А.В.Щепкин

ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ АКТИВНЫХ СИСТЕМ ПРИ АГРЕГИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИИ

I. Динамическая активная система

Рассматривается двухуровневая активная система (АС), состоящая из центра и N активных элементов (АЭ). Для k-го периода функционирования y_{ik} – состояние i-го АЭ (реализация), $Y_i(\tau_{ik})$ – множество возможных реализаций y_{ik} (τ_{ik} – вектор параметр), x_{ik} – план, т.е. желательное значение всех или части компонент вектора реализации, λ_k – управление (например, цены), $Y(\tau_k) = Y^{гл}(\tau_k) \bigcap (\prod_{i \in I} Y_i(\tau_{ik}))$ – множество возможных реализаций $y_k = \{y_{ik}\}$, где $\tau_k = \{\tau_{ik}\}$, $Y^{гл}(\tau_k)$ – глобальные ограничения на реализацию y_k, $y_k \in Y^{гл}(\tau_k)$, $\Phi_k(\lambda_k, x_k, y_k)$ – целевая функция АС. Предполагается, что центр знает лишь множество Ω_{ik} возможных значений параметров τ_{ik}, $\tau_{ik} \in \Omega_{ik}$, $i \in I$, где $I = \{1, 2, \dots, N\}$.

Механизмы функционирования двухуровневых активных систем достаточно подробно исследованы для случаев, когда функционирование системы разбито на дискретные периоды, планирование производится на один период функционирования, и модели элементов не изменяются от одного периода функционирования системы к другому [I].

Предположим, что центр формирует планы для подчиненных АЭ сразу на несколько периодов T, причем модель АЭ от периода к периоду может меняться (в введенных обозначениях это значит, что может быть $\tau_{ik} \neq \tau_{ik+1}$). Целевая функция центра при этом будет выражаться в виде $W = \sum_k \Phi_k(\lambda_k, x_k, y_k)$, а целевые функции АЭ будут иметь вид $W_i = \sum_{k=1}^{T} f_{ik}^{k=1}(\lambda_k, x_{ik}, y_{ik})$.

Функционирование активной системы в этом случае будет происходить также, как и в случае планирования на один период [I]. На этапе формирования данных каждый АЭ сообщает в центр оценку $S_i = \{S_{ik}\}$ $(S_{ik} \in \Omega_{ik})$ вектор-параметра $\tau_i = \{\tau_{ik}\}$. На этапе планирования центр определяет управление $\lambda(S)$ и планы $x(S)$ по заданному закону управления $\mathcal{T}(S)$ и сообщает их АЭ. На этапе реализации каждый АЭ определяет реализацию $y_{ik} \in B_{ik}(x_{ik}, \tau_{ik})$. В соответствии с [I] определяется выбор реализации i-м АЭ как максимизация своей целевой функции при заданном плане и при заданном управлении, т.е.

$$\sum_{k=1}^{T} f_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(S_k), y_{ik}) = \max_{z_i \in B_i(x_i(s), \tau_i)} \sum_{k=1}^{T} f_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(S_k), z_{ik}), \quad (I)$$

где $B_i(x_i(S), \tau_i) = \bigcup_{k=1}^{T} B_{ik}(x_{ik}(S_k), \tau_{ik})$.

В работе рассматриваются активные системы с независимыми элементами, причем предполагается, что реализация в k-м периоде не влияет на реализацию в $k+1$-м периоде. При сделанных предположениях выражение (I) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{T} f_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(S_k), y_{ik}) = \sum_{k=1}^{T} \max_{z_{ik} \in B_{ik}(x_{ik}, \tau_{ik})} f_i(\lambda_k, x_{ik}(S_k), z_{ik}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{T} \varphi_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(S_k), \tau_{ik})$$

или

$$\max_{z_{ik} \in B_{ik}(x_{ik}, \tau_{ik})} f_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(S_k), z_{ik}) = \varphi_{ik}(\lambda_k, x_{ik}, \tau_{ik}), \quad k = 1, \ldots, T.$$

Таким образом, функцию $\sum_{k=1}^{T} \varphi_{ik}(\lambda_k(S_k), x_{ik}(S_k), \tau_{ik})$, где $S_k = \{S_{ik}\}$, будем называть целевой функцией i-го АЭ с учетом правила выбора реализации [I] при встречном способе формирования данных.

