УДК 519

МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ НА ОСНОВЕ НЕМАНИПУЛИРУЕМЫХ СИММЕТРИЧНЫХ АНОНИМНЫХ ПРОЦЕДУР ГОЛОСОВАНИЯ С ДЕЛЕГИРОВАНИЕМ

В.Н. Бондарик, Н.А. Коргин[1]

Рассмотрена задача распределения ресурсов на основании мнений агентов и допускающая возможность делегирования — когда любой агент может в качестве заявки сообщать не полный вектор распределения, а лишь отдельные его компоненты. Описаны симметричные анонимные обобщенные медианные схемы, дополненные процедурами делегирования, которые могут применяться для решения данной задачи.

Ключевые слова: неманипулируемые механизмы планирования, управление проектами, распределение ресурсов, обобщенные медианные схемы, механизмы последовательного распределения ресурсов.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача распределения ресурсов (например, ограниченного финансирования) в объеме R между m проектами. Финансирование определяется на основании согласования интересов n лиц (агентов) — при этом каждый из агентов может быть заинтересован в определенном распределении объемов финансирования.

Обозначим: множество проектов M, $\#M = m$; множество агентов N, $\#N = n$; множество допустимых вариантов распределения ресурсов

$$A = \{x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}_m^+ | \sum_{j=1}^{m} x_j \leqslant R\}.$$

Заинтересованность агентов описывается их функциями полезности $u_i(x)$: $A \to \mathbb{R}_1$, $i \in N$, причем функция $u_i(x)$ известна лишь самому агенту $i \in N$.

Будем рассматривать случай *сепарабельных однопиковых* функций полезности. Обозначим $\tau_{ji} = \arg\max\limits_{x_j} u_i(x)$ — оптимальное количество ресурсов, которое с точки зрения агента i следует выделить на проект j. Любой агент может быть безразличен к тому, какое количество ресурса следует выделить на отдельные проекты — $\exists k \in M$ $\partial u_i(x)/\partial x_k \equiv 0$. Набор $\tau_i = \{\tau_{ji}\}_{j \in M_i}$ будем называть *точкой пика* агента $n \in N$, где $M_i \subseteq M$ — множество проектов, не безразличных этому агенту.

В работе описывается класс механизмов распределения ресурсов, которые являются *неманипулируемыми* в рамках описанной модели. Речь идет о механизмах, в которых у агентов спрашиваются их предпочтения (точнее, только точки пика), и для каждого агента сообщение истинной информации о своих предпочтениях служит доминантной стратегией (т. е. наилучшим из доступных ему сообщений вне зависимости от того, что сообщают другие агенты). К механизмам будут предъявляться требования *анонимности*, т. е. итоговое распределение ресурсов должно быть симметричным относительно перестановок агентов, и *симметричности* — априори все проекты, на которые нужно распределять ресурсы, одинаково важны, и любые два проекта, при одинаковых заявках на их финансирование со стороны агентов, должны получать одинаковое финансирование.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

«Традиционная» постановка задачи распределения ресурсов представляет собой модель, в которой каждый из агентов заинтересован лишь в получении финансирования для одного своего проекта ($\tau_{ii} \in [0, R]$, $m = n$). Для подобной постановки задачи класс неманипулируемых механизмов достаточно хорошо описан и исследован — см, например, работы [1, 2]. Этот класс условно называется *механизмы последовательного распределения*

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-07-00365-а.

ресурсов (МПРР). В частности, в рамках традиционной постановки было доказано, что существует единственный анонимный неманипулируемый механизм, эффективный по Парето [3, 4], в котором сообщения агентов $\tau_i = \tau_{ii}$, $i \in N$, упорядочивались по возрастанию, после чего распределение ресурсов определялось следующем образом:

$$x_i = \min\left\{\tau_i, \frac{R - \sum_{j<i} x_j}{n-(i-1)}\right\}, \quad i \in N. \qquad (1)$$

