

Моделирование поведения и интеллекта

УДК 519.71:519.81

© 1998 г. М. З. АРСЛАНОВ, канд. техн. наук
(Институт проблем информатики и управления, Алматы)

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В ТЕОРИИ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

Базовая модель теории активных систем рассматривается во взаимосвязи с теорией бинарных отношений. Исследуются новые методы анализа задачи оптимального согласованного планирования. Показывается существование соответствия между бинарными отношениями и функциями стимулирования, между множествами согласованных планов и множествами максимальных элементов, между сильно согласованными функциями стимулирования и отношениями строгого порядка.

1. Введение

Развитие теории активных систем достигло такого уровня, когда исследуемые в ней постановки, модели и методы становятся полезными не только в практике управления, но и в решении теоретических проблем исследования операций. Установлена взаимосвязь теории активных систем с другими разделами исследования операций. Одним из первых результатов такого рода является доказательство в [1] эквивалентности задачи оптимального согласованного планирования и задачи синтеза оптимальной функции стимулирования соответственно играм Γ_1 и Γ_2 в теории игр с непротивоположными интересами [2]. В работах [3, 4] показана взаимосвязь теории активных систем с теорией коллективного выбора, в работах [5, 6] – с теорией многокритериальной оптимизации.

В настоящей работе рассмотрена базовая модель теории активных систем в ее взаимосвязи с теорией бинарных отношений [7, 8]. Теория бинарных отношений – удобный инструмент для исследования моделей экономического поведения агентов различной природы, обобщение классического представления такого поведения функциями полезности.

Базовая модель двухуровневой активной системы с полной информированностью состоит из центра и n активных элементов. Для наших целей достаточно рассмотреть систему с одним активным элементом. Состояние системы определяется состоянием активного элемента $y \in Y$, где Y – множество его возможных состояний. Центр назначает элементу желательное значение состояния $x \in Y$, элемент в соответствии со своими интересами выбирает свое состояние $y \in Y$. Интересы элемента описываются функцией стимулирования $f(x, y)$, так что принятие им решений заключается в решении оптимизационной задачи

$$f(x, y) \rightarrow \max, \quad y \in Y.$$

Центр при назначении плана $x \in Y$ должен учитывать такое поведение элемента и свои интересы в форме целевой функции центра $\Phi(x, y)$. Кроме того, будем учитывать требование выполнения элементом назначаемого ему плана. Это приводит к следующей задаче оптимального согласованного планирования:

- $$(1) \quad \Phi(x, x) \rightarrow \max, \quad x \in S(f),$$
- $$(2) \quad S(f) = \{x \in Y | f(x, y) \leq f(x, x) \forall y \in Y\},$$

где $S(f)$ – множество x -согласованных планов элемента, при назначении которых ему в силу (2) выгодно их выполнить, т.е. выбрать свое состояние $y \in Y$ равным x .

Непосредственный способ исследования и обобщения базовой модели теории активных систем с помощью теории бинарных отношений заключается во введении на множестве Y бинарного отношения, зависящего параметрически от плана x , т.е. в определении подмножества трехмерного декартова произведения $G \subset Y \times Y \times Y$

$$(3) \quad y >_x z \iff f(x, y) > f(x, z) \iff (x, y, z) \in G.$$

Определенные результаты получены в работах [5, 6]. В частности в [6] рассмотрена модель активной системы с многокритериальной системой стимулирования элемента, которая путем введения соответствующей свертки сводится к активной системе со скалярной функцией стимулирования элемента.

2. Бинарные отношения и сильно согласованные функции стимулирования

Чтобы для решения задачи (1), (2) применять численные методы поиска экстремума, необходимо уметь соответствующим образом (в форме решения системы конечных неравенств) представить множество x -согласованных планов. Задача такого описания (задаче построения множества S) посвящены работы [9, 10]. В них показана возможность конструктивного решения этой задачи для многих классов функций стимулирования, а также для суперпозиций функций стимулирования из более простых.