Формально функционирование такой системы можно рассматривать как статическую задачу, расширив соответственно пространство состояний. А отсюда следует, что результаты, полученные для статической АС, переносятся на описанную динамическую систему. В этом случае ситуация равновесия по Нэшу при условии слабого влияния для закона управления $\mathcal{T}(S) = \{\lambda(S), x(S)\}$ записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{T} \varphi_{ik}(\lambda_k^*, x_{ik}^*(S_k^*), r_{ik}) = \sum_{k=1}^{T} \max_{S_{ik} \in \Omega_{ik}} \varphi_{ik}(\lambda_k^*, x_{ik}(S_k^*(i)), r_{ik}), \quad (2)$$

где $\lambda_k^* = \lambda_k(S_k^*)$, $S_k^* = S_{1k}^*, \ldots, S_{i-1k}^*, S_{ik}, S_{i+1k}^*, \ldots, S_{Nk}^*$.
Для выполнения (2) достаточно существования точки S_k^* такой, что управление $\lambda_k^* = \lambda_k(S^*)$ и план $x_k^* = x_k(S_k^*)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{T} \varphi_{ik}(\lambda_k^*, x_{ik}^*, r_{ik}) = \sum_{k=1}^{T} \max_{x_{ik} \in X_k(r_{ik})} \varphi_{ik}(\lambda_k^*, x_{ik}, r_{ik}). \quad (3)$$

Так же, как и в [1], легко показать, что для закона открытого управления (ОУ) ситуация $S^* = r$ является равновесием вида (3).

2. Агрегирование информации на этапе обработки данных

При составлении планов на T периодов на этапе формирования данных каждый АЭ сообщает в центр информацию о каждом из T периодов, т.е. в центр поступает информации в T раз больше по сравнению с информацией, которая поступала в центр при планировании на один период. Предположим, что возможности центра по обработке информации, поступающей от элементов, ограничены, а задача, стоящая перед ним, остается прежней - сформировать планы сразу на T периодов. Для решения этой задачи необходимо как-то уменьшить объем информации. Один из путей - это агрегирование информации на этапе сбора данных. Для этого центр может T периодов функционирования разбить на группы по t периодов в каждой и считать, что в каждой группе реализация АЭ (параметр r) не меняется от периода к периоду, т.е. с точки зрения центра в каждые t периодов j-й группы параметр r i-го АЭ не меняется и равен r_i. Предположим, что таких групп будет n, тогда $T = n \cdot t$. Соответственно, на этапе формирования данных центр требует, чтобы АЭ сообщали ему оценку S_i^j $(i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, n)$ вектор-параметра $\{r_i\}$ не по всем T периодам, а только по n группам. Выполняя это требование, i- й АЭ на этапе сбора данных будет сообщать в центр не вектор S размерностью T, а вектор размерностью n .

3. Задача распределения плановых заданий

Пусть x_{ik} - объем работ, который необходимо выполнить i-му АЭ в k-м периоде, λ_k - стоимость единицы объема работы. Параметр r_{ik} определим как коэффициент эффективности производства. Предположим, что целевая функция i-го АЭ имеет вид

$$W_i = \sum_{k=1}^{T} \left[\lambda_k x_{ik} - \psi_{ik}(x_{ik}, r_{ik})\right],$$

где $\psi_{ik}(x_{ik}, r_{ik})$- функция затрат i-го АЭ. Задача центра состоит в том, чтобы назначить план каждому АЭ так, чтобы суммарный выпуск за T периодов был равен заданному количеству ХТ, а затраты на выполнение этих работ были минимальными. Таким образом, на этапе планирования центр решает задачу

$$\sum_{k=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} \psi_{ik}(x_{ik}, S_{ik}) \longrightarrow min, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} x_{ik} = \chi T. \tag{5}$$