Задача распределения ресурсов рассматривалась также в постановке задачи *многокритериальной активной экспертизы* [5] — когда для каждого агента актуально, какое количество ресурсов следует выделить на каждый из проектов. Для каждого агента оптимальное количество ресурсов, выделяемое на отдельный проект, не зависит от того, какое количество ресурсов будет выделено на остальные — такие предпочтения агентов называются *многомерно однопиковыми*. Для данной постановки задачи неманипулируемыми являются механизмы на основе *обобщенных медианных схем* (ОМС). В этих процедурах объем финансирования каждого из проектов определяется независимо (от того, сколько будет выделено ресурсов на другие проекты) на основе *медианной* процедуры голосования, представляющей собой неманипулируемый механизм однокритериальной активной экспертизы. Однако в соответствии с работой [6] данные механизмы не являются эффективными по Парето. Более того, многие из ОМС *недопустимые (нереализуемые)* — они могут давать в качестве результата недопустимое распределение ресурсов (превышающее бюджетное ограничение) даже в том случае, когда агенты сообщают варианты распределения, удовлетворяющие бюджетному ограничению. В статье [7] на основе *блочного метода* анализа реализуемости ОМС (предложенного в работах [8, 9]) были описаны классы анонимных *симметричных* (когда для каждого проекта используется одна и та же процедура голосования) обобщенных медианных схем, которые допустимы в качестве механизма распределения ресурсов. Для симметричных и анонимных ОМС *блочное представление* [9] можно записать следующим образом [7]. Обозначим $\forall z \in [0, R]$ $\Re(z) \in 2^N \backslash \varnothing$ — множество подмножеств N, которые *являются выбирающими правыми коалициями* для данного z при описании обобщенных медианных схем в терминах *семейства систем* выбирающих коалиций (подробнее об этом понятии см. в работах [5, 8—10]). Отрезок $[0, R]$ разбивается на $k \leqslant n$ отрезков $[z_{l-1}, z_l]$, $l \in \{\underline{k}, ..., \bar{k}\}$, $1 \leqslant \underline{k} < \bar{k} \leqslant n$, $z_{\underline{k}-1} = 0$, $z_{\bar{k}} = R$. Причем $\forall l \in \{\underline{k}, ..., \bar{k}\}$, $\forall S \in \Re(z_l)$ $\#S \geqslant l$ и $\forall z \in (z_{l-1}, z_l]$ $\Re(z) = \Re(z_l)$. Иначе говоря, при определении объема финансирования для отдельного проекта $j \in M$ с помощью данной процедуры номер отрезка определяет минимальное число агентов, для которых объем финансирования z не превышает их заявки на финансирование для данного конкретного проекта. Возможно, что для каких-то $l \in \{\underline{k}, ..., \bar{k}\}$ $z_{l-1} = z_l$. Обозначим $B_W = \{B_w\}_{w \in W}$ — разбиение куба $[0, R]^m$ на блоки, где $W = \{w = (w_1, ..., w_m)$: $\forall j \in M$ $w_j \in \{\underline{k}, ..., \bar{k}\}\}$, $B_w = \prod_{j=1}^{m} [z_{w_j-1}, z_{w_j}]$ — отдельный блок. Именно разбиение $B_W = \{B_w\}_{w \in W}$ — описывает *блочное представление* обобщенной медианной схемы. Блочное представление лежит в основе блочного метода анализа реализуемости ОМС при заданном множестве допустимых альтернатив. В частности, для исследуемой задачи распределения ресурсов, ОМС реализуема, если для любого B_w, такого что $\sum_{j=1}^{m} z_{w_j-1} \leqslant R$, но $\sum_{j=1}^{m} z_{w_j} > R$ выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \geqslant (m-1)n + 1. \qquad (2)$$

С помощью данного блочного представления было показано [5], что:

— при $m > n$ существует единственная допустимая симметричная анонимная ОМС, определяемая выражением

$$x_j = \min_{i \in N}(\tau_{ji}), \quad j \in M; \qquad (3)$$

— при $m = n$ любая допустимая симметричная анонимная ОМС определяется выражением

$$x_j = \max\left\{z \in (0, R] \middle| \#\{i \in N | \tau_{ji} \geqslant z\} \geqslant n - \left[\frac{R - z}{R - z_{n-1}}\right]\right\}, \quad z_{n-1} \leqslant R/m, \quad j \in M; \qquad (4)$$

— при $m < n$, любая допустимая симметричная анонимная ОМС должна удовлетворять требованиям: задающая ее система правых выбирающих коалиций $\Re(z)$ разбивает отрезок $[0, R]$ не более чем на $k = \left[\frac{n-1}{m-1}\right] + 1$ частей отрезками $[z_{l-1}, z_l]$, $l \in \{n-k+1, ..., n\}$, $z_{n-k} = 0$, $z_n = R$; для любого индекса $l \in \{n-k+1, ..., n\}$, $\forall S \in \Re(z_l)$ $\#S \geqslant l$ и $\forall z \in (z_{l-1}, z_l]$ $\Re(z) = \Re(z_l)$. При этом z_l, $l \in \{n-k+1, ..., n\}$ должны подбираться так, чтобы для любого B_w, такого что $\sum_{j=1}^{m} z_{w_j-1} \leqslant R$, но $\sum_{j=1}^{m} z_{w_j} > R$, выполнялось условие (2).

Было также показано, что если симметричная анонимная ОМС допустима для распределения ресурсов при некоторых m и n, то она также допустима при $\tilde{m} < m$ и том же n.

Описанный класс допустимых симметричных анонимных ОМС значительно уже всего класса симметричных анонимных ОМС, которые являются неманипулируемыми механизмами коллективного выбора на кубе $[0, R]^m$. Исследуем, можно ли расширить описанный класс путем введения *делегирования* — возможности агентам сообщать заявки на финансирование только части проектов.

