В. В. Кондратьев

СОГЛАСОВАННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ АДАПТИВНОМ СПОСОБЕ ФОРМИРОВАНИЯ ДАННЫХ

Под адаптивным понимают способ формирования данных, при котором необходимую для планирования информацию о системе управляющий орган получает на основе анализа предшествующих периодов функционирования. В реальных экономических системах такой способ формирования данных встречается достаточно часто; вспомним, например, "планирование от достигнутого". Задача управления активными системами (АС) при адаптивном способе формирования данных обсуждалась в [I]. В данной работе продолжается обсуждение вопросов управления АС при адаптивном способе формирования данных, - рассматриваются возможности согласованного планирования. Для иллюстрации используется задача распределения ресурса в АС [I].

I. Задача распределения ресурса при адаптивном способе формирования данных

В двухуровневой активной системе ресурс в количестве R распределяется центром между n потребителями - активными элементами (АЭ). Время функционирования системы разбито на периоды $T = 1, 2, 3, \ldots$. Для периода функционирования с номером k будем обозначать:

x_i^k - количество ресурса, выделяемое i-ому АЭ:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k \leq R \quad ;$$

λ^k - цена единицы ресурса;

$W_i(x_i^k, \tau_i^k)$ - функция эффективности, а τ_i^k - значение коэффициента эффективности переработки ресурса i-ым элементом, $\tau_i^k \in \Omega_i = [\tau_{i_{min}}, \tau_{i_{max}}]$. Функция $W_i(x_i^k, \tau_i^k)$ характеризует производственные возможности i-ого АЭ: i-ый элемент получив ресурс в количестве x_i^k производит продукт в количестве $W_i(x_i^k, \tau_i^k)$.

В дальнейшем будем считать, что функция $W_i(x_i^k, r_i^k)$ измеряет выходной продукт в денежном отношении; тогда $W_i(x_i^k, r_i^k)$ есть доход i-ого элемента от переработки ресурса в количестве x_i^k. В примерах, для простоты, будем везде полагать

$$W_i(x_i^k, r_i^k) = r_i^k \sqrt{x_i^k}.$$

$\Phi(x^k, r^k)$ – функция дохода АС в целом; строго монотонно возрастающая функция по своим переменным; здесь $r^k = \{r_i^k, i=1,2,\dots,n\}$, $x^k = \{x_i^k, i=1,2,\dots,n\}$. Рассмотрим k-ый период функционирования АС. При планировании распределения ресурса центр сталкивается с проблемой построения оценок (прогноза) S_i^k параметров r_i^k для k-ого периода функционирования, $i=1,2,\dots,n$. При адаптивном способе формирования данных оценка S_i^k строится исходя из проявленных значений r_i^q, $q=k-1, k-2,\dots$ в прошлых периодах функционирования системы. Пусть, например, за оценку S_i^k центр принимает значение коэффициента эффективности r_i^{k-1}, проявленное i-ым элементом в $(k-1)$ периоде функционирования, т.е. $S_i^k = r_i^{k-1}$, $i=1,2,\dots,n$.

На этапе планирования центр на основании полученных оценок $S^k = \{S_i^k\}$ определяет план $x^k = \{x_i(S^k)\}$ и управление $\lambda^k = \lambda(S^k)$ по некоторому закону управления $\pi(S) = [x(S), \lambda(S)]$. В работе анализируются законы управления, порождаемые принципом согласованного управления (ПСУ) [I]–[2]. В случае задачи распределения ресурса применение ПСУ дает следующий закон установления плана $x(S)$ и управления $\lambda(S)$:

$$\Phi(x, S) \to max, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = R, \qquad (I)$$

$$\Psi_i(\lambda, x_i, S_i) = \max_{0<z<\infty} \Psi_i(\lambda, z, S_i), \quad i=1,2,\dots,n. \qquad (2)$$

Здесь $\Psi_i(\lambda, x_i, S_i)$ – функция предпочтения элементов. Условия (2) отражают требование согласования интересов центра и элементов и называются условиями согласования.

На этапе реализации каждый элемент перерабатывает полученный ресурс x_i^k с некоторым коэффициентом эффективности r_i^k, в результате чего получают прибыль, равную

$$\varphi_i(\lambda^k, x_i^k, r_i^k) = W_i[x_i(S^k), r_i^k] - \lambda(S^k) \cdot x_i(S^k).$$

Видно, что в каждом периоде функционирования выбор активным элементом реализации $W_i(x_i^k, r_i^k)$ (определяемой при заданном плане x_i^k значением r_i^k) влияет на будущую оценку S_i^{k+1} и, следовательно, на его будущую прибыль. Согласно аксиоме активного поведения [I], АЭ учитывает последствия предпринимаемых действий, а значит в его целевую функцию в период k должна входить прибыль его будущих периодов. Примем, что целевая функция i-ого активного элемента в период k имеет вид:

$$\eta_i^k = \varphi_i(\lambda^k, x_i^k, r_i^k) + \sum_{q=k+1}^{q=k+N_i} \varphi_i(\lambda^q, x_i^q, r_i^q). \qquad (3)$$

Число N_i, равное числу будущих периодов функционирования, учитываемых АЭ при выборе реализации, называется степенью дальновидности i-ого элемента [I].