При планировании на основе принципа открытого управления к задаче (4)-(5) добавляется условие совершенного согласования

$$\sum_{k=1}^{T} \left[\lambda_k x_{ik} - \psi_{ik}(x_{ik}, S_{ik})\right] = \max_{z \in \chi_i(S)} \sum_{k=1}^{T} \left[\lambda_k z_{ik} - \psi_{ik}(z_{ik}, S_{ik})\right], i \in I, \tag{6}$$

где $\chi_i(S_i) = \bigcup_{k=1}^{T} \chi_{ik}(S_{ik})$, функция $\sum_{k=1}^{T}\left[\lambda_k x_{ik} - \psi_{ik}(x_{ik}, S_{ik})\right]$ - функция предпочтения. Поскольку периоды между собой независимы, выражение (6) можно переписать в виде

$$\left[\lambda_k x_{ik} - \psi_{ik}(x_{ik}, s_{ik})\right] = \max_{z_{ik} \in X_{ik}(s_{ik})} \left[\lambda_k z_{ik} - \psi_{ik}(z_{ik}, s_{ik})\right]$$

Подробный анализ такой модели приведен в [I] .

4. Согласованное управление при распределении плановых заданий

Пусть на этапе сбора данных центр получает агрегированную информацию. Оценку вектор-параметра $\{r_{ik}\}$, $k=1,\dots,T$ i-й АЭ представляет в виде некоторого вектора $\{s_i^j\}$, $j=1,\dots,n$, причем центр считает, что

$$r_{it(j-1)+1} = r_{it(j-1)+2} = \dots = r_{it(j-1)+t} = s_i^j$$

и соответственно функция предпочтения i-го АЭ имеет вид

$$t \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j x_i^j - \psi_{ij}(x_i^j, s_i^j)\right].$$

На этапе планирования, при согласовании интересов центра с интересами активных элементов, решается задача

$$t \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \psi_{ij}(x_i^j, s_i^j) \longrightarrow \min, \tag{7}$$

$$t \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} x_i^j = X T, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j x_i^j - \psi_{ij}(x_i^j, s_i^j)\right] = \max_{z_i \in X_i(s_i)} \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j z_{ij} - \psi_{ij}(z_{ij}, s_i^j)\right], \; i \in I,$$
$$X_i(s_i) = \bigcup_{j=1}^{n} X_i^j(s_i^j). \tag{9}$$

Учитывая, что периоды функционирования не связаны между собой, условие согласования (9) можно переписать в виде

$$\left[\lambda_j x_i^j - \psi_{ij}(x_i^j, s_i^j)\right] = \max_{z_{ij} \in X_i^j(s_i^j)} \left[\lambda_j z_{ij} - \psi_{ij}(z_{ij}, s_i^j)\right]. \tag{10}$$

Общие затраты АС на выполнение работ определяются выражением

$$\sum_{k=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} \psi_{ik}(x_{ik}, \tau_{ik}) . \qquad (11)$$

Для простоты положим

$$\psi_{ik}(x_{ik}, \tau_{ik}) = \frac{x_{ik}^2}{2\tau_{ik}}$$

и цена λ не меняется в течение всех T периодов. Тогда, решая задачу (7), (8), (10), легко получить

$$x_i^j = \frac{\chi n s_i^j}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} s_i^j} , \quad \lambda = \frac{\chi n}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} s_i^j} .$$

Целевая функция i-го АЭ при этом равна

$$W_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} \left[\lambda x_i^j - \frac{(x_i^j)^2}{2\tau_{ik}} \right] = \lambda^2 t \sum_{j=1}^{n} s_i^j - \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=1}^{n} (s_i^j)^2 \sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} \frac{1}{\tau_{ik}} .$$

