В.В.Кондратьев, Ф.С.Нуриев, А.В.Щепкин

АНАЛИЗ СИТУАЦИЙ РАВНОВЕСИЯ В АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЗАГРУЗКИ

Рассмотрим двухуровневую активную систему /АС/, состоящую из центрального органа /ЦО/ и n активных элементов /АЭ/ [I].

Обозначим: τ_i – параметр модели i-го АЭ; s_i – оценка параметра τ_i, сообщаемая i-ым АЭ в ЦО; x_i – план i-го АЭ, устанавливаемый ЦО; λ – управление, устанавливаемое ЦО; $\eta_i(x_i, \lambda, \tau_i)$ – целевая функция i-го АЭ; $F(x, \lambda, \tau)$ – целевая функция ЦО /системы/, здесь $x = \{x_i\}$ $\tau = \{\tau_i\}$, $i = 1 \div n$.

Функционирование АС разбито на периоды, каждый из которых включает в себя этап формирования данных, этап планирования и этап реализации плана. На этапе формирования данных каждый АЭ сообщает в ЦО оценку s_i параметров τ_i; на этапе планирования ЦО определяет управление $\lambda(s)$ и план $x(s)$ по некоторому закону управления $\mathcal{T}(s) = [x(s), \lambda(s)]$ (здесь $s = \{s_i\}$, $i = 1 \div n$); на этапе реализации плана каждый АЭ получает "выигрыш" $\eta_i(x_i(s), \lambda(s), \tau_i)$. "Выигрыш" ЦО равен при этом $F(x(s), \lambda(s), \tau)$.

Описанную схему функционирования естественно рассматривать как игру n лиц, в которой стратегией i-го участника игры /АЭ/ является сообщаемая в ЦО оценка s_i.

Теоретико-игровой анализ такой модели включает в себя рассмотрение следующих вопросов: определение понятия "решение игры"; существование, единственность и свойства решения игры; сходимость траекторий АЭ к решению игры при тех или иных предположениях о критериях их локального поведения; проверка гипотез о поведении АЭ путем проведения деловых игр и анализа реального поведения АЭ.

В данной работе для задачи загрузки исследуется вопрос о достоверности информации, сообщаемой АЭ в точках решения игры. В качестве решения игры используется понятие "ситуация

равновесия по Нэшу", то есть ситуация $s^* = \{s_i^*\}$, удовлетворяющая системе уравнений:

$$\eta_i(x_i(s^*), \lambda(s^*), \tau_i) = \max \eta_i(x(s^*(i)), \lambda(s^*(i)), \tau_i), \qquad /1/$$

где $s^*(i) = (s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$.

Доводы в пользу такого определения игры приводятся в [2]. Наряду с ситуациями равновесия по Нэшу в работе исследуются ситуации, когда АЭ при выборе стратегии придерживаются принципа гарантированного результата. Выбор АЭ стратегии гарантированного результата представляется разумным в случае, когда АЭ не имеют достаточной информации об игре.

В зависимости от степени учета интересов АЭ в работе различается планирование на основе принципа жесткой централизации и согласованное планирование. В первом случае интересы АЭ не учитываются и управление λ остается неизменным при переходе от одного периода функционирования к другому. Процедура выбора величины λ здесь не связана с процедурой планирования и предполагается неопределенной. В случае согласованного планирования ЦО при решении задачи оптимального планирования учитывает интересы АЭ путем добавления к исходной задаче условий согласований /в виде ограничений/, в силу чего АЭ получают только "выгодные" для них планы.

Задача загрузки в активной системе

Двухуровневая АС содержит ЦО и n подсистем /АЭ/, производящих m типов продукции. Будем считать, что целевая функция i-го АЭ линейно зависит от количества производимой продукции и имеет вид

$$\eta_i(\bar{x}_i, \bar{\lambda}, \bar{\tau}_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \tau_{ij} x_{ij}. \qquad /2/$$

Здесь $\bar{x}_i = \{x_{ij}\}$, $\lambda = \{\lambda_j\}$, $\bar{\tau}_i = \{\tau_{ij}\}$, $j = 1 \div m$; где λ_j – аналог цены j-го вида продукции, τ_{ij} – производительность i-го АЭ по j-му виду продукции, x_{ij} –