В реальных экономических системах закон планирования, устанавливаемый центром, фиксирован и известен элементам нижнего уровня. При фиксированном законе управления $\pi(s)$ функционирование АС можно рассматривать как многошаговую игру n лиц с непротивоположными интересами. Стратегиями элементов в игре являются выбираемые на этапе реализации плана значения коэффициентов эффективности r_i^k, $i=1,2,\ldots,n$, а целевые функции имеют вид (3).

Методика исследования получающейся игры заключается в следующем. Исследователь, предполагая стремление элементов принимать оптимальные решения, определяет правило выбора стратегий элементами в игре (поведенческую модель). Затем ищутся ситуации равновесия, которые являются глобально устойчивыми при выбранной поведенческой модели элементов. Естественно выбрать такие равновесия ситуации в качестве решений соответствующей игры.

<u>Задача центра</u> заключается в определении закона управления, который обеспечивает: устойчивое функционирование АС, т.е. существование глобально устойчивой ситуации равновесия; достоверность сообщаемой в ситуации равновесия ин-

формации $s^* = \tau$; и при этих условиях максимум целевой функции центра в ситуации равновесия.

Отметим, что выбор закона управления задает правила игры и центр можно охарактеризовать как метаигрока, решающего задачу метаигрового управления [3] .

2. Модель индикаторного поведения

Итак, в разбираемой системе активный элемент "смотрит вперед" на N_i периодов и пытается определить набор стратегий $\{\tau_i^k, \tau_i^{k+1}, \dots, \tau_i^{k+N_i}\}$,который максимизирует критерий (3). Вообще говоря, чтобы определить оптимальный набор стратегий, элемент должен иметь информацию о стратегиях других игроков на N_i периодов вперед. В общем случае этого ожидать трудно. При отсутствии у активного элемента информации о будущих стратегиях других элементов представляется разумной следующая модель поведения АЭ. Активный элемент i ,считая оценки s_i^k остальных активных элементов сохраняющимися в будущие периоды функционирования, выбирает в k -ом периоде функционирования стратегию τ_i^k и предполагает сохранять ее неизменной в течение будущих N_i периодов. Целевая функция элемента, который ориентируется на это представление, имеет вид

$$\eta_i^k(s^k, \tau_i^k) = \varphi_i\left[\lambda(s^k), x_i(s^k), \tau_i^k\right] + N_i\, \varphi_i\left[\lambda(s^k(i)), x_i(s^k(i)), \tau_i^k\right], \quad (4)$$

где $s^k(i) = \left\{ s_1^k, \dots, s_{i-1}^k, \tau_i^k, s_{i+1}^k, \dots, s_n^k \right\}$.

Видно, что целевая функция (4) i -ого АЭ в период k параметрически зависит от τ_i^k: $\eta_i^k(s^k, \tau_i^k)$. Поэтому можно принять, что выбор значения τ_i^k определяется или параметрической оптимизацией $\eta_i(s^k, \tau_i^k)$ по τ_i^k : $\tau_i = \hat{\tau}_i^k$, где $\hat{\tau}_i^k$: $\eta_i(s^k, \hat{\tau}_i^k) = \max\limits_{z \in \Omega_i} \eta_i(s^k, z)$,или индикаторным образом [4] ,если элемент по каким-либо причинам [4] имеет возможность определить по своей переменной τ_i^k только направление движения к текущей цели $\hat{\tau}_i^k$.

В $(k+1)$ периоде функционирования описанная партия игры повторяется.

Исследование вопросов существования, единственности и глобальной устойчивости ситуации равновесия в такой игре сводится к исследованию вопросов динамики коллективного поведения [4] элементов с целевыми функциями (4). Последние результаты в этой области [4] указывают на возможность успешного применения развиваемого в работах по динамике коллективного поведения аппарата для исследования этих вопросов.

3. Модель индикаторного поведения АЭ с фиксированным положением цели: $\tau_i^k = \tau_{i\,max}$ для $\forall k$

Поскольку целевая функция каждого элемента (4) зависит от неизвестной центру степени дальновидности элемента N_i, то центру не известен вид целевых функций элементов, даже если ему известен вид функций прибыли.

Попытаемся определить законы управления, при которых поведенческая модель элементов не зависит (или слабо зависит) от степени дальновидности.