В работе [11] было доказано, что любой МПРР может быть представлен в виде ОМС, дополненной *правилом делегирования*, определяющим для каждого агента его заявки относительно объемов финансирования тех проектов, которые ему безразличны. Принципиально для полученного результата, что априори было известно, в каком из проектов заинтересован каждый из агентов. В частности, было показано, что анонимный МПРР представим в виде симметричной ОМС

$$x_i = \max\{z \in [0, R] | \#\{j \in N | \tau_{ij} \geqslant z\} > \max(n + 1 - R/z, 0)\}, \quad i \in N, \qquad (5)$$

дополненной правилом делегирования

$$\tau_{ij} = \min\left\{\tau_i, \frac{R - \tau_j - \sum\limits_{k < i_j} \tau_{kj}}{n - i_j}\right\}, \quad i, j \in N, \qquad (6)$$

где i_j — номер агента i в упорядочении агентов из $N \backslash \{j\}$ в порядке возрастания значений их точек пиков.

В рамках данной работы ответим на следующие вопросы.

Когда в симметричных анонимных ОМС делегирование допустимо?

Какие правила делегирования допустимы для симметричных анонимных ОМС?

Позволяет ли введение делегирования расширить класс симметричных анонимных ОМС, допустимых в качестве механизма распределения ресурсов?

2. ДОПУСТИМОСТЬ ДЕЛЕГИРОВАНИЯ В ОБОБЩЕННЫХ МЕДИАННЫХ СХЕМАХ

Вопрос о том, когда в симметричных анонимных ОМС делегирование допустимо, можно разделить на два уточняющих.

Прежде всего, можно ли допускать делегирование заявок в неманипулируемом механизме, если нет априорной информации о том, какой агент к финансированию каких проектов безразличен? Ответ на него достаточно очевиден — правило делегирования должно обеспечивать допустимые заявки агента — в нашем случае $\sum\limits_{j \in M} \tau_{ji} \leqslant R, \forall i \in N$. Поэтому, любой агент в качестве своего сообщения самостоятельно может выбрать любую из заявок, которая может быть реализована в рамках делегирования. Тем самым, сама возможность делегировать выбор заявок на финансирование ряда проектов не расширяет возможности манипулирования (конечно, при условии, что правило делегирования выбрано корректное, об этом — в следующем параграфе).

Далее, можно ли требовать от агента делегирования сообщения своей заявки по тем проектам, финансирование которых ему не безразлично? Ответ — нельзя. Для обоснования этого ответа рассмотрим простой пример.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $m = 3$. Пусть первый агент имеет представление об оптимальном финансировании первого и второго проектов: $\tau_{11} + \tau_{21} = R$, в то время как второй и третий агенты заинтересованы только в определенном финансировании соответствующих проектов: $\tau_{22}, \tau_{33} \leqslant R$. Более того, с точки зрения первого агента потери от недофинансирования первого проекта гораздо меньше, чем от недофинансирования второго проекта. Каждому агенту разрешено сообщить свои предпочтения лишь по соответствующему проекту: первый по первому, второй по второму, третий — по третьему. Определение своих заявок по другим проектам они обязаны делегировать. Единственный анонимный и симметричный механизм для данной постановки задачи — это МПРР (1), который также может быть представлен в виде ОМС (5) с правилом делегирования (6). Предположим, что $\tau_{11} \leqslant 1/3$, а $1/3 < \tau_{21} < \tau_{22} < \tau_{33}$. В этом случае первый агент, сообщая заявку $s_{11} < \tau_{11}$, уменьшает недофинансирование проекта 2 на $(\tau_{11} - s_{11})/2$, тем самым увеличивая свою полезность. ♦

Таким образом, для произвольной ОМС делегирование допустимо всегда, но только «добровольное» — каждый агент должен иметь возможность принимать решение самостоятельно: делегировать ли механизму определение его заявки на финансирование любого из проектов или сообщить ее самостоятельно.

3. ДОПУСТИМЫЕ ПРАВИЛА ДЕЛЕГИРОВАНИЯ

Определим, какие правила делегирования являются допустимыми в симметричных анонимных ОМС, применяемых в качестве механизмов распределения ресурсов. В работе [12] показано, что в процессе делегирования могут учитываться заявки других агентов. Однако очевидно, что правила делегирования также должны быть анонимными — в них не может учитываться, кто из агентов что сообщает. Допустимые правила должны быть также симметричными, т. е. для любых двух направлений финансирования из тех, для которых агентом делегируется определение его заявки, при одинаковых прочих условиях, учитываемых правилом делегирования, должны определяться одинаковые объемы финансирования в качестве заявки данного агента. По аналогии с требованиями, в соответствии с которыми в работе [11] было получено правило (6), количество ресурсов, которое составляет сумму заявок, определенных правилом делегирования, не должно превышать $R_i = R - \sum_{j \in M_i} \tau_{ji}$ — ресурсов, доступных к делегированию агентом $i \in N$. В то же время, правило делегирования должно обеспечивать сумму заявок делегирующего агента как можно ближе к бюджетному ограничению, если это не противоречит интересам других агентов.