время работы i-го АЭ по производству j-го вида продукции. Суммарное время работы i-го АЭ в каждом периоде функционирования ограничено величиной T_i : $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq T_i$. Целевая функция системы имеет вид $F = \min_i \left(\sum_j^m \tau_{ij} x_{ij} / B_j \right)$. Без ограничения общности в дальнейшем будем принимать $B_j = 1, j = 1 \div m$. На этапе формирования данных i-ый АЭ сообщает в ЦО $\bar{s}_i = \{ s_{ij} \}$ вектор оценки $\bar{\tau}_i = \{ \tau_{ij} \}$. Будем предполагать, что $\bar{s}_i \subset \Omega$, $i = 1 \div n$, где Ω – множество $\bar{s}_i$ таких, что $0 < d \leq s_{ij} \leq D$, $j = 1 \div m$. Предполагаем также, что $\bar{\tau}_i \subset \Omega$. Если множество планов, дающих оптимальное решение задачи планирования в k-ом периоде функционирования /обозначим его через Γ^k/, содержит более одного элемента, план в k-ом периоде функционирования x^k выбирается в смысле следующего критерия:

$$\| x^{k-1} - x^k \| = \min_{y \subset \Gamma^k} \| x^{k-1} - y \| ,$$

где x^{k-1} – план в $k-1$ периоде функционирования, – так называемое правило устойчивости назначений [3].

Принцип жесткой централизации

На этапе планирования ЦО решает задачу максимизации

$$F = \min_j \left(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \right) \longrightarrow \max \qquad /3/$$

при ограничениях:

$$A i : \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq T_i , \quad i = 1 \div n . \qquad /4/$$

Управление $\bar{\lambda} = const$; $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$. Покажем, что в случае неудачного выбора управления $\bar{\lambda}$ для АС с параметрами $n, m, \tau = \{ \bar{\tau}_i \}$ (величины $\tau = \{ \bar{\tau}_i \}$ ЦО не знает!) информация, сообщаемая АЭ в равновесных точках $s^* = \{ \bar{s}_i^* \}$, может не совпадать с достоверной: $s^* \neq \tau$ – и план, назначаемый на основе этой информации, может быть далек от оптимального.

Действительно, рассмотрим в качестве примера систему со следующими параметрами:

$$m=2\ ,\ r=\left.\begin{pmatrix}16\\16\\\cdots\\16\end{pmatrix}\right\}n\ ,\ \bar{T}=\begin{pmatrix}T\\T\\\cdots\\T\end{pmatrix}\ ,\ \bar{\lambda}=(0.4,\,0.6). \qquad /5/$$

Ограничения на стратегии АЭ: $1 \leq s_{ij} \leq 10\ ,\ i=1\div n\ ,\ j=1,2$.

Из решения задачи /3/,/4/ находим, что при достаточно большом n значение целевой функции системы в точке есть

$$F(x(r)) \approx \frac{6}{7}n\ .$$

Легко проверить, что при таких параметрах системы точка s^*, $s^* \neq r$, в пространстве стратегий

$$s^*=\left.\begin{pmatrix}1 & 10\\1 & 10\\\cdots & \cdots\\1 & 10\end{pmatrix}\right\}n \qquad /6/$$

является точкой равновесия и значение целевой функции системы в s^* есть

$$F(x(s^*)) \approx \frac{1}{11}n \approx 0.17\,F(x(r)).$$

Если считать реальным условие, что на этапе реализации плана достигнутые значения производительности АЭ становятся известными ЦО, то для стимулирования выдачи подсистемами достоверной информации ЦО может использовать функции штрафа. Рассмотрим функции штрафа вида

$$\Psi_i=\sum_{j=1}^{m}\alpha\,|r_{ij}-s_{ij}|\,\lambda_j\,x_{ij}\ ,\ \text{где}\quad 0\leq\alpha<1\ . \qquad /7/$$

Целевая функция i-го АЭ в этом случае имеет вид:

$$\eta_i(\bar{x}_i,\bar{\lambda},\bar{r}_i,\alpha)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(r_{ij}-\alpha\,|r_{ij}-s_{ij}|\right)x_{ij}\ . \qquad /8/$$

Однако для АС с параметрами /5/ точка s^* /6/ по-прежнему остается точкой равновесия, то есть при планировании на основе принципа жесткой централизации даже при введенных функциях штрафа /7/ информация, сообщаемая АЭ, в точках равновесия может быть далека от достоверной. Проверка выпол-

нения условий Нэша /I/ в точке s^* /6/ достаточно проста и здесь приводиться не будет.

Принцип согласованного планирования

На этапе планирования ЦО решает задачу максимизации /3/,/4/ с дополнительными ограничениями вида

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j s_{ij} x_{ij} = \max_{\bar{y}_i = \{y_{ij}\} \subset A_i} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j s_{ij} y_{ij} \qquad /9/$$

/так называемое условие совершенного согласования/.

