УДК 65.012.1:519.2

МЕТАИГРОВОЙ ПОДХОД К УПРАВЛЕНИЮ ИЕРАРХИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

В. Н. БУРКОВ, В. И. ОПОЙЦЕВ

(Москва)

Рассматривается задача управления иерархической системой, в которой единственный элемент верхнего уровня является метаигроком, т. е. определяет правила игры между остальными элементами системы. Методология излагается на простом примере задачи распределения одномерного ресурса.

1. Введение

Реально функционирующие экономические системы часто можно представить в виде некоторого центрального органа (ЦО), осуществляющего управление системой в целом, и нескольких подчиненных ему элементов (предприятий). Для качественных рассуждений нам пока достаточно чисто интуитивного восприятия терминов «управление», «подчинение», которые в иерархических системах, вообще говоря, допускают весьма свободное толкование. Для определенности можно иметь в виду главк и совокупность подчиненных ему заводов.

Решение задач управления в подобных системах в большинстве случаев мыслится как решение тех или иных задач оптимизации на основе всей необходимой информации о системе, которая считается известной и достоверной. Важность такой постановки вопроса является неоспоримой. Трудности, возникающие здесь, довольно значительны и их положительное решение приводит, как правило, к ощутимому экономическому эффекту. При этом, однако, игнорируется бесспорный факт наличия у элементов нижних уровней тех или иных степеней свободы, которые они могут использовать в собственных интересах. В силу различия интересов действия элементов оказываются частично направленными на создание у ЦО ложных представлений о системе. Отсутствие же у центра достоверной информации о системе может приводить к довольно значительным потерям [1].

Упомянутое выше наличие степеней свободы у элементов есть не что иное, как более или менее широкие возможности в предоставлении центру недостоверной информации, а также способность элементов работать ниже своих предельных возможностей. При введении частичной децентрализации количество «рычагов» у элементов, которыми они могут самостоятельно распоряжаться, значительно увеличивается. В дополнение к сказанному следует указать еще на два обстоятельства. Во-первых, в рассматриваемых системах, как правило, оказывается существенным наличие межэлементных взаимодействий: действия одного элемента влияют не только на его собственный выигрыш, но и на выигрыши других элементов. Во-вторых, в таких системах элементам нижних уровней известен закон управления, осуществляемый центром, т. е. способ формирования цен, планов и т. п. на основе поступающей информации. Все это, вместе взятое, позволяет охарактеризовать функционирование подобной системы как игру многих лиц (элементов), в которой есть выделенный метаигрок (ЦО), избирающий тот или иной закон управления и тем самым задающий игру (правила игры).

Задачу управления системой здесь можно понимать следующим образом. Центр стремится выбрать такой закон планирования, т. е. так определить игру между остальными элементами системы, чтобы в равновесной точке достигался максимум его собственного выиграша. Здесь по существу и начинаются принципиальные трудности. Если же стать на позиции классической теории игр, эти трудности становятся практически непреодолимыми. Дело в том, что в теории игр ни одно понятие решения игры (равновесие по Нэшу, оптимум по Парето, максимум гарантированного результата и т. п.) не обладает достаточной степенью разумности и общности, чтобы однозначно определить поведение игроков.

Тем не менее определенные соображения, выходящие за рамки теории игр, позволяют выделить среди всех определений решения игры равновесие по Нэшу, как наиболее соответствующее действительности в рассматриваемом классе систем. Эти соображения основываются на следующем довольно правдоподобном предположении. Из-за сложности игры и отсутствия информации о целевых функциях других элементов каждый элемент стремится двигаться в сторону увеличения своего выигрыша по собственной переменной. При довольно свободных ограничениях [2, 3] такая тактика обеспечивает сходимость коллективного поведения в точку Нэша. В пользу изложенной точки зрения говорят не только обнадеживающие теоретические результаты [2, 3], но и достаточно богатый экспериментальный материал, накопленный при проведении деловых игр [1].

Ориентируясь на то, что динамика коллективного поведения в системе имеет описанный выше характер, мы будем стремиться определить закон управления ЦО таким образом, чтобы в точке Нэша получающейся игры между элементами нижних уровней достигался максимум выигрыша центра. Дополнительным требованием при этом является глобальная устойчивость равновесия по Нэшу.

Поставленная на содержательном уровне задача в общем случае весьма сложна. Основные методологические аспекты ее решения будут проиллюстрированы здесь на достаточно простой модели распределения одномерного ресурса.