В точке равновесия по Нэшу при гипотезе слабого влияния каждый АЭ достигает оптимума по своим переменным, поэтому $\frac{\partial W_i}{\partial s_i^j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$; $i \in I$, причем $\frac{\partial \lambda}{\partial s_i^j} = 0$. Это приводит к системе уравнений

$$t - s_i^j \sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} \frac{1}{\tau_{ik}} = 0 , \quad i \in I , \; j = 1, \ldots, n .$$

Отсюда следует

$$s_i^{j*} = \frac{t}{\sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} \frac{1}{\tau_{ik}}} ,$$

$$x_i^{j*} = \frac{\chi n}{\sum\limits_{k=t(j-1)+1}^{tj} \frac{1}{\tau_{ik}} \sum\limits_{l=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\sum\limits_{k=t(j-1)+1}^{tj} \frac{1}{\tau_{ik}}}} .$$

Затраты всей АС на выполнение работ при разбиении Т периодов на n групп определяются выражением

$$\widetilde{W}_n = \frac{\chi^2 n^2}{2\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\sum\limits_{k=t(j-1)+1}^{tj} \frac{1}{\tau_{ik}}}} , \quad T = n\cdot t . \qquad (12)$$

Если же T периодов было разбито на m групп по $t+1$ периодам в каждой группе, то затраты АС на выполнение работ определяются выражением

$$\widetilde{W}_m = \frac{\chi^2 m^2}{2\sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\sum\limits_{k=(t+1)(j-1)+1}^{(t+1)j} \frac{1}{\tau_{ik}}}} , \quad T = m(t+1) . \qquad (13)$$

Очевидно, что $n > m$. Значения $\widetilde{W}_n$ и $\widetilde{W}_m$ зависят от информации об АЭ в положении равновесия по Нэшу при гипотезе слабого влияния. Необходимо выяснить, всегда ли более грубое разбиение Т периодов ухудшает целевую функцию центра, то есть всегда ли $\widetilde{W}_m > \widetilde{W}_n$.

<u>Теорема</u>. Если параметр τ_{ik} изменяется по закону $\tau_{ik} = \tau_i \alpha^k (\alpha > 0)$, тогда всегда выполняется неравенство $\widetilde{W}_m > \widetilde{W}_n$.

Выражая в (12) и (13) τ_{ik} через $\tau_i \alpha^k$, получим

$$\widetilde{W}_n = \frac{\chi^2 n^2 (1-\alpha^t)^2}{2(1-\alpha)(1-\alpha^\tau)\alpha^t \sum\limits_{i=1}^{N} \tau_i},$$

$$\widetilde{W}_m = \frac{\chi^2 m^2 (1-\alpha^{t+1})^2}{2(1-\alpha)(1-\alpha^\tau)\alpha^{t+1} \sum\limits_{i=1}^{N} \tau_i};$$

Для того, чтобы $\widetilde{W}_m > \widetilde{W}_n$, необходимо

$$\frac{m^2(1-\alpha^{t+1})^2}{\alpha^{t+1}} \geqslant \frac{n^2(1-\alpha^t)}{\alpha^t}.$$

Для доказательства справедливости этого неравенства перепишем его в виде

$$\frac{(1-\alpha^{t+1})^2}{(t+1)^2\alpha^{t+1}} \geqslant \frac{(1-\alpha^t)^2}{t^2\alpha^t}$$

или

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{t+1}{2}}} - \alpha^{\frac{t+1}{2}}\right)^2}{(t+1)^2} \geqslant \frac{\left(\frac{1}{\alpha^{t/2}} - \alpha^{\frac{t}{2}}\right)^2}{t^2}.$$

Пусть $\alpha^{\frac{1}{2}} = \beta$, тогда

$$\frac{\left(\frac{1}{\beta^{t+1}} - \beta^{t+1}\right)^2}{(t+1)^2} \geqslant \frac{\left(\frac{1}{\beta^t} - \beta^t\right)^2}{t^2}.$$

Пусть $\beta \in (0,1)$. Достаточно показать, что

$$\frac{\frac{1}{\beta^{t+1}} - \beta^{t+1}}{t+1} \geqslant \frac{\frac{1}{\beta^t} - \beta^t}{t}. \qquad (14)$$