В работе [1] функция стимулирования представлена двумя составляющими: функцией выигрыша $h(y)$ и функцией штрафа $\chi(x, y)$

$$f(x, y) = h(y) - \chi(x, y),$$

где $\chi(x, x) = 0$. Там же введен в рассмотрение важный класс сильно согласованных функций стимулирования с функциями штрафа, удовлетворяющими неравенству треугольника

$$(4) \quad \chi(x, y) \leq \chi(x, z) + \chi(z, y).$$

Не вдаваясь в подробности, скажем лишь, что такие функции стимулирования гарантируют максимальную эффективность механизма функционирования с процедурой x -согласованного планирования (1), (2).

Введение бинарных отношений на множестве Y посредством (3) выглядит не совсем естественным, поскольку оно громоздко – вводится не одно бинарное отношение, а целое семейство, параметризованное самим множеством Y . Достоинством подобного введения является то, что бинарные отношения $>_x$ являются отношениями строгого порядка.

Напомним, что бинарное отношение R на множестве Y – это подмножество декартова произведения $Y \times Y$, $R \subset Y \times Y$. Мы пишем yRx , если упорядоченная пара $(y, x) \in R$. На множестве бинарных отношений вводятся естественным образом теоретико-множественные операции и отношения: \cap , \cup , \subseteq , \supseteq . Бинарное отношение $>$ называется отношением строгого частичного порядка, если оно удовлетворяет свойствам транзитивности и антирефлексивности

$$\begin{aligned} (y > x) \& \& (x > z) \Rightarrow y > z, \\ \forall y \in Y \quad & \neg(y > y). \end{aligned}$$

В теории активных систем важно само понятие плана и процедуры планирования. С этой точки зрения можно ввести бинарное отношение предпочтения элементом некоторой реализации из множества допустимых состояний назначаемому плану.

Функция стимулирования $f(x, y)$ естественным образом порождает антирефлексивное бинарное отношение R_f на множестве допустимых состояний Y по правилу:

$$(5) \quad yR_fx \iff f(x, y) > f(x, x).$$

Сразу же отметим, что бинарное отношение (5), вообще говоря, не является отношением строгого частичного порядка. Для произвольного антирефлексивного бинарного отношения R на множестве Y существует функция стимулирования $f(x, y)$, порождающая это отношение по правилу (5). Функция

$$(6) \quad f_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } yRx, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

– одна из таких функций. Таким образом, функции стимулирования и антирефлексивные бинарные отношения соответствуют друг другу. Более того, если для отношения R определить множество “максимальных” элементов

$$M(R) = \{x \in Y \mid \forall y \in Y \neg(yRx)\},$$

то оно будет равно множеству x -согласованных планов для соответствующей функции стимулирования, т.е. справедливы теоретико-множественные равенства

$$S(f) = M(R_f), \quad M(R) = S(f_R).$$

Среди бинарных отношений важный класс составляют отношения строгого частичного порядка. Справедлива следующая

Теорема 1. а) *Бинарное отношение $>_f$, порождаемое сильно согласованной функцией стимулирования $f(x, y)$:*

$$y >_f x \iff f(x, y) > f(x, x)$$

является отношением строгого частичного порядка.

б) *Обратно, для любого отношения строгого частичного порядка $>$ на конечном множестве Y существует сильно согласованная функция стимулирования, порождающая данное отношение.*

В случае бесконечного множества Y и отношения строгого частичного порядка $y > x$ на нем для существования порождающей его сильно согласованной функции стимулирования достаточно потребовать существования неотрицательной ограниченной сверху функции $h(y)$, удовлетворяющей условию монотонности:

$$y > x \Rightarrow h(y) > h(x).$$

Для удовлетворения этих условий достаточно, чтобы множество Y было компактом, а отношение $y > x$ – непрерывно [7].

В [7] рассматривается обобщение понятия функции полезности – индикатор 2-го рода – функция $\varphi(x, y)$ на $Y \times Y$, знак которой определяет бинарное отношение P :

$$(7) \quad xPy \iff \varphi(x, y) > 0.$$

Соотношение (7) аналогично (5). Это приводит к следующему определению.

Определение 1. Функция стимулирования $f(x, y)$ называется индикаторной, если $f(x, x) = 0$.

