij}$ . Их целью является как построение улучшенных оценок для средних значений сроков наступления событий, так и получение распределения вероятностей этих сроков или, во всяком случае, получение оценок ряда моментов этих распределений.

Предложены методы [22–24] некоторого усовершенствования методики вычисления оценок для математического ожидания, дисперсии, а в ряде случаев и моментов более высокого порядка. Они базируются главным образом на двух идеях. Одна [22] состоит в использовании несколько большей информации об операциях, например в учете зависимости или распределения длительности операций для построения улучшенных оценок средних времен наступления событий и, следовательно, среднего времени реализации всего комплекса. Другая [24] состоит в получении аналитического выражения для оценок (моментов) распределения максимума ряда случайных величин с целью некоторой компенсации ошибки, связанной с заменой среднего значения максимума случайных величин на максимум средних значений этих величин.

Для случая, когда продолжительности операций  $y_{ij}$  являются директивными случайными величинами, Фулкерсоном [22] предложена улучшенная оценка  $f$  средних различных сроков наступления событий, для которых при определенных условиях выполняется соотношение  $t_i^{(0)} \leq f_i \leq \bar{t}_i^{(0)}$ . При этом независимыми, в отличие от методики [21], предполагаются лишь операции, входящие в различные события сети.

Оценки  $f_i$  определяются соотношениями

$$f_0 = 0,$$

$$f_j = \sum_{Y_j} P(Y_j) \max(f_0 + y_{0j}, \dots, f_1 + y_{1j}, \dots, f_{j-1} + y_{j-1,j}) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где  $Y_j$  — вектор операций, входящих в  $j$ -е событие, а  $P(Y_j)$  — их совместная вероятность.

В [23] алгоритм Фулкерсона естественным образом распространен на непрерывный случай и указана удобная вычислительная форма этого алгоритма. Процесс сводится к вычислению конечных сумм в дискретном случае и одновременных интегралов в непрерывном.

Метод приближенной оценки первых двух моментов распределения сроков наступления событий в предположении, что продолжительности операций  $y_{ij}$  являются гауссовыми случайными величинами, описан в [24]. Состоит он в следующем. Если нумерация сети упорядочена, то вычисление средних различных сроков  $t_i^{(0)}$  осуществляется последовательной процедурой, на каждом шаге которой необходимо определить математическое ожидание максимума конечного числа случайных величин. Исходя из соотношения  $\max(x_0, x_1, x_2) = \max[\max(x_0, x_1), x_2]$  и предполагая, что величина  $y = \max(x_0, x_1)$  имеет нормальное распределение, автор указывает итеративную процедуру для вычисления средних и дисперсий в случае произвольного числа переменных. Если  $m_0, m_1, m_2$  — математические ожидания  $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$  — дисперсии случайных величин  $x_0, x_1, x_2$ , а  $\rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{12}$  — попарные коэффициенты корреляций, то

$$\mu_1 = My = m_0\Phi(\omega) + m_1\Phi(-\omega) + kp(\omega).$$

$$\mu_2 = Dy = (m_0^2 + \sigma_0^2) + \Phi(\omega) + (m_1^2 + \sigma_1^2)\Phi(-\omega) + (m_0 + m_1)kp(\omega),$$

$$\rho = \rho(x_2, y) = \rho(x_2, \max(x_0, x_1)) = \frac{\sigma_0\sigma_0\Phi(\omega) + \sigma_1\sigma_1\Phi(-\omega)}{\sqrt{(\mu_2 - \mu_1^2)}},$$

где

$$\omega = \frac{m_0 - m_1}{k}, \quad k = \sigma_0 + \sigma_1^2 - 2\sigma_0\sigma_1\rho_{01}.$$

Первые две формулы показывают зависимость  $\mu_1$  от  $m_0, m_1, \sigma_0, \sigma_1$  и  $\rho_{01}$ . Третья используется для определения моментов распределения максимумов, когда число переменных больше двух. Непосредственное применение этих соотношений для определения  $t_j^{(0)}$  и  $\sigma_j^2$  достаточно очевидно.

Методам анализа распределения вероятностей сроков наступления событий посвящены работы [4, 25, 26].

В [4] рассматривается метод аппроксимации распределения общего времени реализации комплекса операций. Определение закона распределения вероятностей про-

изводится с применением разложения по многомерным полиномам Эрмита, указываются соответствующие приближенные формулы.

В [25] предполагается, что длительности операций являются случайными величинами, распределенными на конечном интервале. Вычисления проводятся путем последовательной редукции сети к одной операции, для которой распределение вероятностей длительности ее выполнения совпадает с распределением вероятностей срока наступления конечного события  $t$ . Алгоритм пошаговой редукции сети выполняет суммирование и определение распределения максимума конечного числа случайных величин, сводящихся к операциям свертки и умножения распределений.

В случае полиномиальной плотности

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (a \leq x \leq b)$$

алгоритм выделения этих операций оказывается относительно простым.

Можно вычисления проводить несколько иным путем, представляя сеть сначала в виде дерева, число ветвей которого равно числу путей от начального события к конечному. В этом случае, просуммировав длительности операций и вычислив распределение максимума этих сумм, получают распределение  $T$ .

Так как пути могут иметь общие операции, то они, вообще говоря, зависимы. Поэтому сначала вычисляются условные распределения при фиксированных общих операциях, а затем производится интегрирование по этим условиям. Полученное дерево также используется для вычисления вероятности того, что некоторый путь является критическим, и для вычисления вероятности принадлежности операции критическому пути.

Изложенная методика весьма громоздка и ее реализация даже на ЭВМ связана с большими трудностями.

Работа [26] посвящена отысканию статистических параметров сетей, соответствующих любому возможному набору реализаций продолжительности операций, допускаемому распределениями, принятymi для каждой операции. Задача ставится в трактовке теории потоков в сетях, но в отличие от обычной постановки, предложенной Фулкерсоном [28] и в работе [30], в которых рассматривается случай детерминированных временных оценок, в данном случае вводятся вероятностные ограничения, наложенные на значения  $u_i$ .

В задаче требуется отыскать значения  $u_i$ , минимизирующие

$$\sum_{i=0}^m u_i a_i$$



при ограничениях

$$P \left\{ \sum_{i=0}^m u_i e_{ij} \geq t_j \right\} \geq p_j,$$

где  $0 \leq p_j \leq 1$  есть заданная вероятность для  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Решение задачи сводится к определению такого набора сроков начала операций, при котором вероятность завершения любой операции к заданному директивному сроку не меньше величины  $p_j$  ( $p_j$  можно считать гарантированным риском для операции  $j$ ).

Преобразуя левую часть каждого вероятностного ограничения в выражение, куда  $\sum u_i e_{ij}$  входит как параметр, получают детерминированный эквивалент этого ограничения в виде

$$F_j \left( \sum_{i=0}^m u_i e_{ij} \right) \geq p_j,$$



где  $F_j$  — распределение  $t_j$ . Затем переходят к задаче отыскания

$$\min \sum_{i=0}^m u_i a_i$$

при ограничениях

$$\sum_{i=0}^m u_i e_{ij} \geq F_j^{-1}(p_j) \quad (j = 1, \dots, n),$$

которая имеет, естественно, двойственную задачу, решаемую с помощью эффективных алгоритмов.

Рассмотрение примера определения сроков наступления событий критического пути в одном частном случае (при экспоненциальной плотности распределения продолжительности всех операций), приводит к выводу, что в отличие от общепри-

нятого мнения при наличии параллельных дуг или путей с меняющейся «критичностью», существенно отличающихся по продолжительности, всегда следует ожидать многомодальности распределения продолжительности операций.