Обозначим $m_i = \#M_i$, $N_j \subseteq N$ — множество агентов, сообщивших свои заявки по проекту $j \in M$, $n_i = \#N_j$.

Утверждение 1. *В симметричной анонимной ОМС, применяемой как механизм распределения ресурсов, любое правило делегирования должно быть представимо в виде*

$$\tau_{ji} = \min\left\{\hat{x}_j, \frac{R_i - \sum_{k<j_i} \tau_{ki}}{m - m_i - j_i}\right\}, \quad i \in N, \quad j \in M \backslash M_i, \quad (7)$$

где $\hat{x}_j$ *определяется только на основании сообщений агентов из* N_j *с помощью анонимной однокритериальной ОМС, а* j_i *— номер проекта из* $M \backslash M_i$ *в упорядочении по возрастанию* $\hat{x}_j$. ♦

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Опишем два «крайних» правила из класса, удовлетворяющих выражению (7). Правило делегирования будем называть *толерантным*, если $\hat{x}_j = \min_{i \in N_j}(\tau_{ji})$. Правило делегирования будет называть *позитивным*, если $\hat{x}_j = \max_{i \in N_j}(\tau_{ji})$.

При применении толерантного правила делегирования любой агент $i \notin N_j$ как бы «не вмешивается» в «конфликт» агентов из N_j, сообщая в качестве своей заявки по проекту j не более чем $\min_{i \in N_j}(\tau_{ji})$. Обозначим $\underline{x}_j$ — объем финансирования для направления $j \in M$, который может быть обеспечен самостоятельно агентами из N_j в рамках заданной ОМС, применяемой для распределения ресурсов (т. е. когда $\forall i \notin Nj\ \tau_{ji} = 0$): $\underline{x}_j = \max\{z \in [0, R] | \{i \in N_j | \tau_{ji} \geqslant z\} \in \Re(z)\}$, где система выбирающих правых коалиций $\Re(z)$ описывает применяемую для распределения ресурсов ОМС. Тогда под конфликтом подразумевается то, что $\underline{x}_j$ может быть больше оптимального финансирования проекта $j \in M$ для некоторых агентов из N_j, т. е. $\underline{x}_j \geqslant \min_{i \in N_j}(\tau_{ji})$. Заявки агентов из $N \backslash N_j$ не меняют множества агентов $S = \{i \in N | \tau_{ji} \geqslant \underline{x}_j\}$, тем самым не изменяя результат выбора по направлению j.

Если же $\underline{x}_j < \min_{i \in N_j}(\tau_{ji})$, то такой «конфликт» отсутствует — финансирование, которое могут обеспечить самостоятельно агенты из N_j, меньше оптимального для любого из них. В этом случае агенты не из множества N_j, благодаря правилу делегирования, позволяют увеличить объем финансирования данного направления не более чем до $\min_{i \in N_j}(\tau_{ji})$, тем самым не инициируя «конфликт».

Позитивное правило делегирования, в отличие от толерантного, максимально влияет на конфликт интересов агентов из N_j, так как при его применении $x_j \geqslant \underline{x}_j$.

Продемонстрируем действия различных правил делегирования на примере.

Пример 2. *Пусть* $n = 5$, $m = 3$. *Обозначим знаком «_» отсутствие предпочтений по данному проекту у агента. Пусть наилучшие объемы финансирования проектов с точки зрения агентов следующие:* $\tau_1 = \{1, \_, \_\}$, $\tau_2 = \{\_, \_, 1/2\}$, $\tau_3 = \{\_, 1/2, \_\}$, $\tau_4 = \{1/4, \_, \_\}$, $\tau_5 = \{\_, 1/3, 1/4\}$. *Для определения распределения ресурсов применяется симметричная анонимная ОМС, допустимая при данных* n и m:

$$x_j = \max\{z \in (0, R] | \#\{i \in N | \tau_{ji} \geqslant z\} \geqslant n - 1\}, \quad j \in M.$$

В рамках данной ОМС по любому из проектов заинтересованные в определенном его финансировании агенты не могут самостоятельно обеспечить выделение на него ненулевого финансирования: $\forall j \in M\ \underline{x}_j = 0$.

Проанализируем, какими будут векторы заявок агентов в зависимости от выбора правила делегирования. Для агента 1, вне зависимости от правила делегирования, возможна единственная заявка $\tau_1 = \{1, 0, 0\}$. Агенты 2 и 3 при любом правиле делегирования, удовлетворяющем выражению (7), будут сообщать $\tau_2 = \{1/4, 1/4, 1/2\}$ и $\tau_3 = \{1/4, 1/2, 1/4\}$.