2. Задача распределения ресурса и принцип открытого управления

Пусть в каждый плановый период ЦО располагает запасом ресурса (сырья) R. Центральному органу подчинены n производителей, которые в дальнейшем мы будем называть также активными элементами (АЭ). ЦО выдает i-му АЭ ресурс в количестве $x_i \left(\sum_i^n x_i \leqslant R\right)$ по цене λ. Производственные возможности i-го АЭ характеризуются функцией $y_i=\varphi_i(x_i)$, т. е. i-й АЭ, получив ресурс в количестве x_i, в состоянии произвести выходной продукт в количестве $y_i=\varphi_i(x_i)$ (или меньше). Для простоты будем считать в дальнейшем, что $\varphi_i(x_i)$ измеряет выходной продукт в денежном выражении. Целевую функцию i-го АЭ можно представить в виде

(1) $$D_i=\varphi_i(x_i)-\lambda x_i.$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть

(2) $$D_i=r_i\sqrt{x_i}-\lambda x_i.$$

Система функционирует следующим образом. Центр требует, чтобы элементы сообщили значения своих коэффициентов эффективности производства r_i. Элементы сообщают величины s_i, которые, вообще говоря, могут быть не равны r_i. На основе информации, получаемой в виде вектора $s=\{s_1, \ldots, s_n\}$, центр производит распределение ресурса $x(s)=\{x_1(s), \ldots, x_n(s)\}$ и назначение цены $\lambda(s)$ (вид функций $x(s)$, $\lambda(s)$ элементам известен). Далее АЭ производят продукт, затем цикл повторяется снова.

В применении к рассмотренной модели принцип открытого управления [1] означает следующее. ЦО принимает за оценку целевой функции i-го АЭ его функцию предпочтения

$$\hat{D}_i=s_i\sqrt{x_i}-\lambda x_i, \tag{3}$$

после чего назначает цену λ и планы $\{x_i\}$ так, чтобы при данной цене функции предпочтения (3) (для всех i) достигали максимального значения по x_i, т. е.

$$s_i\sqrt{x_i}-\lambda x_i=\max_{0<z<\infty}(s_i\sqrt{z}-\lambda z). \tag{4}$$

Пусть центр стремится к максимизации суммарного дохода $\sum\limits_i^n r_i\sqrt{x_i}$. Не зная истинных значений r_i, ЦО принимает на этапе планирования за глобальную целевую функцию

$$\Phi=\sum_{i=1}^n s_i\sqrt{x_i}\to\max \tag{5}$$

и определяет цену λ и планы $\{x_i\}$ из решения задачи максимизации (5) при огрничениях (4) и

$$\sum_{i=1}^n x_i\leqslant R. \tag{6}$$

Решение задачи (4)—(6) имеет вид

$$x_i=\frac{s_i^2 R}{\sum\limits_{j=1}^n s_j^2},\qquad \lambda=\frac{1}{2\sqrt{R}}\sqrt{\sum_{j=1}^n s_j^2}. \tag{7}$$

Процедура планирования (7) известна элементам, поэтому каждый АЭ знает свою функцию выигрыша как функцию вектора s

$$D_i=r_i\sqrt{x_i}-\lambda x_i=\sqrt{\frac{R}{\sum\limits_j s_j^2}}\left(s_ir_i-\frac{1}{2}s_j^2\right). \tag{8}$$

Таким образом, фиксация закона управления (7) на верхнем уровне определяет игру между элементами нижнего уровня с функциями выигрыша (8). Пусть $0<a_i\leqslant s_i\leqslant b_i$; $b_i\geqslant r_i$. Равновесие по Нэшу данной игры определяется системой уравнений $\dfrac{\partial D_i}{\partial s_i}=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, которая после элементарных преобразований приводится к виду

$$\sum_{j\neq 1}^n s_j^2(r_i-s_i)=\frac{1}{2}s_i^3\quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Анализируя систему (9), легко убедиться, что она имеет единственное решение $s_i^*\in(0, r_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Перейдем к рассмотрению динамики коллективного поведения элементов и обоснованию глобальной устойчивости равновесной точки Нэша s^*. Пусть при заданном наборе $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$ наилучший ответ i-го АЭ есть $\hat{s}_i = \omega_i(s)$. Величина $\hat{s}_i$ определяется из решения уравнения

$$\sum_{j \neq i} s_j^2 (r_i - \hat{s}_i) = \frac{1}{2} \hat{s}_i^3. \tag{10}$$

Пусть в k-м периоде i-й АЭ применяет стратегию s_i^k. Предположим [2, 3], что в последующий период каждый АЭ смещается в сторону увеличения своего выигрыша по собственной переменной, т. е.

$$s_i^{k+1} = s_i^k + \gamma_i^k [\omega_i(s^k) - s_i^k], \quad 0 < \gamma_i^k \leqslant 1. \tag{11}$$

В данном случае игра является положительно монотонной [3], поскольку $\hat{s}_i$ возрастает с увеличением $\sum_{j \neq i} s_j^2$, что непосредственно видно из (10). Положительная же монотонность игры обеспечивает глобальную сходимость (11) к точке Нэша [3]. Помимо приведенного теоретического обоснования сходимости, которое базируется на предположении об индикаторном [3] характере поведения игроков (АЭ) (II), имеется экспериментальный материал [1], подтверждающий полученные выводы.

