ИННОВАЦИИ В СОДЕРЖАНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРАЩЕНИЙ ВЕЛИЧИН

С.Л. Блюмин
Профессор Липецкого государственного технического университета

Показано, как важная составляющая инноваций в образовании – введение актуальных современных прикладных научных представлений в содержание образовательных дисциплин – может быть реализована на примере одной из центральных в образовательных программах дисциплин – дисциплины «Математическое моделирование» – и на примере таких актуальных видов прикладного анализа, как когнитивный, консенсусный и экономический анализ.

Введение

Инновации в образовании чаще всего понимаются как использование современных образовательных, в первую очередь информационных, технологий в сопровождении образовательного процесса. Важной составляющей инноваций в образовании является введение актуальных современных прикладных научных представлений в содержание образовательных дисциплин. Одной из подходящих для этой цели является дисциплина «Математическое моделирование», присутствующая (иногда под несколько измененными названиями) и часто являющаяся центральной в образовательных программах практически всех направлений подготовки и специальностей. Обычно речь идет о математических моделях, связывающих величины – характеристики, факторы, показатели, параметры, состояния и пр., характеризующие моделируемые объекты, процессы, ситуации, системы и пр.

В различных современных приложениях представляют интерес математические модели не для самих величин, а для их приращений. Эти модели строятся как на основе моделей для величин, так и непосредственно. Примерами таких прикладных областей могут служить когнитивный анализ, консенсусный анализ, экономический анализ (см., например, [1–3]). Классическим примером из фундаментальной математики является математический анализ и его основа – дифференциальное исчисление [4]. Однако для многих приложений более адекватным является дискретный подход [5–6].

Цель данной работы – показать, как базовые модели вышеуказанных видов прикладного анализа связаны с простейшей моделью дискретных распределенных систем, наиболее близких к сосредоточенным – базовой моделью 2D-систем, описывающей 2D-сигналы, и получаемыми на ее основе моделями для их приращений – вводимой, в качестве примера, в специальной дисциплине «Математическое моделирование» и детально изучаемой в специальной дисциплине «Математическая теория систем» специальности «Прикладная математика» Липецкого государственного технического университета.

2D-сигналы. Базовая модель 2D-системы. Простейшие модели для приращений

В соответствии с [7] носителем 2D-сигналов является двумерный дискретный аргумент A={a}, имеющий структуру $A=S\times T=\{[s,t], s,t\in \mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, **N** – множество натуральных чисел, геометрически представляемый первым квадрантом плоской целочисленной решетки. Составляющие s и t аргумента часто интерпретируются как пространственная и временная переменные.

2D-сигнал является действительным, вообще говоря, вектором: $x[a]=x[s,t]\in \mathbf{R}^n$ (в случае n=1 – скаляром). В соответствии со структурой носителя определены приращения сигнала:

- полное

$\Delta\{a;b\}x[a]=x[b]-x[a]=$
$=\Delta\{[s,t];[u,v]\}x[s,t]=x[u,v]-x[s,t];$

- частные

$\Delta\{[s,t];[u,t]\}x[s,t]=$
$=x[u,t]-x[s,t]=\Delta\{s;u\}x[s,t],$
$\Delta\{[s,t];[s,v]\}x[s,t]=$
$=x[s,v]-x[s,t]=\Delta\{t;v\}x[s,t];$

- одношаговые

$\Delta\{[s,t];[s+1,t+1]\}x[s,t]=$
$=x[s+1,t+1]-x[s,t]= \Delta\{[s,t]\}x[s,t],$
$\Delta\{[s,t];[s+1,t]\}x[s,t]=$
$=x[s+1,t]-x[s,t]=\Delta\{s\}x[s,t],$
$\Delta\{[s,t];[s,t+1]\}x[s,t]=$
$=x[s,t+1]-x[s,t]=\Delta\{t\}x[s,t].$

Базовая модель 2D-системы – минимальная модель распределенной дискретной автономной линейной пространственно-однородной временно-стационарной системы, отражающая ее динамику как в пространстве, так и во времени – принимается в виде [7]:

(1) $x[s+1,t+1]=W_1x[s+1,t]+W_2x[s,t+1],$

$W_1,W_2 \in\mathbf{R}^{n\times n}$ - некоторые матрицы.

