В.И.Опойцев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

Под децентрализованной системой будем понимать модель, описанную в [I]. Такие модели, в частности, возникают при использовании в экономических или организационных системах принципа согласованного управления [2]. Напомним вкратце постановку задачи.

Система состоит из взаимосвязанных элементов A_i, где

$$i \in I = \{ i \mid i = 1, 2, \ldots, n \}.$$

Каждый элемент A_i распоряжается выбором скалярной величины $x_i \in [v_i^0, w_i^0]$. Для любого допустимого набора

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

существует однозначно определяемая величина

$$\hat{x}_i = \omega_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \omega_i(x) \in [v_i^0, w_i^0],$$

называемая положением цели элемента A_i.

Введение аксиомы индикаторного поведения [I], в зависимости от дискретного или непрерывного характера функционирования системы, приводит к необходимости изучения одной из следующих процедур:

$$x^{k+1} = x^k + \Gamma_k(\Omega x^k - x^k), \tag{I}$$

$$\dot{x} = \Gamma(t)(\Omega x - x), \tag{2}$$

где $\Omega x = \{\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)\}$, $\Gamma_k = diag(\gamma_1^k, \ldots, \gamma_n^k)$
$\forall i, k : 0 \leq \gamma_i^k \leq 1$, $\Gamma(t) = diag(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$,
$\forall i, t : \gamma_i(t) \geq 0$.

Помимо этого, при изучении сходимости (I) или (2) к положению равновесия $x^* (x^* = \Omega x^*)$ рассматриваются только невырожденные траектории [I], что приводит к дополнительным ограничениям на последовательности $\{\gamma_i^k\}$ и функции $\gamma_i(t)$

В работе [I] выделены два класса систем (гомогенные системы и системы ОМВ (с ограниченным межэлементным взаимодействием))и для них доказана устойчивость[x)] процедур (I),(2). В настоящей заметке приводится ряд результатов, касающихся ослабления ограничений на оператор Ω, а также изменения предположений относительно поведения элементов A_i. Часть результатов дается без доказательств, как правило, в силу их простоты или громоздкости.

I. Гетерогенные системы

Введенное в [I] понятие гомогенности системы охватывает достаточно широкий класс реальных примеров. Однако, часть задач не охватывается классом гомогенных систем. Сюда можно отнести, например, модели биоценозов, содержащие подсистемы типа "хищник-жертва", или рыночные модели со смешанными товарами (для одних товаров имеет место валовая заменимость, для других - валовая дополнительность). Вместе с тем, как правило, для таких моделей сохраняется одно из существенных свойств гомогенных систем, состоящее в постоянстве знака $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$ $(i \neq j)$ независимо от x. В дальнейшем системы, удовлетворяющие условию (для простоты рассматривается случай дифференцируемых функций $\omega_i(x)$),

$$\forall x \in [v^o, w^o]: sign \frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x_j} = const , \qquad (3)$$

будем называть гетерогенными.[xx)]

---

x/ Хотя в теоремах [I] речь идет о сходимости, по существу доказывается устойчивость.

xx/ для гомогенности, в дополнение к (3), требуется

$$\forall p \neq q , i \neq j : sign \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = sign \frac{\partial \omega_p}{\partial x_q}$$

Условие (3) оказывается слишком слабым, чтобы обеспечить устойчивость системы. Поэтому в классе гетерогенных систем устойчивы лишь некоторые подклассы. Для удобства их описания введем бинарные отношения $\oplus$ и $\ominus$ между элементами $\mathcal{A}_i$ так, что

$$\mathcal{A}_i \oplus \mathcal{A}_j \Rightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \geqslant 0 \; ; \; \mathcal{A}_i \ominus \mathcal{A}_j \Rightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \leqslant 0 .$$

Накладывая ту или иную систему аксиом на бинарные отношения $\oplus$ и $\ominus$, удобно выделять те или иные подклассы гетерогенных систем. Приведем для примера один простой результат.