Ориентируясь на это соображение, а также на необходимость получения в ситуации равновесия достоверной информации, можно потребовать от закона управления выполнения следующего условия x)

$$\text{для } \forall s \in \Omega: \frac{d\varphi_i[\lambda(s), x_i(s), s_i]}{d s_i} > 0, \text{ где } \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

---

x) Это условие является также достаточным для существования и глобальной устойчивости единственной ситуации равновесия $s^* = \tau$ в АС с сильными штрафами и встречным способом формирования данных [I]. Поэтому приведенное здесь изложение может быть ориентировано и на этот случай.

или в другой записи

$$\text{для } \forall s \subset \Omega : \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} > 0 \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{5}$$

Если закон управления $\pi(s)$ удовлетворяет этим условиям, то текущее положение цели для описанной выше модели индикаторного поведения становится очевидным: $\hat{\tau}_i^k = \tau_{i\,max}$. При этом существует единственная ситуация равновесия $\{ s_i^* = \tau_{i\,max} \}$ и сходимость стратегий элементов в ситуацию равновесия происходит за один период функционирования АС.

Рассмотрим законы согласованного управления (СУ). Относительно закона СУ будем предполагать, что рассматриваемые законы СУ удовлетворяют условию слабого влияния (т.е. при увеличении числа элементов n : $\frac{\partial \lambda}{\partial s_i} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ для $\forall i$ [3]), а также $\frac{\partial x_i}{\partial s_i} \geqslant 0$ для $\forall i$. Последнее условие означает, что при увеличении оценки эффективности переработки ресурса i-ым АЭ, выделяемое ему количество ресурса не уменьшается. Заметим, что в случае выполнения условия слабого влияния условия (5) при достаточно большом числе элементов с большой степенью точности можно переписать следующим образом:

$$\text{для } \forall s \in \Omega : \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} > 0 , \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{6}$$

Ниже мы рассмотрим способы и задачи синтеза таких законов СУ, которые обеспечивают выполнение (5) и при этом условии в ситуации равновесия $s^* = \tau$ максимизируют значение целевой функции центра.

I°. Принцип открытого управления (ПОУ) есть принцип согласованного управления с функциями предпочтения $\Psi_i(\lambda, x_i, s_i) = W_i(x_i, s_i) - \lambda \cdot x_i$, $i = 1,2,\dots,n$. Соответствующие условия согласования имеют вид

$$\varphi_i(\lambda, x_i, s_i) = \max_{0 < \bar{x} < \infty} \varphi_i(\lambda, \bar{x}, s_i) , \quad i = 1,2,\dots,n.$$

При заданных s_i и λ будем обозначать через $x_i(\lambda, s_i)_{max}$ значение x_i , при котором достигается максимум функции

прибыли i-ого элемента. Просто доказать, что $x_i(\lambda, s_i)_{max}$ существует и единственно. Поэтому условия согласования можно записать так

$$x_i(s) = x_i[\lambda(s), s_i]_{max}, \; i = 1,2,\dots,n. \quad (7)$$

Легко видеть, что закон управления, порождаемый ПОУ, удовлетворяет условию (5). Доказательство выполнения условий слабого влияния и $\frac{\partial x_i}{\partial s_i} \geqslant 0, i=1,2,\dots,n$ можно найти в [3]. Таким образом, ПОУ обеспечивает существование и глобальную устойчивость единственной ситуации равновесия $s^* = \tau$. Более того, для закона ОУ условие (6) выполняется с некоторым "запасом" и может оказаться, что требование выполнения условия слабого влияния не является обязательным (т.е. глобальная устойчивость ситуации равновесия $s^* = \tau$ обеспечивается при любом числе элементов). Понятно, что в этом случае вместо условий (6) необходимо проверять условия

$$\text{для } \forall s \in \Omega : \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} > 0, \; i = 1,2,\dots,n \quad (8)$$

Пример I. Пусть целевая функция центра есть $\Phi = \sum_{i=1}^{n} W_i(x_i, \tau_i)$, т.е. целью системы является максимизация суммарного дохода АС. Определим, при каком минимальном числе элементов n выполняются условия (8). Имеем:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial s_i} = \sqrt{x_i}\left(1 - \sqrt{x_i}\,\frac{\partial \lambda}{\partial s_i}\right) > 0, \quad i = 1,2,\dots,n \quad (9)$$

ПОУ для нашей задачи порождает закон управления

$$x_i(s) = \frac{s_i^2}{\sum_{i=1}^{n} s_i^2} R, \; i = 1,2,\dots,n; \; \lambda(s) = \frac{1}{2\sqrt{R}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}.$$

Имея это в виду, получаем, что условия (9) эквивалентны следующим условиям

$$\text{для } \forall s \in \Omega : 1 > \frac{1}{2} \cdot \frac{s_i^2}{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Последнее неравенство выполняется при любом числе элементов n в системе. Следовательно, при любом числе элементов в системе закон ОУ обеспечивает существование и глобальную устойчивость единственной ситуации равновесия $s^* = \tau$. Значение целевой функции системы в ситуации равновесия равно оптимальному.