Перейдем теперь к оценке рассмотренного способа управления с точки зрения центра и постановке ряда вопросов, решение которых приводит к более общей точке зрения на проблему в целом. Во-первых, в данной задаче принцип открытого управления приводит к получению информации, близкой к достоверной, т. е. обеспечивает близость s^* и $r = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, в случае достаточно большого числа игроков. Действительно, пусть $n \to \infty$. Тогда из (9) следует

$$0 \leqslant \lim_{n \to \infty} (r_i - s_i) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{s_i^3}{\sum_{j \neq i} s_j^2} \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\max_i b_i\right)^3}{2(n-1)\left(\min_i a_i\right)^2} = 0. \tag{12}$$

Чтобы оценить быстроту сходимости s_i к r_i при увеличении n, можно рассмотреть простой пример n одинаковых АЭ: $r_i = r$. В этом случае решение системы (9) имеет вид

$$s_i = \frac{2n-2}{2n-1} r,$$

откуда видно, что уже при сравнительно небольшом числе игроков s_i мало отличаются от r_i.

В свою очередь близость информации к достоверной обеспечивает здесь близость распределения ресурса к оптимальному. В самом деле, решение задачи (7) есть не что иное, как максимизация (5) при ограничении (6). Определение цены как множителя Лагранжа (7) здесь автоматически обеспечивает выполнение условий совершенного согласования (4) [1]. Максимизация же (5) при s_i, близких к r_i, близка к максимизации истинной целевой функции центра

$$\Phi = \sum_i r_i \sqrt{x_i} \to \max. \tag{13}$$

Таким образом, результаты, к которым приводит принцип открытого управления в данной задаче, можно считать вполне удовлетворительными. Однако, учитывая модельный характер задачи и ориентируясь в то же время на отражение (хотя бы на модельном уровне) ряда специфических свойств, присущих реальным экономическим системам, следует обратить внимание на некоторые обстоятельства, обедняющие рассмотренную задачу в содержательном отношении. В первую очередь нужно отметить, что производственные возможности элементов $y_i=\varphi_i(x_i)$ могут быть не известны не только центру, но и самим элементам. Нетрудно представить себе ситуацию, когда элемент, работая в режиме, в котором он получает ресурс в размере $\tilde{x}_i$, может оценить возможности увеличения (или уменьшения) количества выходного продукта при малых измерениях $\tilde{x}_i$, но не в состоянии оценить последствий увеличения предоставляемого ему сырья в несколько раз, т. е. элемент может знать поведение функции $\varphi_i(x_i)$ лишь в некоторой малой окрестности точки, в которой он работает. При этом тем более трудно себе представить, что центр точно знает вид функций $\varphi_i(x_i)$ (например, $\varphi_i(x_i)=r_i\sqrt{x_i}$). Наконец, вполне естественным кажется вариант, когда функция $y_i=\varphi_i(x_i)$ вообще не существует, а существует лишь совместная плотность распределения y_i и x_i. В самом деле, размер выпуска продукции может зависеть не только от количества полученного сырья, но и от массы случайных факторов, начиная от поломок агрегатов и транспорта и кончая эпидемией гриппа.

Второй круг вопросов возникает в связи с попыткой приблизить модель к действительности в несколько ином направлении. Для пояснения сути дела вернемся на время к рассмотренному выше примеру. Пусть целевая функция центра имеет более общий вид

$$(14)\qquad \Phi=\sum_i V_i r_i\sqrt{x_i}\to\max,$$

где $\exists i,j:V_i\neq V_j$. Следовательно, закон управления при использовании принципа открытого управления здесь останется тем же (7) и будет снова давать распределение ресурса, близкое к оптимальному в системе с критерием (13), а не (14). Это происходит из-за того, что в соответствии с принципом открытого управления центр жертвует своими интересами (заботясь в первую очередь об интересах нижнего уровня) ради получения достоверной информации. Если в системе с критерием (13) ситуация была удовлетворительной, то здесь закономерно возникает вопрос: не существует ли более эффективного способа управления, который бы в равновесной точке обеспечивал центру больший выигрыш по (14)? Рассмотрение закона управления, в некотором смысле противоположного принципу открытого управления, когда центр задает распределение на основе максимизации $\sum_i V_i s_i\sqrt{x_i}$ при ограничении (6), показывает [4], что такой способ не дает выигрыша центру. Но это безусловно, в общем случае не решает вопроса, который можно было бы сформулировать так: какой закон управления обеспечивает ЦО наибольший выигрыш в стационарной точке?