Условие /9/ с учетом /4/ примет вид:

$$(\lambda_j s_{ij} - \max_{l} s_{il} \lambda_l) x_{ij} = 0. \qquad /10/$$

Введя замену $u_i = \max_{l} s_{il} \lambda_l$, получим, что условия /10/ совпадают с условиями дополнительной нежесткости, записанными для задачи /3/,/4/. Имея это в виду, задачу /3/,/4/, /10/ можно решить следующим образом: план $x(s)$ определяется из решения задачи /3/, /4/, а согласованное управление $\lambda(s)$ – из решения задачи, двойственной к ней.

Можно показать, что информация, сообщаемая АЭ в равновесных точках при таком планировании, может быть далека от достоверной.

Действительно, рассмотрим в качестве примера систему с параметрами:

$$m=2, \quad r = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ 8 & 1 \\ 1 & 8 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \frac{n}{2} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \frac{n}{2} \end{matrix}, \quad \bar{T} = \begin{pmatrix} T \\ T \\ \cdots \\ T \end{pmatrix} \Big\} n. \qquad /11/$$

При достаточно большом n и условии выгодности для АЭ плана $x(s^*)$, т.е. в случае, когда план $x(s^*)$ имеет вид:

$$x(s^*) = \begin{pmatrix} T & 0 \\ \cdots & \cdots \\ T & 0 \\ 0 & T \\ \cdots & \cdots \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \frac{n}{2} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \frac{n}{2} \end{matrix}$$

любая точка $s^* = \{\bar{s}_i^*\}$

вида $$s^* = \ell \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \ell > 0, \qquad /12/$$

является равновесной по Нэшу.

При введенных функциях штрафа /7/ в АС в примере /11/ точка s^*, когда $\ell = 8$ является точкой равновесия.

Из /11/ видно, что в этом случае $s_{ij}^* = \tau_{ij}$, если $x_{ij}(s^*) \neq 0$ и $s_{ij}^* \neq \tau_{ij}$, если $x_{ij}(s^*) = 0$. С другой стороны, можно показать*, что стратегиями гарантированного результата АЭ в условиях согласованного планирования и введенных функциях штрафа являются стратегии $\bar{s}_i^r$ такие, что $\bar{s}_i^r = \bar{\tau}_i$, $i = 1 \div n$, то есть в общем случае $s^r = \{\bar{s}_i^r\} \neq s^* = \{\bar{s}_i^*\}$. Это обстоятельство еще раз подчеркивает важность исследования и обоснования критериев локального поведения АЭ. Вопрос о непременном выполнении в равновесных точках соотношения $s_{ij}^* = \tau_{ij}$ при $x_{ij}(s^*) \neq 0$ в настоящее время пока не решен.

Выпуклые целевые функции АЭ в задаче загрузки

Целевой функцией АЭ здесь будем считать прибыль, которая определяется доходом от производства продукции за вычетом ее себестоимости:

$$\eta_i(\bar{x}_i, \lambda, \bar{\tau}_i) = \sum_{j=1}^{m} (c_j \tau_{ij} x_{ij} - \lambda \varphi_{ij}(x_{ij})),$$

здесь c_j - цена единицы j - го сортамента, $\bar{c} = \{c_j\}$, $\lambda \varphi_{ij}(x_{ij})$ - себестоимость производства j - го сортамента i -ой подсистемой. Будем считать, что функция $\varphi_{ij}(x_{ij})$ выпукла вниз по x_{ij} и равна для простоты $\alpha_{ij} x_{ij}^2$. Коэффициенты $\lambda \alpha_{ij}$ имеют смысл дифференцированных цен за производство продукции. Целевая функция i -го АЭ примет вид:

$$\eta_i(\bar{x}_i, \lambda, \bar{\tau}_i) = \sum_{j=1}^{m} (c_j \tau_{ij} x_{ij} - \lambda \alpha_{ij} x_{ij}^2). \qquad /13/$$

Вместо /9/ рассмотрим условие согласования следующего вида:

---

* Доказательство повторяет доказательство, приведенное в [4] для задачи "Проект".

$$(c_j s_{ij} x_{ij} - \lambda \alpha_{ij} x_{ij}^2) = \max_{y_{ij} \subset A_i} (c_j s_{ij} y_{ij} - \lambda \alpha_{ij} y_{ij}^2), \quad i = 1 \div n, \; j = 1 \div m, \qquad /14/$$

в силу которого ЦО назначает i-му АЭ по производству j-го продукта, $j = 1 \div m$, самый выгодный план.