Взаимодействие элементов сети приводит к тому, что поведение ее характеристик существенно отличается от поведения характеристик отдельных элементов. Применение аппарата стохастического программирования для анализа сетей с вероятностными временными оценками позволяет построить эффективные процедуры отыскания «динамических» критических путей, что обеспечивает учет отклонений от наиболее вероятных оценок, порядка выполнения и общей статистики реализации операций.

Прикладную ценность предложенного метода анализа сетей можно усмотреть в повышении надежности прогнозирования общих сроков завершения комплексов или отдельных их частей, что позволяет принимать обоснованные обязательства по контактам, а также разрабатывать реалистические календарные планы.

### 3. Метод статистических испытаний

Работы [5, 10, 27] посвящены применению метода статистических испытаний для анализа сетей. В них показано, к каким большим ошибкам в смысле отклонения от истинного значения математического ожидания и дисперсии могут приводить в ряде случаев принятые в модели PERT допущения. Отмечается, что одним из наиболее уязвимых допущений является предположение о том, что критический путь определяется как путь с наибольшим математическим ожиданием продолжительности, хотя, вообще говоря, почти все пути могут стать критическими при конкретной реализации случайных продолжительностей операций.

Авторы указывают на преимущества статистического моделирования и на то, что использование метода Монте-Карло позволяет существенно повысить точность анализа сети и определить вероятность принадлежности любой операции критическому пути. Кроме того, метод Монте-Карло допускает исследование любых распределений продолжительности операций и в этом смысле вполне универсален.

В [5] описана методика моделирования путем статистических испытаний продолжительности выполнения операций при различных видах распределений:  $\beta$ -распределении, заданном двумя оценками, нормальным и логарифмически-нормальным. Указан также подход к моделированию коррелированных операций и возможность использования статистического моделирования для оценки стоимостных характеристик комплекса.

В [10] рассматривается метод нахождения функции распределения времени реализации комплекса путем статистического моделирования, позволяющий значительно сократить время моделирования. Предлагаемый способ основан на расщеплении алгоритма на две части: раскрытие структуры сети, выполняемое один раз, и многократная реализация случайного вектора продолжительностей операций с определением длины критического пути при использовании информации об операциях, упорядоченных в первой части алгоритма. Описывается способ моделирования  $\beta$ -распределения, заданного тремя оценками. Время моделирования  $\approx 10^{-4} mN$  мин., где  $m$  — количество операций сети, а  $N$  — число реализаций.

В [27] показано, что с помощью статистического моделирования можно вычислять характеристики сети с любой требуемой плотностью, которая приближенно обратно пропорциональна корню квадратному из числа реализаций. Введено понятие «коэффициент критичности» как отношение числа реализаций, в которых операция принадлежит критическому пути, к общему числу реализаций. Математическое ожидание этого коэффициента равно  $NP$ , а дисперсия —  $NP(1-P)$ , где  $N$  — общее число реализаций, а  $P$  — вероятность принадлежности критическому пути.

В работе изложены также приемы упрощения вычислительных процедур при анализе сетей методом Монте-Карло и указано, что составлена программа для ЭВМ, позволяющая подвергать анализу сети, содержащие до 1000 событий и выдающая распределения принадлежности проекта, математическое ожидание и дисперсию этого распределения, а также коэффициенты критичности всех операций. Машинное время линейно зависит от количества генерируемых случайных чисел, а при фиксированном числе реализаций — от количества операций в сети.

## II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЕТЕЙ

При реализации крупных проектов фактически независимо строится большое число сетей, которое необходимо объединить (сшить), чтобы руководство всего проекта могло покрываться одной укрупненной сетью. В связи с этим возникает задача определения граничных событий, общих для двух или более индивидуальных сетей, и задача выполнения анализа укрупненной сети [31].

Идея одного из методов [32] решения этой задачи сводится к следующему. Прежде всего, в детализированных сетях низшего уровня выделяется множество всех граничных событий, а также так называемых ключевых, т. е. наиболее важных, событий, которые должны быть сохранены в укрупненной сети. Далее вычисляется длина

максимального (критического) пути между всеми парами указанных событий (естественно, если существует хотя бы один путь между рассматриваемой парой). Далее строится так называемая скелетная сеть, содержащая лишь указанное множество событий, дуги которой имеют длину, найденную на предыдущем шаге. В скелетной сети дуги не отображают, как правило, реальных операций в том смысле, который им приписывается в детальной сети, однако все временные характеристики детальной сети сохраняются. Как правило, скелетная сеть содержит примерно в 10 раз меньшее число операций, чем исходная детальная.

Затем все скелетные сети «спиваются» по граничным событиям и выполняется обычный анализ укрупненной сети. В результате сроки наступления конечных событий индивидуальных детализированных сетей могут изменяться по сравнению со сроками, найденными при независимом анализе каждой детализированной сети. Это обусловлено влиянием ограничений, накладываемых на граничные события данной сети другими сетями.

Таким образом, возникает необходимость повторного анализа детализированных сетей с целью определения их временных характеристик, учитывающих взаимное влияние граничных событий. При этом для граничного события, в которое входит операция (операции) другой сети, определяющим является ранний срок, а для граничного события, из которого выходит операция (операции), принадлежащей другой сети,— поздний срок.

В итоге единная укрупненная сеть всего проекта отображает временные параметры детализированных сетей, а в последних учитываются взаимосвязи между сетями (частями проекта), что обеспечивает согласование всех уровней иерархии на общей основе и упрощает задачу анализа укрупненной сети, которая становится «доступной» для ЭВМ. Программа, реализующая описанный метод, составлена и широко используется в США для различных крупных проектов.

Одним из методов построения сетей состоит в детализации исходной сети путем разбиения операций на подоперации. Эффект такого разбиения исследуется в работе [33]. Он может быть различным и по-разному влиять на выполнение плановых сроков наступления событий в зависимости от того, меньше или больше плановые сроки средних сроков наступления событий. Предполагается, что для операции  $(i, j)$  продолжительности  $y_{ij}$  заданы значения трех оценок и она разбивается на  $k$  операций  $y^1, \dots, y^k$  с оценками  $a^s, m^s, b^s$  ( $s = 1, \dots, k$ ). Рассматривается в этих условиях изменение дисперсии плановых сроков наступления событий в зависимости от степени разбиения операций.

Ограничичность такого подхода связана с общими недостатками использования трехоценочной системы  $a, m, b$  и предположениями о нормальном распределении общего срока выполнения комплекса операций.

В [34] предполагается для получения временных характеристик сети разбивать сеть на подсети с меньшим числом событий (декомпозиция сети). Описывается алгоритм решения задачи для всей сети на основании полученных характеристик для отдельных подсетей. Аналогично предлагается решать задачу минимизации стоимости выполнения комплекса.

### III. АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ

Как уже указывалось, довольно большую группу теоретических работ составляют работы, содержащие анализ статистических допущений, принятых в модели PERT.

В [36] указывается на ряд ошибок, связанных с заменой случайной длительности операций их средними значениями.