Ей равносильны следующие варианты:

(1a) $x[s,t+1]=W_1x[s,t]+W_2x[s-1,t+1],$
(1b) $x[s+1,t]=W_1x[s+1,t-1]+W_2x[s,t],$
(1c) $x[s,t]=W_1x[s,t-1]+W_2x[s-1,t],$

Непосредственно на основе модели (1) могут быть получены выражения, содержащие приращения 2D-сигнала в левой части

$\Delta\{s\}x[s,t+1]=x[s+1,t+1]-x[s,t+1]=$
$=W_1x[s+1,t]+W_2x[s,t+1]-x[s,t+1]=$
$=W_1x[s+1,t]+(W_2-I)\, x[s,t+1],$
$\Delta\{t\}x[s+1,t]=x[s+1,t+1]-x[s+1,t]=$
$=W_1x[s+1,t]+W_2x[s,t+1]-x[s+1,t]=$

$=(W_1-I)x[s+1,t]+W_2\, x[s,t+1]$,
$\Delta\{[s,t]\}x[s,t]=x[s+1,t+1]-x[s,t]=$
$=W_1x[s+1,t]+W_2x[s,t+1]-x[s,t]$,
которые, строго говоря, нельзя считать моделями для приращений, так как они не содержат приращения в правой части.

Модели, связывающие приращения 2D-сигнала, то есть содержащие приращения как в левой, так и в правой части, могут быть получены на основе уравнений (1)-(1c):
$\Delta\{s\}x[s,t+1]=x[s+1,t+1]-x[s,t+1]=$
$=W_1x[s+1,t]+W_2x[s,t+1]-$
$-\ W_1x[s,t]-W_2x[s-1,t+1]=$
$=W_1\,\Delta\{s\}x[s,t]+W_2\,\Delta\{s\}x[s-1,t+1]$,
$\Delta\{t\}x[s+1,t]=x[s+1,t+1]-x[s+1,t]=$
$=W_1x[s+1,t]+W_2x[s,t+1]-$
$-\ W_1x[s+1,t-1]-W_2x[s,t]=$
$=W_1\,\Delta\{t\}x[s+1,t-1]+W_2\,\Delta\{t\}x[s,t]$,
$\Delta\{[s,t]\}x[s,t]=x[s+1,t+1]-x[s,t]=$
$=W_1x[s+1,t]+W_2x[s,t+1]-$
$-\ W_1x[s,t-1]-W_2x[s-1,t]=$
$=W_1\,\Delta\{[s,t]\}x[s,t-1]+W_2\,\Delta\{[s,t]\}x[s-1,t]$.

С целью интерпретации моделей для приращений базовую модель 2D-системы целесообразно в некоторых отношениях сузить, а в других отношениях – расширить.

Базовые модели когнитивного анализа

Базовая модель 1D-системы – минимальная модель сосредоточенной дискретной автономной линейной стационарной системы, отражающая ее динамику только во времени – имеет стандартный вид
$x[t+1]=Wx[t]$
и равносильный ему
$x[t]=Wx[t-1]$.

Получаемая на их основе модель для приращений
$\Delta x[t]=x[t+1]-x[t]=Wx[t]-Wx[t-1]=$
$=W(x[t]-x[t-1])=W\Delta x[t-1]$
допускает интерпретацию как базовая модель когнитивного анализа (см., например, [1]), которая в координатной записи имеет вид
$x_i[t+1]-x_i[t]=\Sigma_{j=1}^{n}\, w_{ij}(x_j[t]-x_j[t-1])$,
где x_i, $i=1,\ldots,n$, - факторы, описывающие моделируемую ситуацию или исследуемую систему, а элементы w_{ij} матрицы W интерпретируются как веса, отражающие непосредственное влияние j-го фактора на i-й.

Подобную же, причем даже более адекватную, интерпретацию допускает модель для приращений, построенная на основе модифицированной базовой модели 2D-системы, в которой более ограниченно (как в базовой модели 1D-системы) отражается динамика во времени, но более полно отражается динамика в пространстве в предположении конечности пространственной составляющей S аргумента:

$x[s,t+1]=\Sigma_{\sigma\in S}W[s,\sigma]x[\sigma,t]$.

Ей равносильна модель

$x[s,t]=\Sigma_{\sigma\in S} W[s,\sigma]x[\sigma,t-1]$.