В общем случае из-за условий согласования закон ОУ не обеспечивает достижение максимума целевой функции центра даже при условии достоверной информации. С целью увеличения значения целевой функции центра в ситуации равновесия можно попытаться ослабить условия согласования при условии выполнения (6). В связи с этим при исследовании конкретных моделей АС возникает вопрос о том, "в какую сторону ослаблять" условия согласования, чтобы увеличить в ситуации равновесия $s^* = \tau$ значение целевой функции центра. Другой важный вопрос, как можно добиться расширения условий согласования (7) при условии выполнения (6). Ниже мы рассмотрим возможности расширения условий согласования (7).

2^0. Зададим закон управления $\pi(s) = [x(s), \lambda(s)]$ следующим образом: максимизировать (I) при условиях

$$x_i \leqslant x_i(\lambda, s_i)_{max}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (10)$$

Эти условия, по сути дела, есть условия согласования с функциями предпочтения

$$\psi_i(\lambda, x_i, s_i) = 1\left[x_i(\lambda, s_i)_{max} - x_i\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (11)$$

где $1[z] = 1$ при $z \geqslant 0$ и $1[z] = 0$ при $z < 0$. Так как в силу (10) для $\forall s \in \Omega$: $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \geqslant 0$, то для закона СУ с функциями предпочтения (11) имеет место (6). Условия согласования (10) являются "менее стеснительными", чем условие согласования в случае законов ОУ (7). Это позволяет в ряде случаев увеличить значение целевой функции центра в ситуации равновесия $s^* = \tau$. Эту возможность хорошо иллюстрирует следующий пример.

Пример 2. Пусть целевая функция центра имеет вид ж)

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i W_i(x_i, \tau_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{4} W_i(x_i, \tau_i) + \sum_{i=m+1}^{2m} W_i(x_i, \tau_i).$$

Коэффициенты γ_i характеризуют вклад в доход системы единицы стоимости полученной i-ым элементом. Запишем закон СУ с функциями предпочтения (II)

$$x_i(S) = \frac{1}{4\lambda^2(S)} \cdot \left(\frac{S_i}{4}\right)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad x_i(S) = \frac{1}{4\lambda^2(S)} \cdot S_i^2,$$

$$i = (m+1), (m+2), \ldots, 2m;$$

$$\lambda(S) = \frac{1}{2\sqrt{R}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{S_i}{4}\right)^2 + \sum_{i=m+1}^{2m} S_i^2}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что условия $\frac{\partial \lambda}{\partial S_i} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ и $\frac{\partial x_i}{\partial S_i} > 0$ выполняются, а значит выполняется и (6). Посчитаем для сравнения значение целевой функции в ситуации равновесия для законов СУ и ОУ. Для простоты положим $\tau_i = const$ для всех i. Тогда

$$\Phi_{СУ} = \Phi_{опт}, \quad \Phi_{ОУ} \approx 0{,}85\, \Phi_{опт}.$$

ж) В случае аддитивной целевой функции центра $\Phi = \sum_{i=1}^{n} f_i[W_i(x_i, \tau_i)]$ для достижения оптимального функционирования системы $\Phi(x^*, \tau) = \Phi_{опт}$ можно применить критериальное управление [5]. Достаточно организовать систему оплаты так, чтобы элементы получали доход пропорционально $f_i[W_i(x_i, \tau_i)]$, т.е. $\varphi_i = f_i[W_i(x_i, \tau_i)] - \lambda x_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Однако в данной работе не ставится целью выбрать оптимальный механизм функционирования в том или ином модельном примере, а имеется ввиду проследить возможности управления с помощью выбора закона СУ.

Достаточно просто убедиться и в том, что в данном примере можно не требовать выполнения условия слабого влияния.

3°. Другой способ ослабления условий согласования ОУ (7) состоит в применении законов ε-согласования. Законы ε-согласования порождаются ПСУ с функциями предпочтения вида

$$\psi_i(\lambda, x_i, s_i) = 1\left[\varphi_i(\lambda, x_i, s_i) - \varepsilon \max_{0<z<\infty} \varphi_i(\lambda, z, s_i)\right], \quad 1 \geq \varepsilon > 0.$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Условие согласования с такими функциями предпочтения можно записать следующим образом

$$\varphi_i(\lambda, x_i, s_i) \geq \varepsilon \max_{0<z<\infty} \varphi_i(\lambda, z, s_i), \quad 1 \geq \varepsilon > 0. \qquad (12)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Условие ε-согласования задает для каждого элемента $x_i(\lambda, s_i, \varepsilon)_{min}$ и $x_i(\lambda, s_i, \varepsilon)_{max}$ такие, что для $\forall x_i \in [x_i(\lambda, s_i, \varepsilon)_{min}, x_i(\lambda, s_i, \varepsilon)_{max}]$ выполняется (12). Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то

$$[x_i(\lambda, s_i, \varepsilon_2)_{min}, x_i(\lambda, s_i, \varepsilon_2)_{max}] \in [x_i(\lambda, s_i, \varepsilon_1)_{min}, x_i(\lambda, s_i, \varepsilon_1)_{max}].$$