Из любой функции стимулирования $f(x, y)$ можно получить индикаторную следующим образом:

$$(8) \quad f^{ind}(x, y) = f(x, y) - f(x, x).$$

Легко проверить, что $S(f^{ind}) = S(f)$, $R_{f^{ind}} = R_f$. Если $f(x, y)$ – сильно согласованная функция стимулирования, то соответствующая ей индикаторная функция (8) удовлетворяет обратному неравенству треугольника:

$$(9) \quad f^{ind}(x, y) \geq f^{ind}(x, z) + f^{ind}(z, y).$$

Поэтому индикаторную функцию, удовлетворяющую (9), также будем называть сильно согласованной. Справедлива

Лемма 1. Для того, чтобы функция $f(x, y)$ была индикаторной сильно согласованной, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$f(x, y) = \min_{i \in I} (f_i(y) - f_i(x))$$

при некотором наборе функций $f_i(x)$, $i \in I$.

Следствие 1 (разновидность теоремы Душника – Миллера). Пусть $>$ – строгий частичный порядок. Тогда существует набор функций $f_i(x)$; $i \in I$, такой, что

$$(10) \quad y > x \iff \forall i \in I : f_i(y) > f_i(x).$$

3. Квазисогласованные функции стимулирования

Для целей введения на Y отношения строгого частичного порядка достаточно, как показано в теореме 1, порождения их сильно согласованными функциями стимулирования. Однако если рассматривать только задачу реализации, то естественным оказывается понятие квазисогласованной функции стимулирования.

Определение 2. Индикаторная функция стимулирования $f(x, y)$ называется квазисогласованной, если

$$f(x, y) \geq \min (f(x, z), f(z, y)) \quad \forall x, y, z \in Y.$$

Аналогично теореме 1 справедлива

Теорема 2. Для квазисогласованной функции стимулирования $f(x, y)$ порожданное ею бинарное отношение $>_f$ на Y является отношением строгого частичного порядка. Обратно, для любого отношения строгого частичного порядка $>$ на Y существует квазисогласованная функция стимулирования $f(x, y)$ такая, что отношение $>$ совпадает с отношением $>_f$.

В связи с теоремой 2 интерес представляет содержательная интерпретация квазисогласованности в рамках теории активных систем. Напомним, что понятие сильной согласованности связано с оптимальностью механизма функционирования. Отметим, что свойства квазисогласованности и сильной согласованности не следуют одно из другого. В качестве примера рассмотрим следующие две функции стимулирования на $Y = \{a, b, c\}$, представленные в табличной форме:

$(f_1(x, y), f_2(x, y))$	a	b	c
a	$(0, 0)$	$(2, 0)$	$(3, 0)$
b	$(0, -2)$	$(0, 0)$	$(2, 0)$
c	$(0, -3)$	$(0, -2)$	$(0, 0)$

Функция стимулирования $f_1(x, y)$ является квазисогласованной, но не является сильно согласованной. Функция стимулирования $f_2(x, y)$, наоборот, является сильно согласованной, но не является квазисогласованной.

4. Заключение

В настоящей работе установлена взаимосвязь между теорией бинарных отношений и базовой моделью теории активных систем. Теория бинарных отношений позволила по-новому взглянуть на задачу оптимального согласованного планирования, на задачу построения множества согласованных планов $S(f)$, ввести понятие индикаторной функции стимулирования. Естественным, с точки зрения бинарных отношений, оказалось понятие квазисогласованной функции стимулирования, которое порождается задачей реализации отношений строгого частичного порядка. Понятие сильно согласованной функции стимулирования также получило интерпретацию в терминах бинарного отношения строгого частичного порядка. Тем самым продолжено исследование взаимосвязей теории активных систем с другими разделами теории исследования операций.

Автор благодарен А. В. Малишевскому за обсуждение работы и формулировку леммы 1 и следствия 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. а) В самом деле, пусть антирефлексивное бинарное отношение $>_f$ не является отношением строгого частичного порядка. Тогда $>_f$ не транзитивно, т.е. существуют $x', y', z' \in Y$:

$$(11) \quad x' >_f y', \quad y' >_f z', \quad \text{но} \quad \neg(x' >_f z').$$

Противоречие получается из следующей эквивалентной (11) системы неравенств:

$$f(y', x') > f(y', y'), \quad f(z', y') > f(z', z'), \quad f(z', x') \leq f(z', z').$$

Складывая эти неравенства, получим:

$$f(y', x') + f(z', y') > f(y', y') + f(z', x'), \quad \text{т.е.}$$

$$h(x') - \chi(y', x') + h(y') - \chi(z', y') > h(y') + h(x') - \chi(z', x').$$

Отсюда, $\chi(y', x') + \chi(z', y') < \chi(z', x')$, что противоречит сильной согласованности функции стимулирования $f(x, y)$.