Теорема I. Пусть непрерывный оператор Ω гетерогенной системы отображает конусный отрезок $[v^o, w^o]$ в себя и имеет на $[v^o, w^o]$ единственную неподвижную точку x^* Пусть, кроме того, отношения $\oplus$, $\ominus$ симметричны, т.е.

$$\mathcal{A}_i \oplus \mathcal{A}_j \Longleftrightarrow \mathcal{A}_j \oplus \mathcal{A}_i \, ; \; \mathcal{A}_i \ominus \mathcal{A}_j \Longleftrightarrow \mathcal{A}_j \ominus \mathcal{A}_i \, , \tag{4}$$

отношение $\oplus$ транзитивно:

$$\mathcal{A}_i \oplus \mathcal{A}_j \, , \; \mathcal{A}_j \oplus \mathcal{A}_k \Rightarrow \mathcal{A}_i \oplus \mathcal{A}_k \, , \tag{5}$$

а также

$$\mathcal{A}_i \ominus \mathcal{A}_j \, , \; \mathcal{A}_j \ominus \mathcal{A}_k \Rightarrow \mathcal{A}_i \oplus \mathcal{A}_k \tag{6}$$

Тогда любая невырожденная траектория итерационной процедуры (I) сходится к x^* независимо от начального положения $x^o \in [v^o, w^o]$.

Доказательство. Легко видеть, что система аксиом (4)-(6) приводит к разбиению множества индексов I на два подмножества Q и $S (Q \cap S = \emptyset$, $Q \cup S = I)$ таких, что

$$\forall i, j \in Q : \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \geqslant 0 \; ; \; \forall i \in Q \, , \, j \in S : \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \leqslant 0 \, ,$$

$$\forall i, j \in S : \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \geqslant 0 \; ; \; \forall i \in S \, , \, j \in Q : \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \leqslant 0 \, .$$

Если теперь в $\overset{+}{R^n}$ ввести полуупорядоченность с помощью конуса $R^n(\overset{+}{Q}, \bar{S})$ (где $R^n(\overset{+}{Q}, \bar{S})$ - ортант, точки которого имеют координаты $x_i \geqslant 0$, если $i \in Q$, и $x_i \leqslant 0$, если $i \in S$), то оператор Ω будет монотонным.

После этого можно применять доказательство теоремы I работы [I] ,понимая при этом под знаком $\geqslant$ полуупорядоченность,определяемую конусом $R^n(\overset{+}{Q},\bar{S})$, а не R^n_+ , и выбирая вместо исходных точек v^o, w^o точки a^o, b^o, где

$$\forall i \in Q: a_i^o = v_i^o \; , \; b_i^o = w_i^o \, ,$$

$$\forall i \in S: a_i^o = w_i^o \; , \; b_i^o = v_i^o \, .$$

Совершенно аналогичным образом (сведением к теореме 3 [I])доказывается **следующая теорема.**

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы.Тогда любая невырожденная траектория процедуры (2) сходится к x^* независимо от начального положения $x^o \in [v^o, w^o]$.

Приведем еще один результат,в котором сужение на классе гетерогенных систем производится несколько иным способом. Пусть полуупорядоченность определяется некоторым ортантом, например неотрицательным R^n_+, и пусть $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, где оператор Ω_1 монотонный [3] , а Ω_2 - антимонотонный. В случае,когда,например,для всех x может иметь место только одно из условий

$$\frac{\partial \omega_i^1(x)}{\partial x_j} \geqslant 0 \, , \; \frac{\partial \omega_i^2(x)}{\partial x_j} = 0 \qquad (7)$$

или

$$\frac{\partial \omega_i^1(x)}{\partial x_j} = 0 \, , \; \frac{\partial \omega_i^2(x)}{\partial x_j} \leqslant 0 \, , \qquad (8)$$

система будет гетерогенной.Условия (7),(8),однако, не фигурируют в следующей теореме,поэтому она выделяет класс систем,выходящий за рамки гетерогенных,но пересекающийся с ними.