При $\varepsilon = 1$ имеем ПОУ. Проблема здесь состоит в определении минимального ε при котором (6) еще выполняется. Возможность увеличения эффективности функционирования АС с помощью применения законов ε-согласования иллюстрирует

<u>Пример 3.</u> Целевая функция центра есть

$\Phi(x, \tau) = \sum_{i=1}^{m} W_i(x_i, \tau_i) + 2\sum_{i=m+1}^{2m} W_i(x_i, \tau_i)$. Закон установления ε-согласованного плана $x(s)$ и управления $\lambda(s)$ определяется здесь из решения следующей задачи

$$\sum_{i=1}^{m} s_i\sqrt{x_i} + 2\sum_{i=m+1}^{2m} s_i\sqrt{x_i} \longrightarrow \max, \sum_{i=1}^{2m} x_i(s) = R;$$

$$x_i(s) = \frac{s_i^2}{4\lambda^2}; \quad \frac{s_i^2}{4\lambda^2}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)^2 \leq x_i(s) \leq \frac{s_i^2}{4\lambda^2}\left(1+\sqrt{1-\varepsilon}\right)^2$$
$$i = 1, 2, \ldots, m \qquad i = (m+1), (m+2), \ldots, 2m.$$

Отсюда получаем выражения для $x(s)$ и $\lambda(s)$:

$$x_i(s) = \frac{s_i^2}{4\lambda^2}; \quad x_i(s) = \frac{s_i^2}{4\lambda^2}\left(1+\sqrt{1-\varepsilon}\right)^2$$
$$i = 1, 2, \ldots, m \qquad i = (m+1), (m+2), \ldots, 2m$$

$$\lambda(s)=\frac{1}{2\sqrt{k}}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}s_i^2+\left(1+\sqrt{1-\varepsilon}\right)^2\sum_{i=m+1}^{2m}s_i^2},$$

Видно, что $\frac{\partial\lambda}{\partial s_i}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ и $\frac{\partial x_i}{\partial s_i}>0$. Подставляя выражения для $x_i(s)$ в (6), получаем, что неравенство (6) эквивалентно следующему $1>\sqrt{1-\varepsilon}$. Последнее выполняется для $\forall\varepsilon\in(0,1]$. Легко проверить, что выбирая малые ε мы можем обеспечить близкое к оптимальному функционирование АС, в то время как $\Phi_{оу}\approx 0{,}95\,\Phi_{опт}$ ($\tau_i=const$ для $\forall i$).

4^0. Если удалось найти $\varepsilon\in(0,1]$, при котором неравенство (6) имеет место, то для улучшения эффективности закона СУ можно воспользоваться тем же приемом, что и в 2^0. Заменим условия ε-согласования (I2) на условия согласования с функциями предпочтения

$$\Psi_i(\lambda,x_i,s_i)=1\left[x_i(\lambda,s_i,\varepsilon)_{max}-x_i\right]. \qquad (I3)$$

Условия согласования в этом случае можно записать как:

$$x_i(s)\leqslant x_i(\lambda,s_i,\varepsilon)_{max}\ ,\quad i=1,2,\dots,n\ .$$

Видно, что эти условия ослабляют ограничения (I2) на множество согласованных планов и, в то же время, обеспечивают выполнение (6). Поэтому применение функций предпочтения (I3) может привести к увеличению значения целевой функции АС в точке равновесия по сравнению с применением соответствующего закона ε-согласования.

5^0. Законы СУ с гарантированным согласованием целей. Условия гарантированного согласования целей имеют вид [2]:

$$\varphi_i(\lambda,x_i,s_i)\geqslant g_i\ ,\quad i=1,2,\dots,n$$

и гарантируют i-ому элементу назначение плана, при котором функция прибыли принимает значение не менее некоторого заранее оговоренного уровня. Проблема здесь заключается в определении минимального уровня $g_{i_{min}}$ для каждого i, при котором неравенство (6) выполняется. Если удалось найти $g_{i_{min}}$, то можно строить законы СУ аналогично тому, как это делалось в 3^0 и 4^0.