Для агентов 4 и 5 в зависимости от выбора правила делегирования полные векторы заявок будут разными.

Пусть применяется толерантное правило делегирования. Тогда $\tau_4 = \{1/4, 1/3, 1/4\}$, $\tau_5 = \{1/4, 1/3, 1/4\}$. Векторы заявок по проектам: $\{1, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4\}$ для первого, $\{0, 1/4, 1/2, 1/3, 1/3\}$ для второго и $\{0, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4\}$ для третьего агента. В этом случае результатом выбора будет вектор финансирования $x = \{1/4, 1/4, 1/4\}$.

Пусть применяется позитивное правило делегирования. Тогда $\tau_4 = \{1/4, 3/8, 3/8\}$, $\tau_5 = \{5/12, 1/3, 1/4\}$. Векторы заявок по проектам будут: $\{1, 1/4, 1/4, 1/4, 5/12\}$ для первого, $\{0, 1/4, 1/2, 3/8, 1/3\}$ для второго и $\{0, 1/2, 1/4, 3/8, 1/4\}$ для третьего агента. Но на итоговое распределение финансирования это не повлияет — результатом выбора будет $x = \{1/4, 1/4, 1/4\}$. ♦

Утверждение 1 описывает допустимый класс правил делегирования для симметричных и анонимных ОМС, но не позволяет дать ответ на вопрос, можно ли путем делегирования расширить класс неманипулируемых механизмов распределения ресурсов для рассматриваемой задачи.

4. АНОНИМНЫЕ И СИММЕТРИЧНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ МЕДИАННЫЕ СХЕМЫ, ДОПУСТИМЫЕ КАК МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ С ДЕЛЕГИРОВАНИЕМ

Гарантированным делегированием будем называть ситуацию, когда априори известно, что агенты готовы делегировать определение своих заявок по отдельным проектам. С помощью этого понятия результат, полученный в работе [11], можно сформулировать в форме следующего утверждения.

Утверждение 2. *Класс симметричных анонимных неманипулируемых механизмов распределения ресурсов не расширяется при введении возможности делегирования и может быть расширен только при гарантированном делегировании.* ♦

Иными словами, сама возможность делегирования не позволяет расширить класс неманипулируемых ОМС и, как следствие, обеспечить Парето-эффективность принимаемых решений.

Обозначим $\mu = \min\limits_{i \in N}(m - m_i)$ — *уровень делегирования*, минимальное число проектов, безразличных кому-либо из агентов. Для МПРР $\mu = m - 1$, что является максимальным уровнем делегирования.

Утверждение 3. *Для произвольных m, $n \geqslant 2$ при гарантированном делегировании с уровнем μ, допустимыми в качестве механизмов распределения ресурсов являются ОМС, которые допустимы без гарантированного делегирования при том* же n и $\tilde m = m - \max\{0, \mu - 1\}$.

Следствие. Механизм распределения ресурсов на основе симметричной анонимной ОМС с делегированием для любых $m \geqslant 3$, $n > 2$ может быть Парето-эффективен только при $\mu = m - 1$. ♦

С учетом полученных в этом параграфе и в работе [7] результатов, в зависимости от m, n и μ, допустимы следующие анонимные и симметричные ОМС:

— при $m - \max\{0, \mu - 1\} > n$ существует единственная допустимая симметричная анонимная ОМС, определяемая выражением (3);

— при $m - \max\{0, \mu - 1\} = n$ любая допустимая симметричная анонимная ОМС определяется выражением (4);

— при $m - \max\{0, \mu - 1\} < n$ любая допустимая симметричная анонимная ОМС должна удовлетворять требованиям: задающая ее система правых выбирающих коалиций $\Re(z)$ разбивает отрезок $[0, R]$ не более чем на $\tilde k = \left[\dfrac{n-1}{\tilde m - 1}\right] + 1$ частей отрезками $[z_{l-1}, z_l]$, $l \in \{n - \tilde k + 1, ..., n\}$, $z_{n-\tilde k} = 0$, $z_n = R$, $\tilde m = m - \max\{0, \mu - 1\}$; для любого индекса $l \in \{n - \tilde k + 1, ..., n\}$, $\forall S \in \Re(z_l)$ $\#S \geqslant l$ и $\forall z \in (z_{l-1}, z_l]$ $\Re(z) = \Re(z_l)$. При этом z_l, $l \in \{n - \tilde k + 1, ..., n\}$ должны подбираться так, чтобы для любого набора индексов $\tilde w = \{w_1, ..., w_{\tilde m}\}$, таких что $\sum\limits_{j=1}^{\tilde m} z_{w_j - 1} \leqslant R$, но $\sum\limits_{j=1}^{\tilde m} z_{w_j} > R$, выполнялось условие:

$$\sum_{j=1}^{\tilde m} w_j \geqslant (\tilde m - 1)n + 1.$$

Проиллюстрируем полученный результат примером.