<u>Лемма I.</u> Пусть $s' = \{\bar{s}_i'\}$ - любая точка: $s_i' \subset \Omega$, $i = 1 \div n$ Для любого значения $\bar{s}_i \subset \Omega$, $i = 1 \div n$, за исключением, быть может, некоторого $i = i_1$, выполняется неравенство:

$$\lambda(\bar{s}_1', \ldots, \bar{s}_{i-1}', \bar{s}_i, \bar{s}_{i+1}', \ldots, \bar{s}_n') \geq \lambda(\bar{s}_1', \ldots, \bar{s}_{i-1}', \bar{s}_i', \bar{s}_{i+1}', \ldots, \bar{s}_n').$$

То есть любой АЭ, за исключением, быть может, одного, при фиксированных стратегиях других АЭ не может уменьшить λ, изменяя свою стратегию $\bar{s}_i$. Это условие назовем условием одностороннего слабого влияния.

Доказательство. Условия /I7/ справедливы, когда

$$x_{ij} = \frac{s_{ij} c_j}{2 \lambda \alpha_{ij}}. \qquad /15/$$

Подставляя /I5/ в /I4/, получим выражение для $\lambda(s)$:

$$\lambda(s) = \max_i \frac{1}{2T_i} \sum_{j=1}^{m} \frac{s_{ij} c_j}{\alpha_{ij}}, \qquad /16/$$

откуда следует справедливость леммы I.

Зависимость целевой функции i-го АЭ от стратегий всех АЭ с учетом /I5/ и /I6/ запишется как

$$\eta_i(s) = \frac{1}{\lambda(s)} \cdot \sum_{j=1}^{m} \varkappa_{ij}(s_{ij}), \qquad /17/$$

где $\varkappa_{ij}(s_{ij}) = \frac{s_{ij} c_j}{2 \alpha_{ij}} \left(\tau_{ij} - \frac{s_{ij}}{2}\right)$.

Имея это в виду, можно сформулировать следующую простую лемму:

Лемма 2. Функции $\mathcal{X}_i(\bar{s}_i)=\sum_{j=1}^{m}\mathcal{X}_{ij}(s_{ij})$ достигают максимума, когда $\bar{s}_i=\bar{\tau}_i$, $i=1\div n$.

Теорема I. Единственной точкой равновесия по Нэшу является точка $S^*=\{\bar{s}_i^*\}$ такая, что:

а/ $\bar{s}_i^*=\bar{\tau}_i$ для $i=1\div n$ за исключением, быть может, $i=i_1$;

б/ $\bar{s}_{i_1}^*$: $d\leq s_{i_1j}\leq \tau_{i_1j}$

Доказательство. Из /I7/, условия одностороннего слабого влияния и леммы 2 следует справедливость утверждения о том, что S^* - точка равновесия. Пусть S^{**} - тоже точка равновесия. Обозначим через i_2 номер i, удовлетворяющий условию:

$$\frac{1}{2T_{i_2}}\sum_{j=1}^{m}\frac{s_{i_2j}^{**}c_j}{\alpha_{i_2j}}=\max_i\frac{1}{2T_i}\sum_{j=1}^{m}\frac{s_{ij}^{**}c_j}{\alpha_{ij}}$$

Если найдется номер i_3 такой, что $i_3\neq i_2$ и $\bar{s}_{i_3}^{**}\neq\bar{\tau}_{i_3}$, то в силу условия одностороннего слабого влияния и леммы 2 справедливо:

$$\eta_{i_3}(\bar{s}_1^{**},\dots,\bar{s}_{i_3-1}^{**},\bar{\tau}_{i_3},\bar{s}_{i_3+1}^{*},\dots,\bar{s}_n^{*})>\eta_{i_3}(\bar{s}_1^{**},\dots,\bar{s}_{i_3-1}^{**},\bar{s}_{i_3}^{**},s_{i_3+1}^{**},\dots,\bar{s}_n^{**}),$$

то есть точка S^{**} не удовлетворяет условиям равновесия по Нэшу. Если для любого $i, i\neq i_2$ соблюдается $\bar{s}_i^{**}=\bar{\tau}_i$, то отсюда необходимо следует, что $S^{**}=S^*$

Таким образом, в ситуации равновесия все АЭ /за исключением, быть может, одного/ на этапе формирования данных сообщают достоверную информацию.

Теорема 2. Единственной стратегией гарантированного результата для i-го АЭ является $\bar{s}_i^{\Gamma}$ такая, что $\bar{s}_i^{\Gamma}=\bar{\tau}_i$, $i=1\div n$.