6°. Законы минимально разумного управления (МРУ), порождаемые ПСУ с функциями предпочтения

$$\Psi_i(\lambda, x_i, s_i) = \chi_i(x_i, s_i) - \lambda x_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Условия на $\chi_i(x_i, s_i)$, достаточные для выполнения условий МРУ, приведены в [3]. Отметим, что в классе законов МРУ условие слабого влияния и условие $\frac{\partial x_i}{\partial s_i} > 0$ всегда выполняются [3].

Нетрудно показать, что для законов МРУ, удовлетворяющих (6), в ситуации равновесия $s^* = r$ достигается максимум по критерию $\sum_{i=1}^{n} \chi_i(x_i, r_i) \to max$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = R$, а не по $\Phi(x, r) \to max$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = R$.

Имея это ввиду, задачу выбора оптимального закона МРУ можно сформулировать следующим образом. Определить функции предпочтения элементов $\Psi_i(\lambda, x_i, s_i) = \chi_i(x_i, s_i) - \lambda x_i$ такие, что соответствующий закон $\pi(s)$ согласованного управления порождает закон МРУ, удовлетворяет условию (6); и при этом оптимизирует критерий

$$\max_{x_\pi} \left| \Phi(x, r) - \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x_i, r_i) \right| \xrightarrow[\pi]{} min. \qquad (14)$$

Можно привести следующее условие, достаточное для выполнения (6)

для $\forall s \in \Omega : \frac{\partial \chi_i(x_i, s_i)}{\partial x_i} \leqslant \frac{\partial \Psi_i(x_i, s_i)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (15)

Действительно, это условие является достаточным для выполнения (10), которое, в свою очередь, достаточно для выполнения (6).

Проиллюстрируем применение закона СУ, удовлетворяющего условиям (14), (15). Для этого возвратимся к примеру 2. Построим закон МРУ, порождаемый принципом согласованного управления со следующими функциями предпочтения АЭ:

$$\Psi_i = \frac{1}{4} s_i \sqrt{x_i} - \lambda x_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, m; \ \Psi_i = s_i \sqrt{x_i} - \lambda x_i \ , \ i = (m+1), (m+2), \ldots, 2m$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что такой закон МРУ для рассматриваемой модели АС обеспечивает выполнение

условия (I5) и оптимальное значение критерия (I4), следовательно, и оптимальное функционирование АС.

Пример 4. Пусть $\Phi = \sum_{i=1}^{m} W_i(x_i, \tau_i) + 4\sum_{i=(m+1)}^{2m} W_i(x_i, \tau_i)$.
Выберем в качестве функций предпочтения элементов
$\Psi_i = W_i(x_i, \tau_i) - \lambda x_i$, $i = 1,2,\dots,m$; $\Psi_i = 4W_i(x_i, \tau_i) - \lambda x_i$, $i = (m+1), (m+2), \dots, 2m$;
Закон СУ имеет вид

$$x_i(S) = \frac{S_i^2}{4\lambda^2(S)}, \quad i = 1,2,\dots,m; \quad x_i(S) = \frac{(4S_i)^2}{4\lambda^2(S)}, \quad i = (m+1), (m+2), \dots, 2m$$

$$\lambda(S) = \frac{1}{2\sqrt{R}}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} S_i^2 + 16\sum_{i=m+1}^{2m} S_i^2}.$$

Нетрудно проверить, что условие (6) для этого закона СУ выполняется, хотя (I5) не имеет места. Значение целевой функции центра в ситуации равновесия равно оптимальному. Если бы мы ограничились выбором функций предпочтения, удовлетворяющих (I5), то в данном примере оптимального значения целевой функции центра в ситуации равновесия достигнуть бы не удалось. В связи с этим возникает проблема определения более общих условий на функции предпочтения $\Psi_i = \chi_i(x_i, S_i) - \lambda x_i$, $i = 1,2,\dots,n$, достаточных для выполнения (6).

Разобранные здесь примеры, хотя и имеют модельный характер, позволяют сделать ряд содержательных выводов относительно согласованного управления при адаптивном способе формирования данных. Во-первых, если закон управления удовлетворяет условию (6), то, по сути дела, как центр, так и элементы имеют исчерпывающее представление об оптимальном индикаторном поведении. Это существенно упрощает выбор элементами стратегий в игре с позиций их "субъективного восприятия игры", а значит и повышает уверенность в разумности их действий. Во-вторых, выполнение условия (6) обеспечивает существование, единственность и глобальную устойчивость ситуации равновесия $S^* = \tau$, причем, при оптимальном индикаторном поведении элементов сходимость в ситуацию равновесия $S^* = \tau$ наблюдается за один период функционирования АС. Это позволяет эффективно управлять АС в случае, когда значения коэффициентов τ_i и запас ресурса R изменяются с

течением времени; применение законов управления, удовлетворяющих (6) обеспечивает достоверность информации и в этом случае.