Пример 3. Пусть $n = 5$, $m = 6$. Предположим, что с точки зрения двух агентов оптимально отдать все финансирование на проект 1, оставшихся трех агентов — отдать все финансирование на проект 2. Вектор заявок для проекта 1 будет {1, 1, 0, 0, 0}, для проекта 2 — {0, 0, 1, 1, 1}, для проектов 3—6 — {0, 0, 0, 0, 0}. В этой ситуации делегирования не будет, так как каждый агент требует отдать все доступное финансирование на один проект. Но информация о том, какое максимальное число проектов может быть интересно для любого из агентов, все равно будет влиять на то, какие механизмы допустимо применять для распределения ресурсов.

В отсутствии гарантированного делегирования или при $\mu = 1$ допустима ОМС $x_j = \min\limits_{i \in N}(\tau_{ji})$, $j \in M$. В соответствии с этим механизмом ни на один проект не будет выделено никакого финансирования, так как минимальная заявка на финансирование любого из проектов равна нулю.

Если $\mu = 2$, то любая допустимая ОМС описывается как

$$x_j = \max\left\{z \in (0, R] \middle| \#\{i \in N | \tau_{ji} \geqslant z\} \geqslant 5 - \left[\frac{R - z}{R - z_{n-1}}\right]\right\},$$
$$z_{n-1} \leqslant R/5, \quad j \in M.$$

При любом механизме, на основе такой ОМС при рассматриваемых мнениях агентов об оптимальном распределении финансирования ни на один проект также не будет выделено никакого финансирования, так как для этого необходимо, чтобы минимум четыре агента просили ненулевое финансирование для проекта.

Если $\mu = 4$, то любая допустимая ОМС задается разбиением $[0, R]$ не более чем на три части последовательностью $\{z_l\}_{l \in \{2, 3, 4, 5\}}$, $z_2 = 0$, $z_3 = R/3 - y$, $z_4 = R/3 - 2y$, $z_5 = R$, $y \in [0, R/3]$. В рамках нашего примера финансирование будет выделено только на проект 2 в объеме $x_2 = R/3 - y$.

Если $\mu = 5$, то любая допустимая ОМС задается разбиением $[0, R]$ не более чем на 5 частей неубывающей последовательностью $\{z_l\}_{l \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$, такой что $z_0 = 0$, $z_1 + z_4 \leqslant R$, $z_2 + z_3 \leqslant R$, $z_5 = R$.

В этом случае на проект 1 будет выделяться финансирование в объеме z_2, на проект 2 — в объеме z_3. Если в ОМС $z_2 + z_3 = R$, то финансирование будет полностью распределено между проектами 1 и 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют конструировать механизмы распределения ресурсов для следующей ситуации. Необходимо принимать решение о распределении ресурсов на основании мнений агентов. Каждый агент может быть заинтересован в том, чтобы итоговое финансирование отдельных (быть может, всех) проектов было как можно ближе к оптимальному с его точки зрения. И эта заинтересованность формализуется в виде сепарабельных однопиковых предпочтений.

Для случая, когда априори все направления выделения ресурсов равнозначны, а мнения всех агентов равноценны, показано, что любой неманипулируемый механизм представим в виде обобщенной медианной схемы с правилом делегирования на основе механизмов последовательного распределения ресурсов.

Основной результат заключается в том, что при переходе от многомерно-однопиковых к сепарабельным и однопиковым предпочтениям, принципиальный вид неманипулируемых механизмов не меняется, дополняясь лишь процедурой делегирования. Класс допустимых процедур был также описан — было показано, что он основан на механизмах последовательного распределения ресурсов.

Важным представляется тот факт, что для определения вида допустимых ОМС большую роль играет не то, какое число проектов предлагается для финансирования, а то, каково максимальное число проектов, в определенном финансировании которых может быть заинтересован один агент. Чем меньше это число, тем менее строгим становятся требования, предъявляемые к согласованности мнений агентов относительно того, каким должно быть распределение. Выполнение этих требований необходимо, чтобы хоть какое-то финансирование могло быть выделено хотя бы на один проект.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Правило делегирования (6) отвечает всем перечисленным требованиям, но оно работает в условиях, когда $\forall j \in M\ n_j \leqslant 1$, т. е. в определенном финансировании каждого из проектов заинтересован не более чем один агент. Для случая, когда $\exists j \in M\ n_j > 1$ необходимо уточнить, как именно должна будет определяться заявка делегирующего агента. В силу требования симметричности, изначально ресурсы доступные к делегированию агентом $i \in N$ $R_i = R - \sum\limits_{j \in M_i} \tau_{ji}$, должны поровну распределяться между направлениями из $M \backslash M_i$, т. е. первоначально для каждого проекта из $M \backslash M_i$ доступно $\dfrac{R - \sum\limits_{k \in M_i} \tau_{ki}}{m - m_i}$ ресурсов. Это количество сопоставляется с величиной $\hat{x}_j$, которая должна определяться на основании заявок агентов из N_j. При этом, в ситуации, когда $\forall j \in M\ n_j \leqslant 1$, с учетом единственности анонимного МПРР, правило делегирования должно быть эквивалентно правилу (6). Откуда получаем, что правило делегирования должно иметь вид (7).