В них и построенной на их основе модели для приращений

$\Delta\{t\}x[s,t]=x[s,t+1]-x[s,t]=$

$=\Sigma_{\sigma\in S}W[s,\sigma]x[\sigma,t]-\Sigma_{\sigma\in S}W[s,\sigma]x[\sigma,t-1]=$

$=\Sigma_{\sigma\in S}W[s,\sigma](x[\sigma,t]-x[\sigma,t-1])=$

$=\Sigma_{\sigma\in S}W[s,\sigma]\Delta\{t\}x[\sigma,t-1]$

роль векторных факторов играют состояния $x[s,\cdot]$, $s\in S$, а матрицы $W[s,\sigma]$ интерпретируются как весовые матрицы, отражающие непосредственное влияние векторного σ-го фактора на s-й.

В приведенных выше моделях для приращений в левой и правой частях уравнений присутствовали приращения по одним и тем же составляющим двумерного аргумента. Представляют интерес и модели, в разных частях уравнений которых присутствуют приращения по разным составляющим двумерного аргумента.

Базовая модель консенсусного анализа

Следующая модель для приращений 2D-сигнала отличается от последней из приведенных выше тем, что в разных частях ее уравнения присутствуют приращения по разным составляющим двумерного аргумента, а также тем, что она не может быть получена непосредственно на основе модифицированной модели 2D-системы:

$\Delta\{t\}x[s,t]=x[s,t+1]-x[s,t]=$

$=\Sigma_{\sigma\in S}W[s,\sigma](x[\sigma,t]-x[s,t])=$

$=\Sigma_{\sigma\in S}W[s,\sigma]\Delta\{s;\sigma\}x[s,t]$.

Она допускает интерпретацию как базовая модель консенсусного анализа, или анализа согласования характеристик в многоагентных системах при децентрализованном управлении ими, когда управляющие воздействия не поступают из центра, а формируются в результате согласований, «переговоров» между агентами (см., например, [2]), если надлежащим образом интерпретировать матрицы $W[s,\sigma]$. Так, в простейшем случае скалярного сигнала

$x[s,t+1]-x[s,t]=$

$=\Sigma_{\sigma\in S} w[s,\sigma](x[\sigma,t]-x[s,t])$

коэффициент $w[s,\sigma]$ интерпретируется как вес (включающий параметр ε), с которым в многоагентной системе s-й агент учитывает расхождение в значении характеристики $x[\cdot,\cdot]$ с σ-м агентом; эта модель обычно записывается в виде [2]

$x_i[t+1]-x_i[t]=\varepsilon\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j[t]-x_i[t])$.

Зависимые 2D-сигналы.
Базовые модели экономического анализа

До сих пор рассматривались математические модели для одной величины и ее приращений. В прикладных задачах естественный интерес представляют модели зависимостей одних величин – показателей, откликов – от влияющих на них других величин – факторов, а также модели для приращений этих величин.

Без учета структуры аргумента модель для зависимых величин записывается в обычном функциональном виде

$y[a]=f(x[a])\in \mathbf{R}$, $x[a]\in \mathbf{R}^n$, $f : \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,

а модель для их приращений – в одной из альтернативных форм

$y[b]-y[a]=f(x[b])-f(x[a])=$
$=F(a,b; x[b]-x[a])$,
$\Delta\{a,b\}y[a]=F(a,b; \Delta\{a,b\}x[a])$,

или, в распространенных упрощенных обозначениях

$x[a]=x^{(1)}$, $x[b]=x^{(2)}$, $\Delta x=x^{(2)}-x^{(1)}$,
$y[a]=y^{(1)}$, $y[b]=y^{(2)}$, $\Delta y=y^{(2)}-y^{(1)}$,

в форме

$\Delta y= y^{(2)}-y^{(1)}=F(x^{(2)}-x^{(1)})=F(\Delta x)$.

Часто постулируется линейная структура модели для приращений

$\Delta y=L^T\cdot\Delta x=$
$=[l_1\ldots l_n]\cdot[\Delta x_1\ldots\Delta x_n]^T=\Sigma_{i=1}^n\, l_i\cdot\Delta x_i$.

Она допускает интерпретацию как базовая модель экономического факторного анализа, задача которого состоит в том, чтобы по известной модели зависимости экономического показателя от влияющих на него факторов построить модель зависимости приращения этого показателя от приращений факторов [3,8].