Далее достаточно просто убедиться в том, что законы ОУ удовлетворяют условию (6) и в многомерных "выпуклых" моделях типа "распределения ресурсов", "назначения плана", "производители-потребители" [I]. При этом может оказаться, что для выполнения условия (6) не обязательно требовать выполнения условия слабого влияния и, следовательно, наличие достаточно большого числа элементов в системе. В случае, когда ПОУ не обеспечивает оптимального значения целевой функции центра в ситуации равновесия, то существует возможность увеличения эффективности закона управления путем перехода к различным вариантам законов СУ.

4. Принцип гарантированного результата

В играх с непротивоположными интересами принцип гарантированного результата известен как достаточно разумная модель рационального "осторожного" поведения игроков [5]. В ряде случаев могут выдвигаться и дополнительные соображения в пользу этой модели поведения. Так линейные модели активных систем [I], [3], являются примером моделей, в которых следование тактике индикаторного поведения встречает трудности при определении улучшающих стратегий τ_i^k. Причинами этого могут быть неединственность положения цели, разрывность функций-индикаторов по переменным или по агрегатам от переменных [4], разрывность агрегатов по своим переменным и др. Рациональное поведение элементов в этом случае становится "более осторожным" и начинает определяться принципом гарантированного результата. Поэтому интересно определить эффективность законов СУ в предположении, что поведение элементов нижнего уровня определяется принципом гарантированного результата. Здесь мы исследуем эффективность законов ε-согласования.

Гарантирующий набор стратегий i-ого элемента $\{\tau_i^k, \tau_i^{k+1}, \ldots, \tau_i^{k+N_i}\}$ определяется как набор стратегий, максимизирующий гарантированное значение его целе-

вой функции (3). Гарантированное значение целевой функции (3) равно

$$\min_{\{S^{k+1}(i),\dots,S^{k+N_i}(i)\}} \left\{ \varphi_i\left[\lambda(s^k), x_i(s^k), \tau_i^k\right] + \sum_{\rho=k+1}^{k+N_i} \varphi_i\left[\lambda(s^\rho), x_i(s^\rho), \tau_i^\rho\right] \right\} =$$

$$= \varphi_i\left[\lambda(s^k), x_i(s^k), \tau_i^k\right] + \min_{\{S^{k+1}(i),\dots,S^{k+N_i}(i)\}} \left\{ \sum_{\rho=k+1}^{k+N_i} \varphi_i\left[\lambda(s^\rho), x_i(s^\rho), \tau_i^\rho\right] \right\},$$

где $S^\rho(i) = \left\{ s_1^\rho, \dots, s_{i-1}^\rho, s_{i+1}^\rho, \dots, s_n^\rho \right\}$ $s^\rho = \left\{ s_1^\rho, \dots, s_{i-1}^\rho, \tau_i^{\rho-1}, s_i^\rho, \dots, s_n^\rho \right\}$.

Будем предполагать, что выполняется условие слабого влияния в формулировке [2], т.е. каждый элемент может ожидать назначения любого управления $\lambda \in \mathcal{L}$ и любого плана $x_i \in A_i(\lambda, s_i, \varepsilon)$ вне зависимости от сообщаемой им величины s_i. Здесь $\mathcal{L}$ – множество возможных управлений, $A_i(\lambda, s_i, \varepsilon)$ – множество планов, удовлетворяющих условию ε-согласования (I2). В предположении выполнения условия слабого влияния гарантированный выигрыш будет равен

$$\varphi_i\left[\lambda(s^k), x_i(s^k), \tau_i^k\right] + N_i \min_{\lambda \in \mathcal{L}} \min_{x_i \in A_i(\lambda, s_i, \varepsilon)} \varphi_i(\lambda, x_i, \tau_i^{k+1}). \qquad (I6)$$

Найдем набор стратегий i-ого элемента, максимизирующего его гарантированный выигрыш (I6). Предполагая строгое возрастание функций $\varphi_i(\lambda, x_i, \tau_i)$ по τ_i, получаем:

$$\max_{\tau_i^k \in \Omega_i} \varphi_i\left[\lambda(s^k), x_i(s^k), \tau_i^k\right] = \varphi_i\left[\lambda(s^k), x_i(s^k), \tau_{i_{max}}\right].$$

Максимум второго члена суммы (I6) также достигается при $\tau_i^{k+1} = \tau_{i_{max}}$ для $\forall \varepsilon \in (0,1]$.

ж) Доказательство для достаточно общего случая в связи с определением гарантирующих стратегий для ε-согласованных законов управления в АС с сильными штрафами и встречным способом формирования данных будет приведено в другой работе.