Определим допустимые $\hat{x}_j$. В соответствии с работой [12], величина $\hat{x}_j$ должна быть неманипулируемой по заявкам агентов из N_j. С учетом требования, что мнение агентов из N_j должно учитываться при определении заявок делегирующих агентов для данного направления, получаем, что $\hat{x}_j \in [\min\{\tau_{ji}\}_{i \in N_j},\ \max\{\tau_{ji}\}_{i \in N_j}]$, т. е. правило делегирования должно быть медианной схемой. С учетом требования анонимности механизма распределения ресурсов — анонимной медианной схемой. Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. При отсутствии гарантированного делегирования возможна ситуация, когда несколько агентов, или даже все, сообщают свои заявки на финансирование всех проектов; т. е. ОМС, используемая в качестве механизма распределения ресурсов, должна быть реализуемой в случае многомерно-однопиковых предпочтений агентов. Отсюда следует, что при введении возможности делегирования класс симметричных анонимных механизмов распределения ресурсов не расширяется. Поскольку ОМС (5) не является допустимой в случае многомерно-однопиковых предпочтений при $m = n > 2$, то вывод о том, что с введением гарантированного делегирования класс симметричных анонимных неманипулируемых механизмов распределения ресурсов может быть расширен, очевиден.

Доказательство утверждения 3. С помощь блочного подхода было показано, что для любого блока B_w из блочного разбиения куба $[0,\ R]^m$, порождаемого ОМС, такого что $\sum\limits_{j=1}^{m} z_{w_j - 1} \leqslant R$, но $\sum\limits_{j=1}^{m} z_{w_j} > R$, при отсутствии делегирования должно быть выполнено условие (2). Проанализируем, как трансформируется это условие при введении гарантированного делегирования.

Определим, какое минимальное число агентов допустимо для выбора ненулевого финансирования при заданных m, $n \geqslant 2$ и $\mu \geqslant 2$. Пусть для одного проекта все агенты просят финансирование в объеме $R - \varepsilon$. Тогда сумма допустимых заявок любого из агентов по другим проектам не должна превышать ε. В отсутствие делегирования нереализуемый результат мог быть получен, если каждый агент распределял эту величину между $m - 2$ проектами, сообщая заявку $\varepsilon/(m - 2)$, а минимальное число агентов q, которое позволяет выбрать ненулевое финансирование проекта, не удовлетворяло условию $q(m - 1) \geqslant n(m - 2) + 1$. Аналогично, если задан минимальный уровень делегирования μ, то эту же величину любой агент может распределить между $m - \mu - 1$ проектами, сообщая заявку $\varepsilon/(m - \mu - 1)$. Чтобы такой уровень финансирования не мог быть назначен всем $m - 1$ проектам, необходимо и достаточно, чтобы минимальное число агентов $\tilde{q}$, которое позволяло бы выбрать ненулевое финансирование проекта при данном уровне делегирования, удовлетворяло условию $\tilde{q}\,(m - \mu) \geqslant n(m - \mu - 1) + 1$. Отсюда получаем $\tilde{q} \geqslant n - \left[\frac{n-1}{m-\mu}\right]$, что эквивалентно q для $\tilde{m} = m - \max\{0, \mu - 1\}$, того же n и отсутствия делегирования. Данный результат означает, что для «крайних» блоков с индексами $w = \{\exists! l \in M : w_l = n, \forall j \in M \backslash \{l\}\ w_j = \tilde{q}\}$, которые всегда являются граничными, условие (2) принимает следующий вид. Для любого $\tilde{M} \subset M$ такого что $\#\tilde{M} = \tilde{m}$ и $l \in \tilde{M}$:

$$\sum_{j \in \tilde{M}} w_j \geqslant (m - \mu)n + 1 = (\tilde{m} - 1)n + 1.$$

Кроме того, полученный результат означает, что допустимая ОМС может порождаться системой правых выбирающих коалиций $\Re(z)$, разбивающих отрезок $[0, R]$ не более чем на $\left[\frac{n-1}{\tilde{m}-1}\right] + 1$ частей отрезками $[z_{l-1}, z_l]$, $l \in \{\tilde{q}, ..., n\}$, $z_{\tilde{q}-1} = 0$, $z_n = R$.