Дело в том, что определенные таким путем значения  $t_i^{(0)}$  и  $t_i^{(1)}$  не являются в действительности средними, наиболее ранними и наиболее поздними сроками наступления событий  $i$ . Это лишь оценка истинных средних сроков  $\bar{t}_i^{(0)}$  и  $\bar{t}_i^{(1)}$ , причем для ранних сроков они всегда «оптимистичны» ( $t_i^{(0)} \leq \bar{t}_i^{(0)}$ ), а для поздних сроков может иметь место как  $t_i^{(1)} \leq \bar{t}_i^{(1)}$ , так и  $t_i^{(1)} \geq \bar{t}_i^{(1)}$ . Отсюда ясно, что и для общего истинно среднего времени реализации комплекса  $\bar{T}_{\text{ист}}$  мы получили лишь оценку

$$t_n = \bar{T} \leq \bar{T}_{\text{ист}}.$$

Указанные соотношения следуют из того, что для набора случайных величин  $x_0, x_1, x_2$  имеет место

$$M \max(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \max(Mx_0, Mx_1, \dots, Mx_n).$$

Существенным является также некорректность определения критического пути [35], так как среднему времени реализации комплекса, вообще говоря, не соответствует ни один реальный усерднейший критический путь. Кроме того, достаточно произвольным является утверждение о нормальности распределения  $T = t_n^{(0)}$ . Нетрудно провести элементарные примеры, противоречащие этому утверждению.

В [37] дан анализ размаха  $\beta$ -распределения продолжительности операций, граничные точки которого определяются в канонической модели PERT оптимистической и пессимистической оценками, а аппроксимации среднеквадратичного отклонения этого

размахом выражением  $(b - a) / 6$ , а также вычисляются вероятности наступления любого события (прежде всего, конечно, завершения всего проекта) к заданному сроку по критическому пути, исходя из центральной предельной теоремы. Указано, что для некоторых частных видов  $\beta$ -распределения (например для равномерного) среднеквадратичное отклонение существенно отличается от принятого в модели PERT и что это допущение не выполняется уже для суммы двух независимых случайных величин. Вместо соотношения  $\sigma = (b - a) / 6$  автор предлагает использовать оценки математического ожидания или медианы, хотя и признает, что экспертические оценки этих величин получить весьма затруднительно. Для преодоления этих трудностей выдвигается идея использования двух промежуточных квантилей распределения.

Кроме того, автор рекомендует использовать Г-распределение продолжительности операций, плотность которого описывается выражением

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\delta^{\lambda} t^{\lambda-1} e^{-\delta t}}{\Gamma(\lambda)} & (0 < t \leq \infty, \delta, \lambda > 0), \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

при всех других условиях.

Почти полностью сохранив универсальность  $\beta$ -распределения, это распределение определяется всего двумя параметрами, которые можно оценить любыми двумя промежуточными квантилями. В то же время недостаток Г-распределения состоит в том, что его мода всегда меньше математического ожидания.

Другой подход к устранению недостатков, обусловленных принятыми в модели PERT допущениями, сводится к тому, чтобы не считать  $a$  и  $b$  абсолютными границами интервала, на котором задано  $\beta$ -распределение, а относить их к некоторым внутренним квантилям этого распределения.

В этой же работе показано, к каким ошибкам приводит допущение о том, что распределение срока наступления любого события равно распределению продолжительности критического пути по отношению к рассматриваемому событию. Из конкретного примера видно, что ошибка (смещение) может достигать величины порядка 15%, причем ошибки такого рода не зависят от точности оценки продолжительности отдельных операций и возрастают с увеличением числа операций, имеющих общие события с операциями критического пути.

Если рассматривать ошибки, обусловленные допущениями относительно распределения продолжительности отдельных операций [38], то максимальная ошибка при вычислении математического ожидания продолжительности, связанная с различиями в формуле кривых распределения, определяется выражением  $\frac{1}{3}(1 - 2m)$ , где  $m$  — мода распределения. Максимальная ошибка среднеквадратичного отклонения может достигать  $\frac{1}{6}$ , причем первая ошибка зависит от моды и при ее приближении к граничным точкам достигает 33%.

Указанные абсолютные значения ошибок могут компенсироваться в зависимости от числа последовательных операций в пути, диапазона изменения продолжительности операций и асимметрии распределений.

Максимальные значения абсолютных ошибок математического ожидания, обусловленные допущением  $\sigma = \frac{1}{6}(b - a)$  и аппроксимацией  $\tilde{t}_t^{(0)} = \frac{1}{6}(a + 4m + b)$ , могут достигать соответственно величин  $|\frac{1}{6}(4m + 1) - m(a + 1) / (a + 2m)|$  и  $|\frac{1}{6} - \sqrt{m^2(a + 1)(a - am + m)} / (a + 2m)^2(a + 3m)|$  или 33 и 17%.

Наконец,  $t_a$ ,  $t_m$  и  $t_b$  — ошибки экспертических оценок для  $a$ ,  $m$  и  $b$ , если считать, что эти оценки лежат в интервалах  $0,8a \leq t_a \leq 1,4a$ ,  $0,9m \leq t_m \leq 1,1m$  и  $0,9b \leq t_b \leq 1,2b$ , где  $a$  и  $b$  приняты за истинные значения левой и правой границ распределения, а  $m$  — моды, составляют для математического ожидания  $\frac{1}{6}(a + 4m + 2b / b - a)$  и для среднеквадратичного отклонения  $\frac{1}{30}(b + a / b - a)$ .

Интересно отметить, что примерно к таким же результатам приводит аналогичный анализ треугольного распределения, которое выгодно отличается от  $\beta$ -распределения, принятого в модели PERT. В треугольном распределении для математического ожидания и среднеквадратичного отклонения продолжительности операции не требуется приближенных выражений и оно полностью определяется тремя параметрами, например  $a$ ,  $m$  и  $b$ . Таким образом, этот закон распределения столь же правомерно использовать в сетях с вероятностными параметрами, как и  $\beta$ -распределение.

Что касается закона распределения продолжительности всего проекта, то, как известно, принятые в модели PERT допущения приводят к оптимистическому смещению математического ожидания и увеличению среднеквадратичного отклонения по сравнению с истинным. Аналитическое определение этих характеристик для реальных сетей сопряжено с большими вычислительными трудностями.

Ошибки, обусловленные структурой сети можно проиллюстрировать на некоторых простых примерах. Так, при наличии одного пути, длина которого намного превышает длину всех остальных путей, ошибки связаны только с допущениями, относящимися к распределению продолжительности операций. Если в сети имеется путь, длина которого близка к длине критического пути, то ошибка при определении математического ожидания продолжительности проекта может достигать примерно 15%, причем увеличение числа таких путей ведет к возрастанию ошибки. В то же время

принадлежность одних и тех же операций различным путем приводит к уменьшению указанной ошибки.

На простых примерах показано, что с увеличением разности между длинами путей существенно уменьшаются ошибки. Так, в сети, содержащей всего два пути, не имеющих общих операций, в случае равенства их длины ошибка математического ожидания продолжительности проекта достигает 17%, а когда длина одного в четырех раз меньше, то эта ошибка практически равна нулю, если считать, что продолжительности операций имеют нормальное распределение.

Расчленяя сеть на простые последовательно-параллельные фрагменты и исключая из нее все операции, которые вообще не могут стать критическими, представляется возможным оценить ошибки, обусловленные допущениями модели PERT.

Вместо оценки моды  $\beta$ -распределения для продолжительности операций можно пользоваться оценкой математического ожидания [39]. Показано, что в силу принимаемых обычно допущений коэффициент асимметрии  $\beta$ -распределения оказывается равным  $\pm\sqrt{2}$  или 0, что противоречит условию произвольного положения моды относительно граничных точек  $a$  и  $b$ .

С целью устранения этого недостатка и вводится оценка математического ожидания  $M$ , которую можно получить от экспертов столь же обоснованно, как и оценку моды.