С учетом структуры двумерного аргумента модель для величин принимает вид

$y[s,t]=f(x[s,t])\in \mathbf{R}$, $x[s,t]\in \mathbf{R}^n$,
$f : \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,

а модель для их приращений – формы

$y[u,v]-y[s,t]=f(x[u,v])-f(x[s,t)=$
$=F(s,t;u,v; x[u,v]-x[s,t])$,
$\Delta\{[s,t];[u,v]\}y[s,t]=$
$=F(s,t;u,v; \Delta\{[s,t];[u,v]\}x[s,t])$,

или, в упрощенных обозначениях

$x[s,t]=x^{(1)}[t]$, $x[u,t]=x^{(2)}[t]$,
$\Delta x[t]= x^{(2)}[t]- x^{(1)}[t]$,
$y[s,t]=y^{(1)}[t]$, $y[u,t]=y^{(2)}[t]$,
$\Delta y[t]= y^{(2)}[t]- y^{(1)}[t]$,

форму

$\Delta y[t]=F(t, \Delta x[t])$.

Модель линейной структуры для приращений в этом случае запишется в виде

$\Delta y[t]=L^T[t]\cdot\Delta x[t]=\Sigma_{i=1}^n l_i[t]\cdot\Delta x_i[t]$.

В случае конечного множества T может представить интерес построенная по набору последних моделей для $t\in T$ агрегирующая модель

$\Delta Y=\Sigma_{t\in T}\,\Delta y[t]=$

$=\Sigma_{t\in T}\,(\Sigma_{i=1}^n l_i[t]\cdot\Delta x_i[t])=$

$=\Sigma_{i=1}^n\,(\Sigma_{t\in T}\,l_i[t]\cdot\Delta x_i[t])=$

$=\Sigma_{i=1}^n k_i\cdot\Delta X_i=K^T\cdot\Delta X$,

которая допускает интерпретацию как одна из базовых моделей цепного динамического экономического факторного анализа [3,8].

Общая модель для приращений 2D-сигнала. Непрерывные аналоги

Следующая модель охватывает ряд вышеприведенных в качестве частных случаев при подходящем задании матричных коэффициентов:

$\Delta\{[s,t];[u,v]\}x[s,t]=x[u,v]-x[s,t]=$

$=\Sigma_{[\sigma,\tau]\in S\times T}\Sigma_{[\upsilon,\omega]\in S\times T}W[[s,t],[u,v];$

$[\sigma,\tau],[\upsilon,\omega]](x[\upsilon,\omega]-x[\sigma,\tau])=$

$=\Sigma_{[\sigma,\tau]\in S\times T}\Sigma_{[\upsilon,\omega]\in S\times T}W[[s,t],[u,v];$

$[\sigma,\tau],[\upsilon,\omega]]\Delta\{[\sigma,\tau];[\upsilon,\omega]\}x[\sigma,\tau]$,

$s,u\in S,\ t,v\in T$.

В ней предполагается, что конечны как пространственная, так и временная составляющие аргумента.

Модель может быть записана в более компактной форме, в которой составляющие конечного носителя A в явном виде не отражены:

$\Delta\{a,b\}x[a]=x[b]-x[a]=$

$=\Sigma_{\alpha\in A}\Sigma_{\beta\in A}W[a,b;\alpha,\beta](x[\beta]-x[\alpha])=$

$=\Sigma_{\alpha\in A}\Sigma_{\beta\in A}W[a,b;\alpha,\beta]\Delta\{\alpha,\beta\}x[\alpha]$,

$a,b\in A$.

Эта общая модель может допускать интерпретации, отличные от приведенных выше.

Непрерывный аналог этой модели может быть записан в виде

$x(b)-x(a)=$

$=\iint_{A\times A}W(a,b;\alpha,\beta)(x(\beta)-x(\alpha))d\alpha d\beta$,

где A – непрерывный носитель. Такие модели естественно рассматривать в контексте интегральных операторов [9].