Определим, какой максимальный объем финансирования $z_{\tilde{q}}$ может быть выделен на отдельный проект при голосовании за него минимально допустимым числом агентов $\tilde{q}$. Пусть $\forall i \in N$, $\#M_i = m - \mu$ и $\forall j \in M_i$ $\tau_{ji} = z_{\tilde{q}}$. Пусть $\overline{m} = \{j \in M : x_j = z_{\tilde{q}}\}$. Тогда максимально допустимое значение $\overline{m}$ определяется условиями $\overline{m}\,\tilde{q} \leqslant n(\tilde{m} - 1) \leqslant (\overline{m} + 1)$.

Учитывая, что определение $z_{\tilde{q}}$ актуально только при $\tilde{m} \geqslant n$, получаем

$$\overline{m} \leqslant \tilde{m} + \frac{n - \tilde{m}}{n(\tilde{m}-1)-(n-1)} \leqslant \overline{m} + 1.$$

Тогда максимальное число проектов, для которых не менее $\tilde{q}$ агентов могут попросить $z_{\tilde{q}} - \tilde{m}$. Следовательно, $z_{\tilde{q}} \leqslant R/\tilde{m}$, что также соответствует требованиям к симметричным анонимным ОМС, допустимым для распределения ресурсов при $\tilde{m} \geqslant n$.

По аналогии с крайним блоком и значением $z_{\tilde{q}}$, нетрудно получить, что остальные z_l, $l \in \{\tilde{q}, ..., n\}$, следует определять следующим образом. Для любого набора индексов $\tilde{w} = \{w_1, ..., w_{\tilde{m}}\}$, таких что $\sum_{j=1}^{\tilde{m}} z_{w_j - 1} \leqslant R$, но $\sum_{j=1}^{\tilde{m}} z_{w_j} > R$, должно выполняться условие:

$$\sum_{j=1}^{\tilde{m}} w_j \geqslant (\tilde{m} - 1)n + 1.$$

Это означает, что при заданных m, $n \geqslant 2$ и $\mu \leqslant m - 1$ симметричная анонимная ОМС допустима для распределения ресурсов тогда и только тогда, когда она является допустимой для того же n и $\tilde{m} = m - \max\{0, \mu - 1\}$. Утверждение 3 доказано.

Доказательство следствия. ОМС могут быть эффективными по Парето при $n > 2$ только при $m \leqslant 2$ (см, например [6]). Из утверждения 3 следует, что при $\mu = m - 1$ допустимыми для распределения ресурсов являются ОМС, которые являются допустимыми при $\tilde{m} = 2$ в отсутствие делегирования. Откуда получаем, что при $\mu = m - 1$ возможно обеспечение Парето эффективности распределения ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2007. — 584 с.
2. *Коргин Н.А.* Эквивалентность и неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов // Управление большими системами. — 2009. — № 26. 1. — С. 319—347.
3. *Sprumont Y.* The division problem with single-peaked preferences: A characterization of the uniform rule // Econometrica. — 1991. — Vol. 59. — P. 509—519.
4. *Модели* и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике / В.Н. Бурков, И.И. Горгидзе, Д.А. Новиков и др. — М.: ИПУ РАН, 1997. — 61 с.
5. *Бурков В.Н., Искаков М.Б., Коргин Н.А.* Применение обобщенных медианных схем для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы // Проблемы управления. — 2008. — № 4. — С. 38—47.
6. *Nehring K., Puppe C.* Efficient and strategy-proof voting rules: A characterization // Games and Economic Behavior. — 2007. — Vol. 59, iss. 1. — P. 132—153.
7. *Бондарик В.Н., Коргин Н.А.* Применение блочного метода для определения допустимых неманипулируемых механизмов активной экспертизы при решении задачи распределения ресурсов // Системы управления и информационные технологии. — 2012.
8. *Коргин Н.А.* Анализ реализуемости результатов многокритериальной экспертизы — применение «свойства пересечения» // Проблемы управления. — 2009. — № 6. — С. 18—27.
9. *Korgin N.* Algorithmic Verification of Feasibility for Generalized Median Voter Schemes on Compact Ranges // Proc. of the 18th World Congress of the IFAC, Milan, Italy, August 29 — September 2, 2011. — P. 824—829.
10. *Barberá S.* Strategy-proof social choice / In: Arrow K.J., Sen A.K., Suzumura K. (Eds.), Handbook of Social Choice and Welfare. — 2006. — Vol. 2.
11. *Коргин Н.А.* Представление механизма последовательного распределения ресурсов как неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 36. — С. 186—208.
12. *Berga D.,* Strategy-proofness and single-plateaued preferences // Mathematical Social Sciences. — 1998. — Vol. 35, iss. 2. — P. 105—120.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Бондарик Владимир Николаевич — канд. техн. наук, зав. кафедрой, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный, ☎ (499) 197-12-31,

Коргин Николай Андреевич — канд. техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 335-60-37, ✉ nkorgin@ipu.ru.