Легко показать, что

$$M = (ab + \gamma a) / (a + \gamma),$$

а

$$\sigma^2 = (b - a)^2 a \gamma / (a + \gamma)^2 (a + \gamma + 1).$$

Однако для использования этого предложения необходимо принять предположение о том, что кривая распределения касается оси  $t$  в точках  $a$  и  $b$ .

Оценка дисперсии

$$D = (b - a)(m - a) / (a + \gamma + 1)$$

является несколько завышенной, если считать, что кривая распределения имеет минимальный наклон к оси  $t$ .

Сравнивая эту оценку с принятой в канонической модели PERT, получим

$$D / (b - a)^2 = L^2(1 - L) / (L + 2) \quad (0 < L \leqslant 1/2),$$

где  $L = (m - a) / (b - a)$  и  $0 < m - a \leqslant b - a$ .

В заметке [40], посвященной работе [39], отмечается, что предложенный метод не отличается принципиально от метода, применяемого к канонической модели PERT. Признавая правомерность допущения о касании кривой  $\beta$ -распределения, автор заметки подчеркивает, что по существу в [39] рассматривается все-таки ограниченный класс  $\beta$ -распределений со строго фиксированными параметрами  $a$  и  $\gamma$ , хотя этот класс и несколько шире распределений, охватываемых канонической моделью PERT. Кроме того, как показано в [43], ошибка оценки  $\bar{t}^{(0)}$  истинного среднего значения срока  $t_i$ , если распределение унимодально непрерывно и задано на отрезке  $[0, 1]$ , равна

$$\sup |\mu - \bar{t}| = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{m}{3} \right) \quad \text{при } m \leqslant \frac{1}{2},$$

где верхняя грань берется по всем распределенным с модой  $m$ . Поэтому никогда нет уверенности, что ошибка в оценке  $\bar{t}$  меньше 25%. Анализу вероятностных предложений модели PERT посвящены также работы [41, 42].

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ

Задачи оптимизации сетей по ресурсам в основном можно разбить на два класса: оптимизация сетей по стоимости и оптимизация сетей по ресурсам типа людей, станков и т. д. Если обозначить через  $u_{ij}(t)$  количество ресурсов на операции  $(ij)$  либо в момент  $t$ , то в задачах первого класса величина затрат

$$S = \sum_{(i, j)} \int_0^T u_{ij}(t) dt$$

ограничена и требуется минимизировать время выполнения комплекса, либо требуется минимизировать затраты  $S$  при ограниченном времени выполнения комплекса  $T$ . При этом предполагается, что распределение ресурсов внутри операции производится определенным образом, т. е. величина  $s_{ij} = \int_0^T u_{ij}(t) dt$  однозначно определяет время  $y_{ij}$  выполнения каждой операции. В работах [49] и [50] предполагается, что  $s_{ij}$  — линейная (в некоторых пределах) функция  $y_{ij}$ , т. е.  $s_{ij} = a_{ij} - b_{ij}y_{ij}$ , где  $d_{ij} \leqslant y_{ij} \leqslant D_{ij}$ , и решается задача построения зависимости  $S_{\min}(T)$ . В качестве первой оптимальной

пары берется  $T_0$  при  $y_{ij} = D_{ij}$  и  $S_0 = \sum_{(i,j)} (a_{ij} - b_{ij}D_{ij})$ . Естественно, что сокращение времени  $T_0$  возможно только за счет уменьшения времени выполнения критических операций. Множество критических операций  $R$ , уменьшение длительности которых требует минимальных затрат, является разрезом сети с минимальной величиной  $\sum_{(i,j) \in R} b_{ij}$ . Эти операции легко определяются. Примем пропускную способность дуги  $(i, j)$  равной  $b_{ij}$ , если операция критическая и  $y_{ij} > d_{ij}$ , 0 — если операция некритическая и  $\infty$  — если операция критическая и  $y_{ij} = d_{ij}$ . В множество  $R$  входят операции, образующие минимальный разрез в получившейся транспортной сети. Времена выполнения этих операций уменьшаются на величину  $\Delta_0$  до тех пор, пока не появляются новые критические операции или время выполнения хотя бы одной операции множества  $R$  не станет равным минимально возможному. Отметим, что в интервале  $(T_0 - \Delta_0, T_0)$  зависимость  $S_{\min}(T)$  линейная с отрицательным наклоном  $k_0 = \sum_{(i,j) \in R} b_{ij}$ . Начиная с новой оптимальной пары  $T_1 = T_0 - \Delta_0$  и  $S_1 = S_0 + k_0 \Delta_0$ , определяется новый минимальный разрез пропускной способности  $k_1 \geq k_0$  и т. д. Так как последовательность  $k_0, k_1, \dots$ , неубывающая, то зависимость  $S_{\min}(T)$  является кусочно-линейной, выпуклой книзу функцией. Очевидно, алгоритм обобщается на случай кусочно-линейных (выпуклых книзу) зависимостей  $S_{ij}(y_{ij})$ . При этом определение максимального разреза сети производится также в моменты изменения наклона любой зависимости  $s_{ij}(y_{ij})$ .

В [51] рассмотрен другой подход. Функции  $s_{ij}(y_{ij})$  предполагаются строго выпуклыми книзу. Задача заключается в минимизации  $S$  при заданном  $T$ . Доказывается, что для оптимальности решения необходимо и достаточно, чтобы все операции были критическими и в любой момент  $t \in (0, T)$

$$\sum_{(i,j) \in F(t)} \left( \frac{ds_{ij}}{dt} \right)_{t=y_{ij}} = \text{const},$$

где  $F(t)$  — фронт операций в момент  $t$ .

На основании этого предполагается алгоритм решения задачи.

Аналогичный подход изложен в [52], где это условие заменено по существу эквивалентным условием

$$\sum_{(i,j) \in U_x^+} \left( \frac{ds_{ij}}{dt} \right)_{t=y_{ij}} = \sum_{(i,j) \in U_x^-} \left( \frac{ds_{ij}}{dt} \right)_{t=y_{ij}}$$

Здесь  $U_x^+$  — множество операций, для которых событие  $x$  начальное,  $U_x^-$  — множество операций, для которых событие  $x$  конечное.

Отметим, что второе условие в общем случае не выполняется, если событие  $x$  является начальным (или конечным) хотя бы для одной фиктивной критической операции. Алгоритм, предложенный в [52], заключается в проверке этого условия для каждого события сети. Если оно не выполняется, то производится соответствующее перераспределение ресурсов.

Решение параметрической задачи минимизации стоимости для небольших сетей (порядка 10–100 операций) на аналоговых моделях описано в [48]. Отметим также работу [46], в которой рассмотрена аналогичная задача и дается описание алгоритмов решения.

Если нужно построить фиксированный календарный график комплекса при неопределенной продолжительности операций, которая становится известной только после начала соответствующей операции, то вследствие расхождения между плановой и фактически обнаруженной продолжительностью может возникнуть необходимость затраты дополнительных ресурсов для обеспечения принятого графика. В такой ситуации можно поставить задачу отыскания календарного графика, минимизирующего математическое ожидание дополнительных затрат ресурсов [53].

Предположим, что для некоторой операции определены предварительные затраты ресурсов  $s_{ij}$  и что известен закон распределения продолжительности этой операции  $F_{ij}(y_{ij})$  при этих затратах ресурсов. Нужно выбрать плановую продолжительность операции  $y_{ij}$ . Задавая эту величину для всех операций, получаем тем самым календарный график комплекса, фиксируя сроки наступления всех событий.