<u>Теорема 3.</u> Пусть непрерывный оператор $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ отображает конусный отрезок $[v^o, w^o]$ в себя. Пусть

$$\Omega_1 v^o + \Omega_2 w^o \geqslant v^o , \qquad (9)$$

$$\Omega_1 w^o + \Omega_2 v^o \leqslant w^o \qquad (10)$$

и система
$$\begin{cases} v^* = \Omega_1 v^* + \Omega_2 w^* \\ w^* = \Omega_1 w^* + \Omega_2 v^* \end{cases} \qquad (11)$$
имеет единственное решение $v^* = w^* = x^* \in [v^0, w^0]$.

Тогда любая невырожденная траектория процедуры (1) сходится к x^* независимо от начального положения $x^0 \in [v^0, w^0]$

Доказательство. Процедура (1) в данном случае имеет вид
$$x^{k+1} = (E - \Gamma_k + \Gamma_k \Omega_1) x^k + \Gamma_k \Omega_2 x^k \quad . \qquad (12)$$
Сопоставим (12) итерационный процесс
$$\begin{cases} v^{k+1} = (E - \Gamma_k + \Gamma_k \Omega_1) v^k + \Gamma_k \Omega_2 w^k , \\ w^{k+1} = (E - \Gamma_k + \Gamma_k \Omega_1) w^k + \Gamma_k \Omega_2 v^k . \end{cases} \qquad (13)$$
В силу (9),(10), а также монотонности Ω_1 и антимонотонности Ω_2, имеем
$$v^1 - v^0 = \Gamma_0 (-v^0 + \Omega_1 v^0 + \Omega_2 w^0) \geqslant 0 ,$$
$$w^1 - v^1 = (E - \Gamma_0)(w^0 - v^0) + \Gamma_0 (\Omega_1 w^0 - \Omega_1 v^0) + \Gamma_0 (\Omega_2 v^0 - \Omega_2 w^0) \geqslant 0 ,$$
$$w^0 - w^1 = \Gamma_0 (w^0 - \Omega_1 w^0 - \Omega_2 v^0) \geqslant 0 .$$
Откуда
$$v^0 \leqslant v^1 \leqslant w^1 \leqslant w^0 .$$
При этом для вновь полученных точек v^1, w^1 сохраняются свойства (9),(10). Действительно,
$$-v^1 + \Omega_1 v^1 + \Omega_2 w^1 \geqslant -v^1 + \Omega_1 v^0 + \Omega_2 w^0 =$$
$$= (E - \Gamma_0)(-v^0 + \Omega_1 v^0 + \Omega_2 w^0) \geqslant 0 ,$$
$$w^1 - \Omega_1 w^1 - \Omega_2 v^1 \geqslant w^1 - \Omega_1 w^0 - \Omega_2 v^0 =$$
$$= (E - \Gamma_0)(w^0 - \Omega_1 w^0 - \Omega_2 v^0) \geqslant 0 .$$
Это позволит индуктивно продолжить процесс доказательства и получить цепочку неравенств:
$$v^0 \leqslant v^1 \leqslant \ldots \leqslant v^k \leqslant \ldots \leqslant w^k \leqslant \ldots \leqslant w^1 \leqslant w^0 . \qquad (14)$$
Таким образом, последовательность v^k монотонно возрастает и ограничена, а w^k – монотонно убывает и ограничена. Поэтому $v^k \to v^*$, $w^k \to w^*$. В силу единственности решения (11) $v^* = w^* = x^*$.

Отметим,наконец, что $\vartheta^k \leqslant x^k \leqslant w^k$.Это легко доказывается по индукции.В самом деле, $\vartheta^0 \leqslant x^0 \leqslant w^0$.Далее по индукции, $\vartheta^k \leqslant x^k \leqslant w^k$,

$$\vartheta^{k+1} = (E - \Gamma_k + \Gamma_k \Omega_1)\vartheta^k + \Gamma_k \Omega_2 w^k \leqslant (E - \Gamma_k + \Gamma_k \Omega_1)x^k + \Gamma_k \Omega_2 x^k =$$
$$= x^{k+1} \leqslant (E - \Gamma_k + \Gamma_k \Omega_1) w^k + \Gamma_k \Omega_2 \vartheta^k = w^{k+1}.$$

Последовательность x^k оказывается зажатой между ϑ^k и w^k ,сходящимися к одному и тому же пределу x^* ,поэтому $x^k \to x^*$.Теорема доказана.