Доказательство. По определению стратегия гарантированного результата i-го АЭ определяется соотношением:

$$x_i(\bar{s}_i^{\Gamma})=\max_{\bar{\theta}_i}x_i(\bar{\theta}_i), \qquad /I8/$$

где $x_i(\bar{\theta}_i)=\min\limits_{(\bar{\theta}_1,\dots,\bar{\theta}_{i-1},\bar{\theta}_{i+1},\dots,\bar{\theta}_n)}\eta_i(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\dots,\bar{\theta}_n)$.

Имея в виду /I7/, можем записать следующую цепочку равенств:

$$\max_{\bar{\theta}_i} \min_{(\bar{\theta}_1,\dots,\bar{\theta}_{i-1},\bar{\theta}_{i+1},\dots,\bar{\theta}_n)} \left[\frac{1}{\lambda(\theta_1,\dots,\theta_n)} \cdot \sum_{j=1}^{m} \varkappa_{ij}(\theta_{ij}) \right] =$$

$$= \max_{\bar{\theta}_i} \left[\left(\sum_{j=1}^{m} \varkappa_{ij}(\theta_{ij}) \right) \cdot \min_{(\bar{\theta}_1,\dots,\bar{\theta}_{i-1},\bar{\theta}_{i+1},\dots,\bar{\theta}_n)} \frac{1}{\lambda(\bar{\theta}_1,\dots,\bar{\theta}_n)} \right] =$$

$$= \max_{\bar{\theta}_i} \left[\left(\sum_{j=1}^{m} \varkappa_{ij}(\theta_{ij}) \right) \frac{1}{\lambda(\bar{\theta}(i))} \right] = \left(\sum_{j=1}^{m} \varkappa_{ij}(\tau_{ij}) \right) \frac{1}{\lambda(\bar{\tau}(i))},$$

где $\bar{\theta}(i)$ обозначена точка $S=\{\bar{S}_i\}$ такая, что $S=(\underbrace{\bar{D},\dots,\bar{D}}_{i-1},\bar{\theta}_i,\bar{D},\dots,\bar{D})$, $\tau(i)$ – точка $S=\{\bar{S}_i\}$ такая, что $S=(\bar{D},\dots,\bar{D},\bar{\tau}_i,\bar{D},\dots,\bar{D})$.

Заметим, что из-за условий согласования /I4/ план $x(S)$, определенный из решения задачи /3/, /4/, /I4/, даже при достоверной информации $S=\tau$, вообще говоря, не совпадает с оптимальным планом задачи /3/, /4/, определенным при $S=\tau$. Эту трудность можно преодолеть следующим образом. Первоначально на этапе планирования решается задача /3/, /4/, /I4/ при произвольной матрице $\alpha=(\alpha_{ij})$. После того, как АЭ "приходят" к равновесной точке, решается задача /3/, /4/ при равновесных стратегиях АЭ. Так как в равновесной ситуации все АЭ, за исключением, быть может, одного, сообщают достоверную информацию, то при увеличении числа АЭ будет выполняться соотношение

$$\frac{F(x'(S^*))}{F(x'(\tau))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad /I9/$$

Здесь $x'(S^*)$ и $x'(\tau)$ – планы, определяемые из решения задачи /3/, /4/ при матрицах S^* и τ, соответственно. Зная план $x^*(S^*)$, который близок к оптимальному плану $x'(\tau)$ в смысле критерия /I9/, а также $\lambda(S^*)$, можно определить такие α_{ij}, что согласованный план $x(S^*)$, определяемый в ситуации равновесия из решения задачи /3/,

/4/,/14/, будет как угодно близок к плану $x'(s^*)$, а следовательно, и к оптимальному плану $x'(r)$. Таким образом, если ЦО применяет описанную процедуру выбора $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$, то справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. Если s^* - точка решения игры в смысле равновесия по Нэшу, то при достаточно большом n выполняется

$$\frac{F(x(s^*))}{F(x'(r))} \approx 1.$$

Теорема 4. Если s'' точка решения игры в смысле принципа гарантированного результата, то

$$\frac{F(x(s''))}{F(x'(r))} \approx 1.$$

Литература

1. С.В.Емельянов, В.Н.Бурков. Управление активными системами. Сб."Активные системы". М., Институт проблем управления, 1973.
2. В.Н.Бурков, В.И.Опойцев. Распределение ресурса в активной системе. Сб."Активные системы". М., Институт проблем управления, 1973.
3. И.А.Горгидзе и др. Деловая игра "Проект". Сб."Активные системы". М., Институт проблем управления, 1973.
4. В.Н.Бурков. Принципы управления многоуровневыми активными системами. Международный симпозиум по проблеме организационного управления и иерархическим системам (г.Баку, 1971). Рефераты докладов, ч.I. М., ИАТ, 1972.