После начала выполнения каждой операции ее продолжительность  $y_{ij}$  определяется как выборка из распределения  $F_{ij}(y_{ij})$ . В зависимости от расхождения между величинами  $y_{ij}$  и  $\tilde{y}_{ij}$  могут потребоваться дополнительные затраты ресурсов для усокорения некоторых операций с целью соблюдения принятого календарного графика.

Можно построить новые зависимости затрат ресурсов от  $y_{ij}$  при фиксированном  $\tilde{y}_{ij}$ . Если принять, что семейство кривых  $r_{ij}(\tilde{y}_{ij} / y_{ij})$  выпукло по  $\tilde{y}_{ij}$  при любом значении  $y_{ij}$  для всех операций, то среднее количество ресурсов, расходуемых на выпол-

нение любой операции, определяемое уравнением

$$\tilde{r}_{ij}(\tilde{y}_{ij}) = \int_0^{\infty} r_{ij}(\tilde{y}_{ij}/y_{ij}) dF_{ij}(y_{ij}),$$

будет также выпукло по  $\tilde{y}_{ij}$ .

Построив график функции  $\tilde{r}_{ij}(\tilde{y}_{ij})$  и выполнив его кусочно-линейную аппроксимацию, получим зависимости, аналогичные зависимостям «время — стоимость» в модели критического пути.

Таким образом, можно задать любое допустимое значение продолжительности всего комплекса  $T$ , а затем найти календарный график, минимизирующий общие средние затраты ресурсов  $\bar{S} = \sum_{(i,j)} \tilde{r}_{ij}$  по всем операциям комплекса. Анализ параметрической зависимости  $\bar{S}$  от  $T$  позволяет выбрать приемлемое значение риска при назначении планового срока завершения комплекса.

При равномерном распределении с размахом  $[a, b]$  в предположении, что затраты ресурсов  $s$  линейно зависят от сокращения продолжительности операций, получаем, что дополнительные средние затраты ресурсов на ускорение операции проекта как функция  $\tilde{y}_{ij}$  описываются выражением

$$\bar{r} - r_0 = \begin{cases} 0, & \tilde{y} \geqslant b, \\ s(b - \tilde{y})^2/2(b - a), & a \leqslant \tilde{y} \leqslant b, \\ \infty, & a \geqslant \tilde{y}. \end{cases}$$

Решение этой задачи с помощью алгоритма квадратичного программирования дает кривые оптимальной зависимости сроков наступления событий от  $T$ , соответствующие минимуму общих средних затрат ресурсов  $\bar{S}$ .

Если календарный график комплекса построен и оптимальные значения  $\tilde{y}_{ij}$  выбраны, то достаточно просто находится математическое ожидание минимума  $S$  при любом заданном  $T$ . Кроме того, если функции  $r_{ij}(\tilde{y}_{ij}/y_{ij})$  и  $F_{ij}(y_{ij})$  имеют простые выражения, то можно найти распределение  $S$  при любом  $T$ .

В задачах, относящихся ко второму классу, требуется либо минимизировать время выполнения комплекса при заданном количестве ресурсов  $N(t)$  в момент  $t$ , либо минимизировать потребность в ресурсах  $N = \max_{t \in (0, T)} \sum_{(i,j)} u_{ij}(t)$  при заданном времени выполнения комплекса. Критерий минимума  $N$  иногда заменяется в какой-то степени эквивалентным критерием минимума

$$I = \int_0^T \left[ \sum_{(i,j)} u_{ij}(t) \right]^2 dt.$$

Если операции комплекса принадлежат к различным классам, то ограничения на ресурсы задаются для каждого класса, т. е.  $\sum_{(i,j) \in Q_k} u_{ij}(t) \leq N_k(t)$ , где  $Q_k$  — множество операций  $k$ -го класса. В свою очередь, при минимизации количества ресурсов применяют критерий минимума

$$I = \sum_k c_k \max_t \sum_{(i,j) \in Q_k} u_{ij}(t)$$

или

$$I = \sum_k c_k \int_0^T \left[ \sum_{(i,j) \in Q_k} u_{ij}(t) \right]^2 dt,$$

где  $c_k$  — некоторый коэффициент важности ресурсов  $k$ -го вида.

Алгоритмы решения задач второго класса основаны на наборе эвристических правил распределения ресурсов и дают хотя и не оптимальные, но достаточно хорошие для практики решения.

В [54] считается заданным время выполнения каждой операции  $y_{ij}$ , количество ресурсов  $B_{ij}$ , необходимое для выполнения операции  $(i, j)$ , и общее количество ресурсов  $N$ . Требуется минимизировать время выполнения комплекса. Алгоритм основан на правиле приоритета операций, которое заключается в следующем: в первую очередь выполняются операции фронта с меньшим полным резервом времени. Если резервы одинаковы, то в первую очередь выполняются операции с большей интенсивностью  $B_{ij}$ . При этом рассматриваются два случая: допустим перерыв в выполнении операции и прерывать выполнение начатых операций запрещено. Во втором случае операции, которые не закончены к очередному моменту перераспределения, в этот момент не рассматриваются. Основным преимуществом этого алгоритма является простота.

$$I = \int_0^T R^2(t) dt, \text{ где } R(t) = \sum_{(i,j) \in F(t)} B_{ij} \text{ при}$$

заданных  $y_{ij}$  и  $T$ . Сначала строится график потребности в ресурсах  $R(t)$  при условии, что все операции начинаются в наиболее ранние возможные сроки. Затем проводится сдвиг операций, имеющих резервы времени, вправо на 1 единицу времени. Сдвиг допустим, если  $R_{j+1} \leq R_i - B_{kl}$ , где  $R_i$  — потребность в ресурсах в интервале  $(\tau_{i-1}, \tau_i)$ ,  $\tau_i$  — момент начала операции  $(k, l)$ ,  $\tau_j$  — момент ее окончания. Легко проверить, что при выполнении этого неравенства величина  $I$  при сдвиге не возрастает. Проверка на допустимость сдвига начинается с конца, т. е. с операции, имеющей максимальный номер конечного события, а если таких операций несколько, то из них выбирается операция с максимальным номером начального события (предполагается, что упорядочение событий правильное). Если сдвиг на одну единицу недопустим, то проверяется допустимость сдвига на две единицы и т. д. до величины резерва. Алгоритм заканчивается после проверки на допустимость сдвига всех операций. Хотя алгоритм изложен для оптимизации периодических процессов, он, конечно, применим для канонических сетей.

Аналогичные идеи заложены в алгоритме решения задачи минимизации  $\max_{t \in [0, T]} R(t)$  [60]. Решение также начинается с построения графика  $R(t)$  при условии, что все операции начинаются в самые ранние сроки. Определяется  $N = \max_{t \in [0, T]} R(t)$

и затем проверяется возможность выполнения комплекса за время  $T$  при количестве ресурсов  $N = 1$ . Для этого просматриваются слева направо интервалы  $(\tau_k, \tau_{k+1})$ , где  $\tau_k$  и  $\tau_{k+1}$  — два соседних момента окончания операций, и определяется ближайший интервал, для которого  $R(t) > N = 1$ . Проверяется возможность сдвига этих операций вправо к моменту  $\tau_{k+1}$  без увеличения времени выполнения комплекса. Если такие операции существуют, то среди них выбирается операция с наименьшей интенсивностью  $B_{ij}$  (при сдвиге операции одновременно производится необязательный сдвиг правее расположенных операций).

На том же принципе основан алгоритм сглаживания потребностей в оборудовании [56]. Для заданного сетевого графика комплекса строятся таблицы потребностей в оборудовании (при начале операций в наиболее ранние сроки). Затем производится сдвиг операций, имеющих резервы, с целью уменьшения пиковых потребностей в оборудовании и увеличения загрузки оборудования в интервалах низкой загрузки. Одновременно появляется возможность принятия более эффективных решений относительно закупки или аренды оборудования, а также календарного планирования ремонтов.