Наконец, задачу ЦО можно понимать еще более широко. Рычагами управления ЦО можно считать не только выбор тех или иных процедур $x(s)=\{x_i(s)\}$, $\lambda(s)$, но и формирование у АЭ подходящих критериев (введение штрафов или премий и т. д.), введение между элементами дополнительных связей, предоставление АЭ новых степеней свободы и т. п. Короче говоря, задача управления центра здесь состоит в такой организации работы системы, чтобы в равновесной точке получающейся игры достигался максимум выигрыша ЦО. В этом смысле ЦО является метаигроком, который определяет игру (правила игры) между остальными элементами системы. Затронутые вопросы рассматриваются в следующих разделах.

3. Условие минимальной разумности управления

Вернемся к исходной постановке задачи распределения ресурса. Пусть целевой функцией i-го АЭ является (1), т. е. $D_i=\varphi_i(x_i)-\lambda x_i$, где $\varphi_i(x_i)$ монотонно возрастающая, строго выпуклая вверх функция. Для простоты предположим также, что $\varphi_i'(0)=\infty$, $\varphi_i(0)=0$.

Пусть целевой функцией ЦО служит

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} F_i [\varphi_i(x_i)] \to \max,$$

причем $F_i(\cdot)$ — монотонно возрастающие функции. За целевую функцию ЦО можно также принять $\Phi = \Phi(\varphi_i, \ldots, \varphi_n) \to \max$, где $\Phi(\tilde{\varphi}) > \Phi(\varphi)$, если $\forall i: \tilde{\varphi}_i \geqslant \varphi_i$; $\exists i: \tilde{\varphi}_i > \varphi_i$, что не меняет дальнейших рассуждений.

Управление системой происходит следующим образом. Каждый АЭ сообщает центру величину * $s_i \in [a_i, b_i]$, на основе вектора s центр производит распределение ресурса $\{x_i(s)\}$ и назначение цены $\lambda(s)$, причем i-му АЭ известны функции $x_i(s)$, $\lambda(s)$, а следовательно, известна собственная целевая функция как функция вектора s.

Попытаемся теперь сформулировать минимально разумные требования, которым должны удовлетворять функции $x_i(s)$, $\lambda(s)$.

Для каждого АЭ s_i является тем рычагом, меняя положение которого он меняет количество получаемого ресурса и цену. Вполне естественным выглядит требование монотонности соответствующих зависимостей, например

$$\forall i, s: \frac{\partial x_i}{\partial s_i} > 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} > 0. \tag{15}$$

Нарушение ограничений (15) может приводить к таким неблагоприятным последствиям, как неединственность решения, и некоторым другим.

Поскольку центр заранее не знает, какая точка s окажется равновесной, необходимо

$$\forall s: \sum_{i=1}^{n} x_i(s) = R, \tag{16}$$

иначе может оказаться, что в равновесной точке распределяется не весь ресурс и ЦО будет нести потери.

Очевидна также необходимость наличия взаимно-однозначной функциональной взаимосвязи между $x_i(s)$, s_i, $\lambda(s)$, т. е.

$$x_i(s) = \varkappa_i(s_i, \lambda(s)). \tag{17}$$

Если все АЭ, за исключением i-го, увеличивают величины s_j, то цена λ и x_j $(j \neq i)$ возрастают в силу (15), а в соответствии с (16) x_i уменьшается. Поэтому функция $\varkappa_i(s_i, \lambda)$ при любом фиксированном s_i строго убывает по λ, т. е. $\frac{\partial \varkappa_i}{\partial \lambda} < 0$. При этом $\exists \varepsilon > 0$: $\frac{\partial \varkappa_i(b_i, \lambda)}{\partial \lambda} \leqslant -\varepsilon$.

Заметим, наконец, что ограничения $s_i \in [a_i, b_i]$ не должны быть чересчур стеснительными, т. е. равновесие должно достигаться внутри области

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

В противном случае, не зная истинной информации о производственных возможностях АЭ, можно лишь нанести вред введением жестких необоснованных ограничений.

Если закон управления $x(s)$, $\lambda(s)$ удовлетворяет перечисленным выше требованиям, будем говорить, что он удовлетворяет условию минимальной разумности управления (МРУ). Хотя условие МРУ и сужает область поиска наилучшего решения, оно все-таки охватывает весьма широкий класс функций $x(s)$, $\lambda(s)$.

* Заметим, что в данном случае s_i является некоторой скалярной величиной, которая может и не иметь физического (экономического) смысла, как, например, коэффициент эффективности производства.