Замечание.Теорема останется справедливой,если условия (9),(I0) заменить условиями

$$\Omega_1 \vartheta^0 + \Omega_2 w^0 \geqslant w^0, \tag{I5}$$

$$\Omega_1 w^0 + \Omega_2 \vartheta^0 \leqslant \vartheta^0, \tag{I6}$$

а систему (II) - системой

$$\begin{cases} \Omega_1 \vartheta^* + \Omega_2 w^* = w^* \\ \Omega_1 w^* + \Omega_2 \vartheta^* = \vartheta^* \end{cases} \tag{I7}$$

Доказательство аналогично предыдущему.Надо лишь вместо (I3) взять итерационный процесс

$$\begin{cases} \vartheta^{k+1} = (E + \Gamma_k \Omega_1)\vartheta^k + (\Gamma_k \Omega_2 - \Gamma_k) w^k \\ w^{k+1} = (E + \Gamma_k \Omega_1) w^k + (\Gamma_k \Omega_2 - \Gamma_k)\vartheta^k \end{cases} \tag{I8}$$

Легко заметить,что общая схема доказательства теоремы 3 совпадает со схемой доказательства теоремы 2 работы [I] . Аналогичная связь имеется между следующей теоремой,приводимой без доказательства,и теоремой 4 работы [I] .

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3.Тогда любая невырожденная траектория процедуры (2) сходится к x^* независимо от начального положения $x^0 \in [\vartheta^0, w^0]$.

2.Стохастическое поведение

Если мы доказываем сходимость (I) или (2) в указанных выше предположениях относительно последовательностей $\{\Gamma_k\}$

или функций $\Gamma(t)$,то мы получаем зачастую гораздо больше,чем того требует конкретный смысл задачи. Может оказаться,что множество несходящихся траекторий чрезвычайно мало по сравнению с множеством сходящихся. Тогда,учитывая независимый характер действий элементов,систему можно было бы считать в некотором смысле устойчивой. В этом плане вполне приемлемым представляется предположение о том,что величины γ_i^k или функции $\gamma_i(t)$ являются случайными [4] с некоторыми плотностями распределения $p_i(\gamma_i)$,соответственно $\tilde{p}_i(\gamma_i)$ (для простоты $\gamma_i(t)$ считается стационарной функцией). Доказательство в этих предположениях сходимости (I) или (2) с вероятностью I будет как раз означать, что множество несходящихся траекторий имеет нулевую меру.

Так,например,высказанное в [I] предположительное утверждение о"сходимости невырожденных траекторий положительно гомогенной системы к множеству положений равновесия" для случая независимых случайных действий элементов сравнительно легко доказывается.

<u>Теорема 5.</u> Пусть непрерывный оператор Ω положительно гомогенной системы отображает конусный отрезок $[v^o, w^o]$ в себя. Пусть также

$$\forall i: \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_i \tilde{p}_i(\gamma_i) d\gamma_i = \int_0^1 \gamma_i p_i(\gamma_i) d\gamma_i > 0.$$

Тогда любая траектория процедуры (I) сходится к одной из равновесных точек $x^* \in [v^o, w^o]$ (в зависимости от реализации),в которой $\Omega x^* = x^*$.

При изучении ансамблей динамических систем такую же роль, как при изучении отдельных динамических систем,играет понятие локальной устойчивости,выделяющее в особый класс линейные системы,для которых

$$\Omega x = Ax + b ,$$

где A - квадратная матрица.

Для удобства формулировки следующего результата введем матрицы

$$M = \int_0^1 \gamma P(\gamma) d\gamma = diag(m_1, \ldots, m_n), \quad 0 < m_i < 1,$$

$$\tilde{M} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \tilde{P}(\gamma) d\gamma = diag(\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_n), \quad \tilde{m}_i > 0,$$

где $P(\gamma) = diag(p_1(\gamma), \ldots, p_n(\gamma))$, $\tilde{P}(\gamma) = diag(\tilde{p}_1(\gamma), \ldots, \tilde{p}_n(\gamma))$.