Действительно

$$\frac{1}{\beta^t} - \beta^t = \left(\frac{1}{\beta} - \beta\right)\left(\frac{1}{\beta^{t-1}} + \frac{1}{\beta^{t-3}} + \ldots + \beta^{t-3} + \beta^{t-1}\right).$$

Теперь (I4) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\beta^{-t}+\beta^{-t+2}+\ldots+\beta^{t-2}+\beta^{t}}{t+1} \geqslant \frac{\beta^{-t+1}+\beta^{-t+3}+\ldots+\beta^{t-3}+\beta^{t-1}}{t}.$$

Доказательство этого неравенства приведено в [2]. Таким образом $\widetilde{W}_m > \widetilde{W}_n$.

Приведем пример, когда более мелкое разбиение T периодов не улучшает целевую функцию центра в равновесии по Нэшу при гипотезе слабого влияния. Пусть имеется один АЭ, $T=6$, $\{r\}=\{\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};1;\frac{1}{3};\frac{1}{2}\}$; $\chi=\sqrt{2}$.

Тогда

$$\widetilde{W}_n=\frac{n^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\sum\limits_{k=\frac{T}{n}(j-1)+1}^{\frac{T}{n}j}\frac{1}{r_{ik}}}}.$$

При $n=2$, $\widetilde{W}_2=17\frac{1}{7}$, а при $n=3$, т.е. при более мелком разбиении, $\widetilde{W}_3=19\frac{118}{145}$.

Предположим теперь, что центр предоставляет элементам нижнего уровня "большую" свободу в выборе плановых заданий. Пусть на этапе планирования центр определяет общий объем работ, который должен выполнить i-й АЭ за t периодов в каждой выделенной группе, а определение объема работ, выполняемого в каждый период, производится уже самими АЭ.

Таким образом, на этапе планирования центр определяет цену

$$\lambda=\frac{\chi n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}s_i^j}$$

и объем работ $y_{ij}=tx_i^j=\frac{\chi n t s_i^j}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}s_i^j}$ на каждые t периодов.

Конкретное значение x_{ik} i-й АЭ определяет, максимизируя свою целевую функцию

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=t(j-1)+1}^{tj}\left[\lambda x_{ik}-\frac{x_{ik}^2}{2r_{ik}}\right]\longrightarrow max$$

при ограничениях $\sum\limits_{k=t(j-1)+1}^{t\cdot j} x_{ik} = y_{ij}$.

В результате получается

$$x_{ik} = \frac{\lambda t s_i^j \tau_{ik}}{\sum\limits_{k=t(j-1)+1}^{t\cdot j} \tau_{ik}} .$$

Целевую функцию i-го АЭ теперь можно записать в виде

$$W_i = \lambda^2 t \sum_{j=1}^{n} s_i^j - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{s_i^{j2}}{\sum\limits_{k=t(j-1)+1}^{t\cdot j} \tau_{ik}} .$$

В точке равновесия по Нэшу при гипотезе слабого влияния информация, представляемая в центр i-м АЭ, выражается в виде

$$s_i^{j*} = \frac{\sum\limits_{k=t(j-1)+1}^{t\cdot j} \tau_{ik}}{t} ,$$

а затраты АС в виде

$$W = \frac{\chi^2 T^2}{2 \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{T} \tau_{ik}} .$$

Отсюда видно, что затраты АС на выполнение всего объема работы не зависят от разбиения Т периодов на группы.

Заключение

Проведенный анализ функционирования АС при распределении плановых заданий показал, что для рассмотренной модели более точное представление информации (более мелкое разбиение T периодов) не всегда улучшает целевую функцию центра в равновесии по Нэшу при гипотезе слабого влияния. Кроме того, если центр предоставляет АЭ "большую" свободу в смысле выбора конкретного значения планового задания, то функционирование АС близко к оптимальному с точки зрения центра.

Литература

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М., "Наука", 1977.
2. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М., ИЛ, 1948.