Однако оказывается справедливым довольно неожиданный результат: все законы МРУ в определенном смысле эквивалентны. Более точно. Равновесной точке s^* соответствует точка $\{x^*, \lambda^*\}$. При достаточно большом числе элементов переход от одного закона МРУ к другому дает сколь угодно малое изменение положения равновесия $\{x^*, \lambda^*\}$ (но не s^*). Распределение ресурса в системе при этом близко к оптимальному по критерию

(18) $$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \to max, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = R.$$

Приведем асимптотическую формулировку результата.

Теорема 1. При $n \to \infty$ любой закон управления, удовлетворяющий условию МРУ, в стационарной по Нэшу точке s^* дает оптимальное распределение ресурса x^* по критерию (18).

Для доказательства теоремы 1 удобно воспользоваться промежуточным результатом, который представляет самостоятельный интерес как пример точной формулировки утверждения о слабом влиянии.

Теорема 2. При $n \to \infty$ и одновременном росте R пропорционально n любой закон управления МРУ удовлетворяет условию

(19) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial\lambda}{\partial s_i} \Big/ \frac{\partial x_i}{\partial s_i} = 0,$$

при ограниченном ресурсе R и $n \to \infty$ имеет место

(20) $$\lim_{n\to\infty} x_i \frac{\partial\lambda}{\partial s_i} \Big/ \frac{\partial x_i}{\partial s_i} = 0.$$

Равенство (20) выполняется и в первом случае, когда R растет пропорционально n.

Теперь доказательство теоремы 1 предельно просто. В равновесной по Нэшу точке должно выполняться условие $\dfrac{\partial D_i}{\partial s_i} = 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, т. е.

$$\varphi_i'(x_i) \frac{\partial x_i}{\partial s_i} - \lambda \frac{\partial x_i}{\partial s_i} - x_i \frac{\partial\lambda}{\partial s_i} = 0$$

или в эквивалентной записи

(21) $$\varphi_i'(x_i) - \lambda = x_i \frac{\partial\lambda}{\partial s_i} \Big/ \frac{\partial x_i}{\partial s_i}.$$

Использование теоремы 2 завершает доказательство.

Динамику коллективного поведения элементов системы характеризует следующая теорема.

Теорема 3. Любой закон управления, удовлетворяющий условию МРУ, определяет в системе игру, равновесная по Нэшу точка которой глобально устойчива, если поведение элементов имеет индикаторный характер (11).

Попытаемся теперь разобраться, что же означает условие минимальной разумности управления и как строить законы МРУ. Пусть из $x_i = \varkappa_i(s_i, \lambda)$ следует $\lambda = \xi_i(s_i, x_i)$. Нетрудно понять, что закон МРУ есть не что иное, как принцип открытого управления с использованием функции предпочтения вида

(22) $$\hat{D}_i = \int_0^{s_i} \xi_i(\tau, x_i)\, d\tau - \lambda x_i.$$

где функции $\xi_i(s_i, x_i)$ положительны и монотонно убывают по x_i и s_i, а $\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_i}$ возрастает по x_i.

Таким образом, мы приходим к тому, что принцип открытого управления дает оптимальное распределение ресурса по критерию $\sum_i \varphi_i(x_i) \to \max$. При этом результат практически не зависит от того, какие выбраны функции предпочтения* $\hat{D}_i = \psi_i(s_i, x_i) - \lambda x_i$. Необходимость выбора функций предпочтения, адекватных реальным целевым функциям в том смысле, что $\exists s_i : \psi_i(s_i, x_i) = \varphi_i(x_i)$, возникает в том случае, когда действительно существует коэффициент r_i типа эффективности производства и требуется его точно знать (например, для прогноза выхода системы). В этом случае задание $\psi_i(s_i, x_i) = \varphi_i(r_i, x_i)$ дает наилучшие результаты.

Если функция $\varphi_i(x_i)$ неизвестна не только центру, но и i-му АЭ, однако АЭ знает ее поведение в малой окрестности рабочей точки (на что указывалось выше), то и тогда остаются справедливыми все изложенные результаты. Дело в том, что знание поведения $\varphi_i(x_i)$ в малой окрестности рабочей точки достаточно АЭ для определения того, в какую сторону двигаться в соответствии с (11). Для уточнения, необходимо лишь ввести дополнительное предположение, что смещение элементов по s_i происходит без перерегулировки, т. е. γ_i^k остаются меньшими 1, хотя положение цели $\omega_i(s^k)$ из-за отсутствия полной информации о $\varphi_i(x_i)$ неизвестно. Это означает, что элементы ведут себя более или менее осторожно.