Теорема 6. Для сходимости процедуры (с невырожденной матрицей $A-E$)

$$x^{k+1} = x^k + \Gamma_k (Ax^k + b - x^k) \tag{19}$$

с вероятностью I к равновесной точке $x^*(Ax^* + b = x^*)$, достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $E-M+MA$ были по модулю меньше 1.

Теорема 7. Для сходимости непрерывной процедуры (с невырожденной матрицей $A-E$)

$$\dot{x} = \Gamma(t)[(A-E)x + b] \tag{20}$$

с вероятностью I к равновесной точке $x^*(Ax^* + b = x^*)$ достаточно, чтобы $\forall j: Re\,\lambda_j < 0$, где λ_j – собственные значения матрицы $\tilde{M}(A-E)$.

В практическом отношении теоремы 6 и 7 представляются не совсем удовлетворительными, поскольку, несмотря на приемлемость гипотезы о стохастическом характере поведения элементов, трудно рассчитывать на то, что матрица M (или $\tilde{M}$) будет известна исследователю (хотя объективно она существует). По этой причине было бы интересно выделить класс матриц A таких, что матрицы $E-M+MA$ и $\tilde{M}(A-E)$ удовлетворяли бы требуемым свойствам для всех M и $\tilde{M}$. Один из возможных вариантов подобного утверждения дает

Теорема 8. Пусть существует матрица

$$R = diag(r_1, \ldots, r_n), \forall i: r_i > 0$$

такая, что матрица $R(A-E)$ отрицательно определена*). Тогда любая траектория (20) сходится к x^* с вероятностью I.

Доказательство сводится к теореме 7, если показать, что в данном случае для любой $\tilde{M}$ матрица $\tilde{M}(A-E)$ устойчива. Это делается без труда. Из отрицательной определенности $R(A-E)$ вытекает отрицательная определенность

$$(\tilde{M}R^{-1})^{\frac{1}{2}} R(A-E)(\tilde{M}R^{-1})^{\frac{1}{2}},$$

откуда, в свою очередь, следует устойчивость матрицы

---

*) Имеется в виду отрицательная определенность квадратичной формы, задаваемой $R(A-E)$.

$$(\tilde{M}R^{-1})^{\frac{1}{2}}(\tilde{M}R^{-1})^{\frac{1}{2}}R(A-E)(\tilde{M}R^{-1})^{\frac{1}{2}}(\tilde{M}R^{-1})^{-\frac{1}{2}}=\tilde{M}(A-E).$$

В некоторых случаях, не зная самих плотностей распределения $p_i(\gamma)$ или $\tilde{p}_i(\gamma)$, можно надеяться, что они совпадают для различных элементов или, по крайней мере, совпадают их некоторые моменты, например:

$$\forall i,j: \int_0^1 \gamma^2 p_i(\gamma)\,d\gamma = \int_0^1 \gamma^2 p_j(\gamma)\,d\gamma \tag{21}$$

или

$$\forall i,j: \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \tilde{p}_i(\gamma)\,d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \tilde{p}_j(\gamma)\,d\gamma. \tag{22}$$

Теорема 9. Пусть имеет **место** (21), тогда (19) сходится с вероятностью 1 к x^*, если все собственные значения матрицы A по модулю меньше 1.

Теорема 10. Пусть имеет место (22), тогда (20) сходится с вероятностью 1 к x^*, если матрица $A-E$ устойчива.

Интересно, что в теоремах 6,7,9,10 можно указать невырожденные в смысле [1] траектории, которые не сходятся к x^*, т.е. множество невырожденных [1] несходящихся траекторий не пусто, хотя имеет нулевую меру. В то же время есть предположение, что в теоремах 5,8 невырожденных [1] несходящихся траекторий вообще не существует.

Литература

1. Опойцев В.И. Динамика коллективного поведения. I. Гомогенные системы. II. Системы ОМВ. "Автоматика и телемеханика", 1974 №№ 4,5.
2. Активные системы. Сб. М., Институт проблем управления, 1973.
3. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.
4. Опойцев В.И. Статистический анализ динамики коллективного поведения. III Всес. совещание по статистическим методам в процессах **управления**. Тезисы докладов. М., **ИАТ, 1973.**