В [57] рассмотрена задача минимизации времени выполнения комплекса при ограничением количестве ресурсов каждого вида и заданной интенсивности потребления ресурсов на каждой операции. Автор подробно анализирует трудности точного решения, возникающие вследствие большого числа возможных вариантов, и делает вывод, что единственным решением указанной задачи является моделирование на цифровой вычислительной машине. Приводятся результаты моделирования. Целью моделирования было определение различных минимальных вариантов распределения ресурсов в пределах между минимальной и максимальной продолжительностью комплекса. Подробное описание программы отсутствует.

В работе [44] описан эвристический алгоритм распределения ресурсов одного вида, основанный на правилах приоритета операций с меньшим полным резервом времени. Предполагается, что скорость выполнения каждой операции прямо пропорциональна количеству ресурсов в некоторых пределах, т. е.  $w_{ij}(t) = a_{ij}u_{ij}(t)$ ,  $0 \leq u_{ij}(t) \leq B_{ij}$ . Общее количество ресурсов ограничено, и требуется минимизировать время выполнения комплекса.

Отмечается, что причиной возможной неоптимальности решения, полученного по правилу приоритета операций с меньшим полным резервом времени, является наличие участков неполного использования ресурсов (так называемые «узкие места» сетевого графика), и предлагаются некоторые приемы улучшения решения (правила устранения «узких мест»)\*.

Трудности точного решения задач распределения ресурсов и вместе с тем естественное желание получить точное решение заставляют рассматривать постановки задач с дополнительными ограничениями на решение. Примером такого ограничения, существенно облегчающего процесс точного решения задачи, является требование к решению удовлетворять упорядочению событий, т. е. момент свершения  $i$ -го события  $t_i$  меньше момента свершения  $j$ -го события  $t_j$ , если  $i < j$  (упорядочение событий предполагается правильным). При таком ограничении задача минимизации времени выполнения комплекса при ограниченном количестве ресурсов каждого вида и постоянной интенсивности потребления ресурсов на каждой операции сводится к задаче линейного программирования [45] довольно большого объема, так что такое свидение представляет скорее теоретический интерес, нежели практический метод решений.

\* Описание алгоритмов [44, 54, 55, 60] имеется в [45].

При таком же дополнительном ограничении в [47] решена задача минимизации  $J = \sum_{k} [\sum_{(i,j) \in Q_k} u_{ij}(t)]^2 dt$  при заданном времени выполнения комплекса  $T$ .

На основе аналогии минимума  $I$  с минимумом потенциальной энергии некоторой гидростатической системы автор предлагает итерационный алгоритм решения задачи (метод последовательных приближений), который сходится к оптимальному решению.

Более сложная задача рассмотрена в [58]. Здесь считается заданным время выполнения комплекса и количество ресурсов каждого вида  $N_k(t)$  в любой момент времени ( $N_k(t)$  — ступенчатые функции). Число людей, необходимых для выполнения операций, линейно связано с временем ее выполнения, т. е.

$$u_{ij} = c_{ij} - k_{ij}y_{ij}, \quad d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij},$$

Кроме того, задана зависимость стоимости выполнения операции  $(i,j)$  от времени также в виде линейной функции

$$s_{ij} = a_{ij} - b_{ij}y_{ij}, \quad d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij}.$$

Задача заключается в определении количества ресурсов (людей) на каждой операции так, чтобы количество ресурсов, требуемое в момент  $t$ , не превышало заданного количества соответствующего вида, комплекс был выполнен за время  $T$  и стоимость его выполнения была минимальной. Эта задача имеет большее практическое значение, чем просто задача минимизации стоимости, так как учитывает ограничения на количество исполнителей. Сначала берется  $y_{ij} = d_{ij}$  для каждой операции (т. е. минимальное допустимое время выполнения) и определяется потребность в ресурсах по каждому виду (операции начинаются в самые ранние сроки). Если потребность в ресурсах в каком-либо интервале времени превышает заданное количество, то производится сдвиг операций в пределах резервов времени, пока не получается допустимого решения (в противном случае необходимо увеличить количество ресурсов в данном интервале). После получения решения, допустимого по ресурсам, начинается сокращение срока выполнения комплекса до заданного путем увеличения количества ресурсов на критических операциях. Для каждого критического пути  $l$  определяется операция  $(i,j)_l$ , сокращение которой требует минимальных затрат (операция с минимальным наклоном  $b_{ij}$ ). Так как операция может принадлежать нескольким критическим путям, то наклон каждой операции суммируется с наклонами операций  $(i,j)_l$  критических путей, не содержащих данной. На операцию, для которой полученная сумма минимальна, добавляется единица ресурсов, если в интервале выполнения этой операции имеются свободные ресурсы (в противном случае рассматривается следующая операция  $(i,j)_l$ ). Этот процесс повторяется, пока время выполнения комплекса не будет равно заданному либо дальнейшее уменьшение времени путем указанной процедуры будет невозможным из-за нарушений ограничений по ресурсам.

В [59] предлагается алгоритм решения аналогичной задачи минимизации стоимости выполнения комплекса при заданном времени его выполнения и ограниченном количестве ресурсов (зависимость между стоимостью и продолжительностью выполнения каждой операции предполагается известной).

Компанией General Electric разработана программа ASTRA (Automatic Scheduling with Time Integrated Resource Allocation) [61]. Программа распределяет ресурсы по нескольким одновременно выполняемым комплексам. При этом может учитываться до 200 различных видов ресурсов, и задача решается для сетей, содержащих до 1000 событий. Программа определяет критический путь по времени и критический путь по ресурсам, состоящий из операций, для которых наиболее поздний срок окончания должен быть сдвинут из-за недостатка ресурсов. Этот метод назван методом сложного критического пути (минимальная продолжительность проекта определяется при физически реализуемом распределении ресурсов). Если полученное решение не удовлетворяет ограничениям по ресурсам, то программа сдвигает сроки окончания ряда операций, пока не достигается принятого значения критерия физической реализуемости, причем увеличение продолжительности операций производится с учетом стоимости ресурсов.

Наконец, отметим программу RAMPS [62], которая минимизирует стоимость выполнения комплекса с учетом ограничений по ресурсам, а также потерь, связанных с запаздыванием сроков выполнения операций, и потерь от неполного использования ресурсов.

Некоторые операции комплекса могут выполняться в различных участках сети по частям (разделимые операции). В связи с этим возникает задача размещения таких операций в сети так, чтобы минимизировать время выполнения комплекса. В [63] рассмотрен случай одной разделимой операции (предполагается, что времена выполнения всех операций заданы). Части разделимой операции помещаются сначала в участки ее возможного выполнения, имеющие резерв времени. Затем определяется максимальное число участков, увеличение длительности которых на одно и то же время увеличивает срок выполнения комплекса на то же самое время, и оставшаяся часть разделимой операции распределяется равномерно по этим участкам. Хотя результат почти очевиден, более сложные задачи подобного типа (например случай нескольких разделимых операций и т. д.) безусловно представляют интерес.

## **Заключение**

Как видно из сделанного выше обзора работ, теория сетевого планирования и управления лишь начинает складываться из довольно различных по характеру исследований.