Изложенные выше результаты остаются справедливыми и в том случае, когда существует лишь совместная плотность распределения y_i и x_i $\rho_i(x_i, y_i)$, а АЭ стремится к максимизации условного математического ожидания выигрыша, т. е.

$$D_i = \int_{-\infty}^{\infty} y_i \rho_i (y_i / x_i)\, dy_i - \lambda x_i \to \max, \tag{23}$$

где $\rho_i(y_i/x_i)$ — условная плотность распределения, а кривая регрессии

$$\chi_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} y_i \rho_i (y_i / x_i)\, dy_i$$

удовлетворяет тем же условиям, что и $\varphi_i(x_i)$.

4. Критериальное управление

Итак, в конечном итоге мы приходим к следующему выводу. Как бы минимально разумно ни управлял центр, в системе установится равновесное распределение, близкое к оптимальному по критерию $\sum_i \varphi_i(x_i) \to \max$, а не (14). Возникает закономерный вопрос: возможны ли иные способы увеличения эффективности работы системы? Да, возможны, и наиболее простым и естественным представляется выход из положения, состоящий в том, чтобы платить элементам не пропорционально $\varphi_i(x_i)$, а пропорционально их действительному вкладу в доход всей системы, т. е. $F_i[\varphi_i(x_i)]$. В этом случае целевые функции АЭ будут иметь вид

$$D_i = F_i[\varphi_i(x_i)] - \lambda x_i,$$

а равновесное распределение будет близко к оптимальному по истинному критерию (14).

Такой способ есть уже не что иное, как критериальное управление: центр в первую очередь заботится о формировании у АЭ подходящих критериев с помощью установления разумной системы оплаты и лишь затем о выборе законов управления $x(s)$, $\lambda(s)$.

* С точностью до условий: $\psi_i(s_i, x_i)$ возрастают по x_i и s_i и выпуклы вверх по x_i.

На практике можно использовать гораздо более широкий диапазон возможностей видоизменения критериев АЭ. Один из возможных путей заключается здесь во введении штрафов (или премий). Пусть например, $D_i=\varphi_i(r_i, x_i)-\lambda x_i$, а функция предпочтения задается в виде $\hat{D}_i=\varphi_i(s_i, x_i)-\lambda x_i$. В данном случае ЦО знает вид функции $y_i=\varphi_i(r_i, x_i)$ и в конце планового периода по выходу продукции y_i может рассчитать r_i и наложить на i-й АЭ штраф за отклонение s_i от r_i (например, $\alpha|s_i-r_i|$). Критерий АЭ теперь уже будет выглядеть иначе:

$$D_i=\varphi_i(r_i, x_i)-\lambda x_i-\alpha|s_i-r_i|. \tag{24}$$

Введение в целевую функцию АЭ дополнительного члена $\alpha|s_i-r_i|$, явно стимулирующее сближение s_i и r_i, на первый взгляд представляется весьма универсальным средством для получения достоверной информации. Однако его использование имеет некоторые отрицательные последствия и ограниченную сферу применимости. Дело в том, что использование штрафов приводит к необходимости рассматривать в качестве стратегии i-го АЭ не только s_i, но и r_i (АЭ может работать ниже своих предельных возможностей). Это приводит к необходимости вводить ограничения на α, для чего в свою очередь необходима определенная априорная информация, которой ЦО не всегда располагает. Конкретный вид ограничений на α приводится в [1].

Поскольку выше была затронута возможность вычисления центром истинного значения r_i по истечении планового периода, уделим несколько слов этому вопросу, предваряя стандартное возражение, которое обычно здесь выдвигается. Имеется в виду следующее возражение: если в какой-то момент центр определяет все r_i, то дальше он может прекратить игру и просто решать задачу максимизации своей целевой функции.

Сразу следует сказать, что такая возможность отсутствует в общем случае, когда центр не знает вида функции $\varphi_i(\cdot)$. Но это не главное. Если даже существует возможность определять r_i, то ее чересчур прямолинейное использование (указанным выше способом) идет вразрез с развиваемой здесь идеологией. На самом деле коэффициенты r_i могут расти с течением времени (расширение производства, увеличение производительности труда и т. д.). Если при этом центр начнет «задним числом» рассчитывать коэффициенты r_i, то элементам (осознавшим «обманный» характер управления) может оказаться выгоднее работать ниже своих предельных возможностей. Таким образом, хотя рассматриваемая в работе модель имеет статический характер, исследование ориентируется на случай, когда характеристики АЭ изменяются, но более медленно, чем происходят процессы установления равновесия в системе.

По поводу критериального управления с помощью штрафов следует добавить, что такой способ может быть использован и в том случае, когда нет возможности определить r_i. Штраф при этом можно определять как $\alpha|\varphi_i(x_i)-\psi_i(s_i, x_i)|$, но это предъявляет довольно жесткие требования к выбору функций $\psi_i(s_i, x_i)$.