б) Для данного отношения строгого частичного порядка $y > x$ рассмотрим функцию стимулирования:

$$(12) \quad f(x, y) = h(y) - \chi(x, y),$$

где $h(y)$ – функция высоты точки y по данному отношению, равная точной верхней грани длин цепей в множестве Y :

$$y_1 < y_2 < \dots < y_k = y,$$

$\chi(x, y)$ – функция штрафа, определяемая формулой:

$$(13) \quad \chi(x, y) = \begin{cases} 0, & y = x, \\ (1 - \varepsilon)(h(y) - h(x)), & y > x, \\ (1 - \varepsilon)(h(y) - h(x)) + \varepsilon H, & \neg(y > x), \quad y \neq x, \end{cases}$$

причем $0 < \varepsilon < 1/H$, где H – максимальная высота точек в Y по отношению $y > x$.

Ясно, что $\chi(x, y) > 0$, если $y > x$. Покажем, что

$$f(x, y) > f(x, x) \iff y > x.$$

Пусть $y > x$. Тогда $h(y) > h(x)$. Поэтому

$$f(x, y) = h(y) - (1 - \varepsilon)(h(y) - h(x)) = h(x) + \varepsilon(h(y) - h(x)) > h(x) = f(x, x).$$

Пусть, наоборот, $f(x, y) > f(x, x)$. Тогда

$$h(y) - \chi(x, y) > h(x), \quad \text{т.е.}$$

$$\chi(x, y) < h(y) - h(x) \leq (h(y) - h(x)) + \varepsilon(H - h(y) + h(x)).$$

Из определения (13) следует, что

$$\chi(x, y) = (1 - \varepsilon)(h(y) - h(x)) \quad \text{и, следовательно, } y > x.$$

Покажем, что функция штрафа (13) удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\chi(x, y) \leq \chi(x, z) + \chi(z, y).$$

Пусть это не так, т.е. существуют $x', y', z' \in Y$:

$$\chi(x', y') > \chi(x', z') + \chi(z', y').$$

Если $y' > x'$, то поскольку $\chi(x, y) \geq (1 - \varepsilon)(h(y) - h(x))$, противоречие получается из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \chi(x', z') + \chi(z', y') &\geq (1 - \varepsilon)(h(z') - h(x')) + \\ &+ (1 - \varepsilon)(h(y') - h(z')) = (1 - \varepsilon)(h(y') - h(x')) = \chi(x', y'). \end{aligned}$$

Если же ($y' > x'$) не выполняется, то невозможно, чтобы одновременно $z' > x$ и $y' > z'$. Пусть, например, $\neg(z' > x')$. Тогда

$$\begin{aligned} \chi(x', z') + \chi(z', y') &= (1 - \varepsilon)(h(z') - h(x')) + \varepsilon H + \chi(z', y') \geq \\ &\geq (1 - \varepsilon)(h(z') - h(x')) + \varepsilon H + (1 - \varepsilon)(h(y') - h(z')) = \\ &= (1 - \varepsilon)(h(y') - h(x')) + \varepsilon H = \chi(x', y'). \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает выполнение неравенства треугольника для $\chi(x, y)$. Тем самым теорема доказана.