Если на практике сетевые модели получили всеобщее признание и массовое распространение, то теоретические результаты выглядят пока скромно. Это объясняется, по крайней мере, двумя причинами. С одной стороны, кажущаяся простота идеи построения сетевой модели, по-видимому, не привлекла к себе должного внимания крупных теоретиков в области исследования операций и прикладной математики. С другой стороны, попытки решения задачи в постановке, близкой к реальной ситуации осуществления проектов, наталкиваются на огромные трудности.

Прежде всего, широкий круг задач, возникающих в процессе планирования и управления проектами, пока что не formalизован, так как этот процесс определяется большим числом переменных вероятностной и субъективной природы. Кроме того, многие задачи имеют комбинаторный характер, а комбинаторное разнообразие даже сравнительно простых проектов настолько велико, что практически не поддаетсяному исследованию. Статистические параметры сетевой модели определяются аналитическими методами только в самых простых случаях, а применение метода Монте-Карло связано с большими затратами машинного времени. Поэтому до сих по существу даже не поставлены задачи оптимизации сетей с вероятностными оценками, не говоря уже о сетях с вероятностной структурой.

Следует также отметить, что полученные в теории СПУ результаты еще слабо используются на практике. Так, по данным одного американского источника, решение задачи оптимизации по стоимости производится лишь в одном случае применения систем СПУ из ста, хотя существует большое число программ решения этой задачи. Это объясняется, очевидно, тем, что принятые в постановке задачи допущения либо не отражают реальных условий выполнения проектов, либо отсутствует исходная информация, необходимая для решения задачи.

Тем не менее системы СПУ, несмотря на отсутствие развитой, стройной теории и недостаточное использование даже полученных теоретических результатов на практике, зарекомендовали себя как весьма эффективное, весьма универсальное средство организационного управления, а сетевая модель в течение очень короткого времени стала одной из самых распространенных операционных моделей.

Следовательно, дальнейшее развитие теоретических исследований в области СПУ, формирование единой теории СПУ и расширение связи между теорией и практическими приложениями безусловно позволяет получить крупный технико-экономический эффект в самых различных сферах применения систем СПУ, начиная от планирования и управления проектами, охватывающими все народное хозяйство, до небольших проектов, включающих всего несколько десятков операций.

Наиболее существенными направлениями развития теории СПУ в ближайшем будущем, на наш взгляд, являются следующие.

1. Формирование критериев оценки структуры сетей и разработка методов выбора оптимальной в смысле принятого критерия структуры, т. е. синтез оптимальных сетей.

2. Определение и выбор рационального набора характеристик сетевой модели, исходя из параметров проекта, а также усовершенствование методов отыскания заданного набора характеристик.

3. Дальнейшее развитие методов анализа сетей с вероятностными оценками и вероятностной структурой.

4. Уточнение и расширение постановки задач оптимизации на базе сетевых моделей с учетом ограничений по надежности планов в различных аспектах (заданной вероятности выполнения в намеченный срок, заданной вероятности соблюдения утвержденной сметы затрат, заданной вероятности получения принятых технических параметров и т. п.) и ограничений по ресурсам. В этом направлении, очевидно, следует ожидать дальнейшего развития эвристических методов решения указанного класса задач, так как получение точных решений мало вероятно.

5. Развитие теории управления на базе сетевых моделей с привлечением идей и понятий теории автоматического управления. Так, например, интуитивно ясно, что понятия устойчивости, управляемости, чувствительности и целый ряд других понятий автоматики должны фигурировать в системах СПУ, что алгоритмам функционирования систем этого класса необходимо придать более строгую форму. Все эти задачи еще ждут корректирующей постановки и решения.

6. Развитие системного подхода к теории СПУ, т. е. исследование психологических факторов, материальной и моральной заинтересованности, технико-экономической эффективности, связей систем СПУ с другими системами планирования и управления, а также влияния систем СПУ на функционирование организаций в целом.

7. Formalизация и развитие методов принятия решений в рамках систем СПУ.

Поступила в редакцию  
20 января 1966 г.

# ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

## I. Анализ сетей

1. Адельсон-Вельский Г. М., Филлер Ф. М. Программа вычисления сетевых графиков. Журнал вычисл. матем. и математ. физики, т. 5, № 1, 1965.
2. Багриновский К. А., Рабинович И. Б. Постановка задачи анализа сетевого графика. В сб. «Вычислительные системы», вып. 11, Ин-т матем. СО АН СССР, 1964.
3. Брудно А. Л. Грани и оценки для сокращения перебора вариантов. В сб. «Проблемы кибернетики», вып. 10. Изд-во «Наука», 1964.
4. Виленкин С. Я. Определение закона распределения максимального времени (времени критического пути). Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 7, 1965.
5. Голенко Д. И. Теоретико-вероятностные вопросы сетевого планирования по времени. В сб. «Вычислительные системы», вып. 11, Ин-т матем. СО АН СССР, 1964.
6. Жаданов О. К., Кириллов В. В., Коньков В. В. Метод решения задачи управления (планирование и контроль) разработки. Журнал вычисл. матем. и математ. физики, т. 5, № 1, 1965.
7. Зуховицкий С. И., Радчик И. А. Математические методы сетевого планирования. Изд-во «Наука», 1965.
8. Лейфман Л. Я., Петрова А. Т. Некоторые алгоритмы для анализа ориентированных графов. В сб. «Вычислительные системы», вып. 11, Ин-т матем. СО АН СССР, 1964.
9. Майзлин И. Е. Об одном способе поиска информации и его применение при реализации на ЭВМ алгоритма нахождения критического пути. Докл. АН СССР, 1959, № 4, 1964.
10. Майзлин И. Е., Николаева Л. П. Определение на ЭВМ методом статистических испытаний функции распределения времени окончания разработок при сетевом планировании. Техническая кибернетика, № 3, 1965.
11. Михельсон В. С. Нахождение критических путей в сетевых графиках. Экономика и математические методы, т. I, вып. 2, 1965.
12. Пospelov G. S., Teyman A. I. Автоматизация процессов управления разработками больших систем или сложных комплексов. Техническая кибернетика, № 4, 1963.
13. Пospelov G. S., Teyman A. I. Метод логических диаграмм для планирования разработок сложных систем. В сб. «Вычислительные системы», вып. 11. Ин-т матем. СО АН СССР, 1964.
14. Ford L. R. Network Flow Theory. Rand Corp. paper, 1956.
15. Ford L. R., Fulkerson D. R. Maximal Flow through a Network. Canadian J. Math., v. VIII, 1956.
16. Bellman R. On a Routing Problem. Quart. Appl. Math., v. 16, 1956.
17. Kalaba R. On Some Communication Network Problems. Proc. Sympos. Appl. Math., April, 1956.
18. Bellman and Kalaba R. On k-th best Policies. J. Soc. Ind Appl. Math., v. 8, 1960.
19. Kelley J. E., Jr. Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis. Operat. Res., v. 9, No. 4, 1961.
20. Burgess A. R., Kullbrew J. B. Variation in Activity Level on a Cyclical Arrow Diagram. J. Industr. Engng., v. XIII, No. 2, 1962.
21. Malcolm D. G., Roseboom J. H., Clark C. F., Faser W. Application Technique for Research and Development Program Evaluation. Operat. Res., v. 7, No. 5, 1959.
22. Fulkerson D. R. Expected Critical Path Lengths in PERT Networks. Operat. Res., v. 10, No. 6, 1962.
23. Clingen G. T. A Modification of Fulkerson's PERT Algorithm. Operat. Res., v. 12, No. 4, 1964.
24. Clark C. F. The Greatest of a Finite Set of Random Variables. Operat. Res., v. 9, No. 1, 1961.
25. Martin J. J. Distribution of the Time through a Directed Acyclic Network. Operat. Res., v. 13, No. 1, 1965.
26. Charnes A., Cooper W. W., Thompson G. L. Critical Path Analyses Via Chance Constrained and Stochastic Programming. Operat. Res., v. 12, No. 3, 1964.
27. Van Slyke R. M. Monte Carlo Methods and the PERT Problem. Operat. Res., v. 11, No. 5, 1963.
28. Fulkerson D. R. a Network Flow Computation for Project Cots Curves. Manag. Sci., v. 7, No. 2, 1961.
29. Beckwith R. E. A Cost Control Expansion of the PERT System. IRE Trans. Engng. Manag., v. 9, No. 4, 1962.
30. Charnes A., Cooper W. W. A Network Interpretation and a Directed Subdual Algorithm for Critical Path Scheduling. J. Industr. Engng., v. 13, No. 4, 1963.