Новые возможности увеличения эффективности управления дает введение дополнительных рычагов управления. Можно, например, ввести переменную цену μ на выходной продукт и определить ее из условия постоянства суммарной прибыли элементов

$$\mu\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i)-\lambda R=M. \tag{25}$$

При этом получается игра с общей кассой и у элементов пропадает общая цель добиться понижения цены на ресурс λ. В ряде случаев [1, 4] такой способ обеспечивает получение истинной информации.

5. Трехуровневая модель

За неимением места опишем лишь в общих чертах сравнительно простую трехуровневую модель распределения ресурса. Пусть элементы нижнего уровня (производители) A_i ($i=1, 2, \ldots, n$) разбиты на m групп: $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Группа G_k подчинена элементу Γ_k, который осуществляет (информационную) связь между ЦО и подчиненными ему A_i. ЦО продает Γ_k ресурс в количестве X_k по цене $\lambda\left(\sum_k X_k \leqslant R\right)$, Γ_k продает ресурс элементам $i \in G_k$ (i-му в количестве x_i) по цене μ_k, при этом, очевидно, $\sum_{i \in G_k} x_i \leqslant X_k$.

Пусть ЦО и элементы Γ_k производят распределение ресурса и назначение цен в соответствии с принципом открытого управления, целевые функции A_i имеют вид (2), их функции предпочтения имеют вид (3) (с заменой λ на μ_k), и целевые функции элементов Γ_k имеют вид

(26) $$\eta_k = \sum_{i \in G_k} r_i \sqrt{x_i} - \lambda X_k.$$

Функции предпочтения Γ_k задаются центром и имеют вид

(27) $$\hat{\eta}_k = \tau_k \sqrt{X_k} - \lambda X_k.$$

Нетрудно показать, что при использовании элементами Γ_k принципа открытого управления их истинные целевые функции (26) оказываются равными

(28) $$\eta_k = \left(\sum_{i \in G_k} r_i s_i \Big/ \sqrt{\sum_{j \in G_k} s_j^2}\right) \sqrt{X_k} - \lambda X_k,$$

т. е. получается, что Γ_k имеют в каждом плановом периоде истинный коэффициент эффективности

$$\tilde{\tau}_k = \rho_k = \sum_{i \in G_k} r_i s_i \Big/ \sqrt{\sum_{i \in G_k} s_i^2},$$

но не знают его, поскольку не знают значений r_i. Можно рассматривать также вариант, когда Γ_k определяют r_i по истечении плановых периодов, но процедура управления остается прежней.

Функции выигрыша в игре, получающейся между элементами $\{\Gamma_k\}$, $\{A_i\}$ как функции стратегий $\{\tau_k\}$, $\{s_i\}$, имеют вид

(29) $$\forall k,\ i \in G_k: D_i = \sqrt{\frac{R}{\sum_{j \in G_k} s_j^2 \sum_p \tau_p^2}}\ \tau_k \left(s_i^2 - \frac{1}{2} s_i r_i\right),$$

(30) $$\forall k: \eta_k = \sqrt{\frac{R}{\sum_p \tau_p^2}} \left(\tau_k^2 - \frac{1}{2} \tau_k \sum_{i \in G_k} r_i s_i \Big/ \sqrt{\sum_{i \in G_k} s_i^2}\right).$$

Анализ игры с функциями выигрыша (29), (30) показывает, что при достаточно большом числе игроков распределение ресурса в равновесии будет сколь угодно близко к оптимальному по критерию (13). Этот результат остается справедливым и в том случае, если функции предпочтения задаются неправильно (на всех уровнях), т. е. управление носит минимально разумный характер. Примечательно, что здесь агрегирование информации практически не приводит к потерям.

6. Заключение

Анализ рассмотренного выше примера довольно отчетливо выявляет тот факт, что сущность предлагаемого метаигрового подхода к управлению иерархическими системами состоит не столько в определении наилучших способов формирования цен, планов и т. п., сколько в методологии анализа поведения элементов и синтеза системы в единое целое. С самого начала задача выглядит так: есть совокупность элементов, которые способны что-то делать (вырабатывать, перерабатывать продукты, выполнять те или иные заказы и т. д.), при этом у элементов нет никаких целевых функций. Центральный орган, не знающий истинных возможностей элементов, но имеющий об этом качественные представления, устанавливает систему оплаты (при этом у АЭ появляются целевые функции) и так организует функционирование системы, чтобы в равновесной точке получающейся игры достигался максимум целевой функции ЦО. Существенную роль при этом играет наличие правильного представления о характере поведения элементов в игровой ситуации, без чего невозможно разумное определение и обоснование устойчивости равновесия.