Выше отмечалось, что базовая модель консенсусного анализа, как модель для приращений величин, не может быть получена непосредственно на основе моделей для самих величин. Представляет интерес трактовка аналога этого вопроса в контексте интегральных операторов. Пусть, в несколько измененных обозначениях,

$y(s)=\int_T k(s;t)x(t)dt,\ s\in S$,

$w(u)=\int_V l(u;v)z(v)dv,\ u\in U$, -

интегральные операторы с ядрами k(s;t) и l(u;v) соответственно. Пусть

$g(s,u)=w(u)-y(s)$, $f(t,v)=z(v)-x(t)$.
Вопрос сводится к тому, будет ли интегральным, и с каким ядром $m(s,u;t,v)$, оператор, преобразующий $f(t,v)$ в $g(s,u)$:
$g(s,u)=\iint_{T\times V} m(s,u;t,v)f(t,v)dtdv$,
а также – как построить ядро $m(s,u;t,v)$ по ядрам $k(s;t)$, $l(u,v)$. Ответ на эти вопросы должен содержаться в теории интегральных операторов.

Выше отмечалось, что моделирование приращений содержится уже в классическом математическом анализе. Действительно, для функции $y=f(x)\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}^n$, приближенная модель для приращения, использующая дифференциал, имеет вид
$\Delta y\approx dy=\nabla^T f(x^{(1)})\Delta x=$
$=\Sigma_{i=1}^n (\partial f(x^{(1)})/\partial x_i)\cdot\Delta x_i$,
а точная, использующая теорему Лагранжа о промежуточной точке, записывается в виде
$\Delta y=\nabla^T f(x_m)\Delta x=$
$=\Sigma_{i=1}^n (\partial f(x_m)/\partial x_i)\cdot\Delta x_i$;
В этих выражениях символ ∇ использован для обозначения градиента функции, а через x_m обозначена точка, промежуточная между $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Последняя модель эффективно используется в задачах экономического факторного анализа [8].

Выводы

Показано, как важная составляющая инноваций в образовании – введение актуальных современных прикладных научных представлений в содержание образовательных дисциплин – может быть реализована на примере одной из центральных в образовательных программах дисциплин – дисциплины «Математическое моделирование» – и на примере таких актуальных видов прикладного анализа, как когнитивный, консенсусный и экономический анализ. Существенным инновационным методическим аспектом являются прослеживаемые при этом взаимосвязи с другими дисциплинами, вплоть до таких фундаментальных, как математический анализ и теория интегральных операторов.

Приращения, или разности значений величин, являются их аддитивными алгебраическими различителями. В приложениях важны и мультипликативные алгебраические различители – частные, трактуемые, например, как индексы в экономическом факторном анализе – более подробно рассмотренные в [6,10] наряду с алгебраическими различителями, построенными на основе арифметических операций, отличных от обычных сложения и умножения.

Подобный материал может найти отражение в специальных и факультативных дисциплинах образовательных программ, в научно-исследовательской работе студентов, позволяя им уже на стадии получения высшего профессионального образования выйти за рамки традиционных представлений о возможностях математического моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Д.А. «Когнитивные игры»: линейная импульсная модель // Проблемы управления. 2008. № 3. С. 14 – 22.
2. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. 2008. № 12. С. 123 – 140.
3. Баканов М.И., Шеремет А.Д. Теория экономического анализа. М.: Финансы и статистика, 1997. – 416 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ: Учебник. М.: ВШ, 1997. – 687 с.
5. Блюмин С.Л. Дискретность против непрерывности при системном моделировании во времени и/или пространстве // Системы управления и информационные технологии. 2004. № 1(13). С. 4 – 9.
6. Блюмин С.Л. Дискретность против непрерывности в информационных технологиях: квантовое исчисление и его альтернативы // Системы управления и информационные технологии. 2008. № 1.2(31). С. 217 – 221.
7. Блюмин С.Л. Двумерные преобразования сигналов и анализ двумерных систем: Учебное пособие. Воронеж: ВПИ-ЛПИ, 1991. – 76 с.
8. Блюмин С.Л., Суханов В.Ф., Чеботарев С.В. Экономические производственные задачи: Учебное пособие. Липецк: ЛЭГИ, 2000. – 70 с.
9. Курбатов В.Г. Интегральные операторы: Учебное пособие. Липецк: ЛГТУ, 1998. – 100 с.
10. Блюмин С.Л. Бинарные арифметические операции, формулы конечных различений, функциональные уравнения гомоморфизмов // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2008. № 1. С. 38 – 42.