## II. Преобразование структуры сетей

31. Miller R. W. Schedule, Cost and Profit Control with PERT. Mc. Graw-Hill Book Co., N. Y., 1963.
32. Prostick J. M. Network Integration. IEEE Trans. Engng. Manag., v. 10, No. 2, 1963.
33. Thomas L. Healy. Activity Subdivision and PERT Probability Statements. Operat. Res., v. 9, No. 3, 1961.
34. Parikh Shailendra C., Jewell William S. Decomposition of Project Network. Manag. Sci., No. 3, 1965.

## III. Анализ вероятностных предположений

35. Голенко Д. И. Теоретико-вероятностные вопросы сетевого планирования по времени. В сб. «Вычислительные системы», вып. 11. Ин-т матем. СО АН СССР, 1964.
36. Поступов Г. С., Тейман А. И. Метод логических диаграмм для планирования разработок сложных систем. В сб. «Вычислительные системы», вып. 11. Ин-т матем. СО АН СССР, 1964.
37. Murgay J. E. Consideration of PERT Assumptions. IRE Trans. Engng. Manag., v. 10, No. 3, 1963.
38. McCrimmon K. R. and Ryavec Ch. A. An Analytical Study of the PERT Assumptions. Operat. Res., v. 12, No. 1, 1964.
39. Donaldson W. A. The Estimation of the Mean and Variance of a PERT Activity Time. Operat. Res., v. 13, No. 3, 1965.
40. Coon Helen. Note on Willian A. Donaldson's. The Fstimation of the Mean and Variance of a PERT Activity Time. Operat. Res., v. 13, No. 3, 1965.
41. Welsh D. J. A. Errors Introduced by a PERT Assumption. Operat. Res., v. 13, No. 1, 1965.
42. Clark G. E. The PERT Model for the Distribution of an Activity Time. Operat. Res., v. 10, No. 3, 1962.
43. Lukaszewicz J. On the Estimation of Errors Introduced by Standard Assumption Concerning the Distribution of Activity Duration in PERT Calculations. Operat. Res., v. 13, No. 2, 1965.

## IV. Распределение ресурсов

44. Бурков В. Н., Ловецкий С. Е. Эвристический подход к решению динамических задач распределения ресурсов. Автоматика и телемеханика, № 5, 1966.
45. Зуховицкий С. И., Радчик И. А. Математические методы сетевого планирования. Изд-во «Наука», 1965.
46. Поступов Г. С., Тейман А. И. Автоматизация процессов управления разработками больших систем или сложных комплексов. Техническая кибернетика, № 4, 1963.
47. Разумихин Б. С. Задача об оптимальном распределении ресурсов. Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 7, 1965.
48. Рыбашов М. В., Дудников Е. Е. Решение задачи минимизации стоимости на аналоговых моделях. Техническая кибернетика, № 4, 1964.
49. Fulkerson D. R. A Network Flow Computation for Project Cost Curves. Manag. Sci., v. 7, No. 2, 1961.
50. Kelley J. E. Critical — Path Planning and Schedulding: Mathematical Basis. Operat. Res., v. 9, No. 4, 1961.
51. Clark C. E. The Optimum Allocation of Resources among the Activities of a Network. J. Industr. Engng, v. XII, No. 1, 1961.
52. Berman E. B. Resource Allocation in a PERT Network under Continuous Activity Time — Cost Functions. Manag. Sci., v. 10, No. 4, 1964.
53. Jewell W. S. Risk-Taking in Critical Path Analysis. Manag. Sci., v. 11, No. 3, 1965.
54. Critical — path Scheduling with Resource Levelling on the IBM. 7090 (Gray W. A., Kidd E.), AEC, 1962.
55. Burgess A. R., Kullbrew J. B. Variation in Activity Level on a Cyclical Arrow Diagram. J. Industr. Engng, v. XIII, No. 2, 1962.
56. Jonas Douglas L. Reducing Equipment Needs with CPM. West. Constr., v. 39, No. 11, 1964.
57. Blair Robert J. Critical Path Resources Simulation and Scheduling. IEEE Trans. Engng Manag., v. 10, No. 3, 1963.
58. McGee A. A. and Markarian M. D. Optimum Allocation of Research (Engineering Manpower within a Multi-Project Organizational Structures). IRE Trans. Engng. Manag., v. 9, No. 3, 1962.

59. Fey C. F. Least Cost Estimating and Scheduling with Limited Resources. Abstract. Recent Advances Math. Program, 1963.
60. Levy F. E., Thompson G., West J. Multiship, Multishop, Workloads smoothing Program. Naval Research, Logistics Quarterly, v. 9, No. 1, 1962.
61. Evans David. Resource Allocation. Australian Civil Engng and Constr., v. 5, No. 12, 1964.
62. Lambourn S. Resource Allocation and Multi-Project Scheduling (RAMPS) a New Tool in Planning and Control. Computer J., v. 5, 1963.
63. Jewell S. Divisible Activities in Critical Path Analysis. Operat. Res., v. 13, No. 5, 1965.

V. Дополнительная литература.  
Общие данные по системам СПУ

64. Абрамов С. А., Мариничев М. И., Поляков П. Д. Сетевые методы планирования и управления. Изд-во «Советское радио», 1965.
  65. Зуховицкий С. И., Радчик И. А. Математические методы сетевого планирования. Изд-во «Наука», 1965.
  66. Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления. Изд-во «Экономика», 1965.
  67. Цой С., Рогов Е. И., Горбенко В. Н. Управление и теория графов. Изд-во «Казахстан», Алма-Ата, 1965.
  68. Baker B. N., Eris R. L. On Introduction to PERT CPM. Homewood, Illinois, 1964.
  69. Moder J. P. Project Management with PERT and CPM Reinhold Publishing Corp. Phillips C. R., N. Y., 1964.
  70. Murphy M. M., Stires D. M. Moder Management Methods PERT and CPM. Boston, 1962.
  71. Miller R. W. Schedule, Cost and Profit Control with PERT. Mc Graw-Hill Book Co., N. Y., 1963.
  72. Lockyes K. G. An Introduction to Critical Path Analysis. Isaac Pitman, London, 1964.
  73. Battersby A. Network Analysis for Planning and Scheduling Macmillan, London, 1964.
  74. Law C. E., Lach D. C. Handbook of Critical Path. Montreal, 1965.
  75. Kaufmann A., Desbazeille G. La Méthode du Chemin Critique Application aux programmes de production et d'études de la méthode PERT et de ses variantes. Dunod, Paris, 1964.
- 

## NETWORK PLANNING AND CONTROL THEORY

V. Ya. ALTAEV, V. N. BURKOV, A. I. TEIMAN

Main results of the network planning and control theory in the field of analysis, transformation and optimization of networks are presented.