Доказательство леммы 1. Функция

$$f(x, y) = \min_{i \in I}(f_i(y) - f_i(x))$$

удовлетворяет обратному неравенству треугольника:

$$(14) \quad f(x, y) \geq f(x, z) + f(z, y) \quad \forall x, y, z \in Y.$$

Кроме того, $f(x, x) = 0$. Поэтому $f(x, y)$ – индикаторная сильно согласованная функция стимулирования. Обратно, если Y – конечное множество, то для любой функции $f(x, y)$, удовлетворяющей обратному неравенству треугольника и равной нулю на диагонали $f(x, x) = 0$, можно указать $|Y|$ скалярных функций $g_1(x), g_2(x), \dots, g_{|Y|}(x)$, таких, что

$$f(x, y) = \min_{i=1, 2, \dots, |Y|} (g_i(y) - g_i(x)).$$

В качестве $g_i(y)$ достаточно взять $f(i, y)$. Прежде всего $f(i, y) - f(i, x) \geq f(x, y)$ в силу (14). Поэтому

$$f(x, y) \leq \min_{i \in Y} (f(i, y) - f(i, x)).$$

Для того, чтобы показать, что здесь на самом деле равенство, достаточно взять $i = x$. Тогда

$$\min_{i \in Y} (f(i, y) - f(i, x)) \leq f(x, y) - f(x, x) = f(x, y).$$

Доказательство следствия 1. В силу теоремы 1 отношение $>$ равно $>_f$ для некоторой сильно согласованной функции стимулирования $f(x, y)$. Последней соответствует индикаторная сильно согласованная функция стимулирования $f^{ind}(x, y) = f(x, y) - f(x, x)$:

$$y > x \iff f^{ind}(x, y) > f^{ind}(x, x) = 0.$$

Отсюда в силу леммы 1 и вытекает (10). Следствие доказано.

Доказательство теоремы 2. Доказательство проведем в два этапа.

1. Пусть $f(x, y)$ – квазисогласованная функция стимулирования. Пусть, кроме того, $y >_f x, z >_f y$. Это значит, что

$$f(x, y) > f(x, x) = 0, \quad f(y, z) > f(y, y) = 0.$$

Тогда и $f(x, z) > \min(f(x, y), f(y, z)) > 0 = f(x, x)$, т.е. $z >_f x$. Транзитивность доказана. Таким образом, $>_f$ – строгий частичный порядок.

2. Пусть $y > x$ – отношение строгого частичного порядка. Возьмем следующую функцию стимулирования:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y > x, \\ 0, & \neg(y > x). \end{cases}$$

Покажем, что $>_f$ совпадает с $>$. Если $y >_f x$, то это значит, что $f(x, y) > f(x, x) = 0$, т.е. $f(x, y) = 1$, и следовательно $y > x$. Если же $y > x$, то $f(x, y) = 1 > f(x, x) = 0$, т.е. $y >_f x$. Осталось показать, что $f(x, y)$ – квазисогласованная функция стимулирования. Предположим, что это не так. Тогда существуют $x, y, z \in Y$, такие, что

$$f(x, z) < \min(f(x, y), f(y, z)).$$

Так как $f(\cdot, \cdot)$ принимает только два значения, то отсюда следует, что

$$f(x, z) = 0, \quad f(x, y) = 1, \quad f(y, z) = 1,$$

т.е. $y > x, z > y$, но $\neg(z > x)$. Полученное противоречие окончательно доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. Горелик В. А., Кононенко А. Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982.
3. Бурков В. Н., Еналеев А. К., Новиков Д. А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // АиТ. 1996. № 3. С. 3–25.
4. Burkov V. N., Enaleev A. K. Stimulation and decision-making in the active system theory // Mathematical social sciences. 1994. No. 27. P. 271–291.
5. Айдарханов М. Б., Арсланов М. З., Мурзахметов А. Б. Согласованная оптимизация в активных системах: многокритериальность, нечеткость, связь с векторной оптимизацией // Проблемы информатики и управления. Алматы: Гылым, 1995.
6. Арсланов М. З. Многокритериальность и согласование в активных системах // АиТ. 1997. № 2. С. 162–168.
7. Юдин Д. Б. Вычислительные методы теории принятия решений. М.: Наука, 1989.
8. Березовский Б. А., Борзенко В. И., Кемпнер Л. М. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. М.: Наука, 1981.
9. Ашимов А. А., Бурков В. Н., Джапаров Б. А., Кондратьев В. В. Согласованное управление активными производственными системами. М.: Наука, 1986.
10. Ашимов А. А., Арсланов М. З., Бурков В. Н., Джапаров Б. А. Свойства и построение множеств согласованных планов // Неопределенность, риск, динамика в организационных системах. М.: ИПУ, 1984.