Несмотря на то что предлагаемая точка зрения не связывается с рассмотрением тех или иных частных задач, просмотр достаточно широкого класса моделей показывает, что в самых различных случаях здесь имеется нечто общее и это общее заключается в следующем. Во всех моделях, как правило, управляющие воздействия ЦО подразделяются на индивидуализированные (типа x_i) и общие для всех АЭ (типа λ). При этом оказываются справедливыми вариации теорем 1 и 2, т. е. теорем о слабом влиянии и о квазиинвариантности (о нечувствительности положения равновесия к способу минимального разумного управления).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Закон минимально разумного управления удовлетворяет системе уравнений

(П.1) $$\forall i: x_i(s)=\varkappa_i(s_i, \lambda(s)),$$

(П.1) $$\sum_{j=1}^{n} x_j(s) = R.$$

Пусть i-й АЭ изменил s_i на малую величину Δs_i. Тогда новая система уравнений примет вид

$$x_i = \varkappa_i(s_i, \lambda) + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial s_i}\Delta s_i,$$

(П.2) $$x_j=\varkappa_j(s_j, \lambda) \qquad (j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = R.$$

Если для (П.1) решение λ^* получалось из решения уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n} \varkappa_i(s_i, \lambda^*)=nR$, то для (П.2) решение $\lambda^*+\Delta\lambda$ даст уравнение

$$\sum_j \varkappa_j(s_j, \lambda^*+\Delta\lambda) + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial s_i}\Delta s_i = nR$$

или

$$\sum_j \varkappa_j(s_j, \lambda^*) + \sum_j \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial s_i}\Delta s_i = nR,$$

откуда

(П.3) $$\Delta\lambda = -\left(\frac{\partial \varkappa_i}{\partial s_i} \Big/ \sum_j \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}\right)\Delta s_i.$$

Далее

$$\Delta x_i = \frac{\partial \varkappa_i}{\partial s_i}\Delta s_i + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial \lambda}\Delta\lambda = \frac{\partial \varkappa_i}{\partial s_i}\left(1 + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial \lambda} \Big/ \sum_j \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}\right)\Delta s_i$$

и, наконец,

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta s_i} \Big/ \frac{\Delta x_i}{\Delta s_i} = -\frac{1}{\sum\limits_j \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}\left(1 + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial \lambda} \Big/ \sum\limits_j \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}\right)}. \tag{П.4}$$

Теперь предельный переход дает (19). Соотношение (20) доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 3. Если в ситуации, характеризуемой набором стратегий $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$, i-й АЭ применяет оптимальную стратегию s_i, то увеличение s_j на малые величины Δs_j приводит к

$$\Delta x_i = \sum_{j\neq i} \frac{\partial \varkappa_i}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s_j}\Delta s_j, \tag{П.5}$$
$$\Delta\lambda = -\sum_{j\neq i} \frac{\partial \varkappa_j}{\partial s_j}\Delta s_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}.$$

Изменение положения максимума D_i по x_i происходит при этом на величину

$$\Delta \tilde{x}_i = \Delta\lambda \Big/ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_i^2} = -\sum_{j\neq i} \frac{\partial \varkappa_j}{\partial s_j}\Delta s_j \Big/ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_i^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}. \tag{П.6}$$

Поскольку при достаточно большом числе элементов $\Delta\tilde{x}_i \leqslant \Delta x_i (|\Delta\tilde{x}_i| \geqslant |\Delta x_i|)$ (что нетрудно показать), игра является положительно монотонной и, в соответствии с [3], ее положение равновесия глобально устойчивым.

Поступила в редакцию
26 марта 1973 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Активные системы. М., изд. ИАТ, 1973.
2. *Малишевский А. В.* Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов. I, II. Автоматика и телемеханика, № 11, 12, 1972.
3. *Опойцев В. И.* Динамика коллективного поведения в гомогенных системах. Тр. Всес. школы-семинара по управлению большими системами, Тбилиси, 1972. «Мецниереба», 1973.
4. *Емельянов С. В., Бурков В. Н., Опойцев В. И.* Управление активными системами. Тр. Всес. школы-семинара по управлению большими системами, Тбилиси, 1972. «Мецниереба», 1973.

A META-PLAY APPROACH TO CONTROL OF HIERARCHICAL SYSTEMS

V. N. BURKOV, V. I. OPOITSEV

In the hierarchical system described in the paper the single upper level element is a meta-player who sets the rules of game between other elements of the system. The procedure is described with control of a single-dimensional resource as an example. It is required that rules of the game be found at which the maximal gain of the upper level element is obtained in the equilibrium point.