Таким образом, набор гарантирующих стратегий i-ого элемента есть $\{ \tau_{i_{max}}^{p}, p = k, k+1, \dots, k+N_i \}$, для $\forall \varepsilon \in (0,1]$. Выбирая малые значения ε, можно обеспечить близость к оптимальному значения целевой функции центра. Отметим, что вопрос выбора величины ε связан с вопросом о правомерности выбора принципа гарантированного результата в качестве поведенческой модели.

5. Заключение

Остановимся на вопросах адаптивного согласованного планирования, которые остались за рамками обсуждения.

Наряду с рассмотренными известны и другие способы адаптивного формирования данных. Например, в случае "планирования от среднего показателя" оценка S_i^{k+1} выбирается как средняя эффективность, проявленная за m последних периодов функционирования: $S_i^{k+1} = \left(\sum_{q=1}^{m} \tau_i^{k-(m+1)+q} \right) / m$, а в случае "планирования" от достигнутого": $S_i^{k} = \max_{1 \le p \le k-1} \tau_i^{p}$. Поэтому интересно проанализировать различные способы адаптивного формирования данных.

Важно определять в том или ином случае влияние на эффективность законов управления неопределенности, связанной с незнанием степени дальновидности элементов. Незнание степени дальновидности элементов связано как с незнанием самой величины N_i, так и с возможностью изменения N_i от одного периода функционирования к другому.

Не единственным является и представление (3) целевых функций элементов при адаптивном способе формирования данных. Так, в экономических работах, представления целевой функции подсистемы в период k дается как взвешенная сумма прибыли в настоящем и будущих периодах

$$\eta^k = \varphi_i(\lambda^k, x_i^k, \tau_i^k) + \sum_{q=k+1}^{\infty} \delta_i^{q-k} \varphi_i(\lambda^q, x_i^q, \tau_i^q),$$

Коэфициент $\delta_i : 1 > \delta_i \geq 0$ характеризует степень дальновидности активного элемента и называется коэффициентом дисконтирования.

В качестве целевой функции i-ого АЭ в период k можно предположить также

$$\eta_k = \min_{q \geq k} \delta^{q-k} \varphi_i(\lambda^q, x_i^q, r_i^q).$$

При рассмотрении моделей АС может возникнуть необходимость анализа функционирования АС при других поведенческих моделях АЭ. Так, более оптимальной (но зато и более трудно реализуемой в вычислительном аспекте с позиций субъективного восприятия игры элементом) может быть правило поведения i-ого элемента оптимизирующая (или улучшающая по сравнению с (4)) критерий (3) при условии что i-ый элемент предполагает на следующие N_i периодов постоянными стратегиями остальных элементов, но не свои. Наконец, в рамках одной активной системы разные элементы могут придерживаться разных правил рационального поведения. Это связано с тем, что в играх с непротивоположными интересами, как правило, не существует оптимального правила выбора стратегий элементами [5] и может оказаться, что в игре можно предложить несколько правил рационального выбора стратегий.

Литература

1. Сб. "Активные системы". М., ИАТ, 1973.
2. "Активные системы". Сб. статей № 2, М., ИАТ, 1974.
3. Бурков В.Н., Опойцев В.И. Метаигровой подход к управлению иерархическими системами. "Автоматика и телемеханика", 1974, № 1.
4. Опойцев В.И. Динамика коллективного поведения. I–III. "Автоматика и телемеханика", 1974, № 4, 1975, № 1.
5. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А., Ерешко Ф.И., Кононенко А.Ф. Игры с непротивоположными интересами. Труды Всесоюзной школы-семинара по управлению большими системами. Тбилиси, "Мецниереба", 1972.

УДК 330.115

Теория активных систем (обзор). Емельянов С.В., Бурков В.Н. Согласованное управление. Сборник статей. М., ИАТ, 1975.

Дается аксиоматика теории активных систем и приводятся основные результаты. Библ. наим. 50.

УДК 330.115

Согласованное планирование в активных системах при адаптивном способе формирования данных. Кондратьев В.В. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается ряд задач согласованного планирования в активных системах при адаптивном способе формирования данных. Приводятся достаточные условия, обеспечивающие достоверность сообщаемой элементами информации. Библ. наим. 5.

УДК 330.115

Управление стохастическими активными системами. Бурков В.Н., Ивановский А.Г., Бексеитов Ж.И. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается проблема стимулирования в стохастических активных системах. Приводится краткий обзор результатов в этой области, дается постановка задачи, исследуется проблема достоверности информации для случая многомерных активных элементов. Библ. наим. 9.

УДК 330.115

Обобщенные оценки в законах управления активными системами. Щепкин А.В. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается управление активной системой на основе обобщенных оценок. Изучается динамика поведения активных элементов, входящих в систему. Илл. 2, библ. наим. 5.

УДК 330.115

Задачи синтеза иерархических систем управления. Рубинштейн М.И. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Дается формализация и приближенный алгоритм решения задачи синтеза иерархических систем управления.