Российская Академия Наук
Институт проблем управления

Д. А. НОВИКОВ

СТИМУЛИРОВАНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(БАЗОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ)

Москва

1998

УДК 62 - 50
Н 73

Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах / Базовые математические модели. М.: Институт проблем управления РАН, 1998. - 216 с.

В монографии доктора технических наук Д.А.Новикова рассматриваются математические модели механизмов стимулирования в социально-экономических (активных) системах. Вводится система классификаций задач стимулирования; выделяется класс базовых моделей механизмов стимулирования (в двухуровневых, одноэлементных, статических системах), охватывающий основные известные модели стимулирования, изучаемые в теории активных систем, теории иерархических игр, теории контрактов и теории реализуемости. Приводятся результаты исследования задач анализа и синтеза оптимальных систем стимулирования и свойств оптимального решения.

Для специалистов по теории управления социально-экономическими системами, студентов ВУЗов и аспирантов соответствующих специальностей.

Рецензент: доктор технических наук, профессор В.Н.Бурков.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ. ПРОБЛЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Децентрализация управления экономикой, смена социальных и личностных приоритетов, многообразие и быстрое изменение условий функционирования экономических объектов и требований к результатам их деятельности, характерные для современного этапа перехода экономики России к рыночным условиям хозяйствования, требуют разработки новых эффективных механизмов решения социальных и экономических проблем. При этом возникает необходимость учета и согласования социального заказа и экономической коньюнктуры с одной стороны, и потребностей и интересов экономических агентов (человек, группа, коллектив, организация и т.д.) с другой. Неполная информированность элементов организационных систем о внешних и внутренних условиях их функционирования, подверженность результатов деятельности влиянию множества неконтролируемых и неопределенных факторов, в свою очередь, выдвигают требование учета существующей неопределенности и разработки механизмов управления в условиях неопределенности. Успешное решение этих и подобных задач подразумевает наличие эффективных методов анализа и синтеза организационных механизмов управления (в том числе стимулирования) социально-экономическими системами.

Важный класс механизмов организационного управления составляют механизмы стимулирования, служащие целям согласования интересов элементов социально-экономической системы и побуждения одних элементов к совершению определенных действий в интересах других элементов или системы в целом.

Механизмы стимулирования изучаются в теории управления, экономике, психологии, социологии и других отраслях науки. По "масштабу" предметов и методам исследования можно выделить следующие взаимосвязанные подходы:

- "макроэкономический", в котором изучаются рынки труда, взаимосвязь занятости с инфляцией и т.д. [59,62,71 и др.];
- "микроэкономический", в котором акцент делается на рассмотрение стимулирования в рамках организации (предприятия, ведомства, фирмы и т.д.), причем основой является анализ именно экономической деятельности [28,31,82,90,93,95 и др.];

- "агентный", в котором предметом исследований является человек, группа, коллектив и т.д. с их потребностями и интересами.

В рамках агентного подхода будем различать следующие направления:

- "менеджмента": совокупность систематизированных положений о наиболее эффективном управлении организацией, носящих обобщающий, эмпирический и интуитивный характер [29,39,72,78, 96,97 и др.];

- "психолого-социологическое", исследующее психические процессы мотивации деятельности человека или в более общем случае - деятельности групп и коллективов [20,30,37,57,81 и др.].

- "математическое", изучающее, как правило, математические аналоги реальных систем - формальные модели [12,22,63,92 и др.].

Конечно, упомянутые направления и выделенные подходы взаимосвязаны и взаимно используют результаты и метода друг друга. Однако, к сожалению, на сегодняшний день это взаимопроникновение недостаточно глубоко. Настоящая работа может быть условно отнесена к изложению результатов "математического" направления в исследовании стимулирования. Последнее является, пожалуй, наиболее конструктивным и верифицируемым, однако и оно зачастую страдает оторванностью от реальной жизни. Поэтому приводимые в настоящей работе результаты исследования теоретико-игровых моделей механизмов стимулирования в социально-экономических системах не следует рассматривать как исчерпывающие: успешное решение реальных проблем, то есть создание эффективной теории стимулирования возможно только совместными усилиями математиков, психологов, экономистов, социологов и т.д.

Перейдем к обсуждению роли моделирования. Сложность, а зачастую и невозможность, проведения на социально-экономических системах натурного эксперимента делает их моделирование одним из основных методов исследования. Применение математических моделей дает возможность оценить эффективность различных механизмов управления, решить задачи синтеза оптимальных механизмов, провести экспериментальное исследование (в том числе, путем игровых и имитационных экспериментов) и обучение управленческого персонала и лиц, принимающих решения.

Несмотря на большое число публикаций, посвященных исследованию механизмов стимулирования, на сегодняшний день, практически, отсутствуют как целостная картина возможных моделей стимулирования в социально-экономических системах (детерминированных и с неопределенностью) и единый методологический подход к их теоретическому исследованию и практическому применению, так и методы и алгоритмы решения для многих описанных в литературе задач стимулирования.

Поэтому целью настоящей работы является описание единого методологического подхода и теоретических основ построения эффективных механизмов стимулирования в социально-экономических системах, функционирующих в условиях неопределенности.

Изложение материала имеет следующую структуру. Во введении определяется используемое в настоящей работе понимание стимулирования и рассматриваются различные подходы к его изучению, а также обсуждаются проблемы стимулирования в социально-экономических системах: дается общая постановка теоретико-игровой задачи стимулирования, проводится классификация возможных моделей, качественно описывается методология решения задач анализа и синтеза систем стимулирования и приводится сводка основных результатов теоретического исследования математических моделей механизмов стимулирования в условиях неопределенности. В первой, второй, третьей и четвертой главах представлены механизмы стимулирования в, соответственно, детерминированных системах и системах с интервальной, вероятностной и нечеткой неопределенностью. Доказательства формальных результатов вынесены в приложение.

Используемый дедуктивный стиль изложения (от методологии - к конкретным результатам) рассчитан на максимально широкий (насколько это возможно для работы, содержащей описание математических моделей) круг читателей: прочтение введения, не требующего специальной математической подготовки читателя, дает возможность получить общее представление о возможностях и основных результатах использования математического моделирования как метода исследования механизмов стимулирования в социально-экономических системах; ознакомление с систематическим изложением результатов решения базовых задач стимулирования в главах 1 - 4 рассчитано на более подготовленного читателя;

детали, интересующие лишь специалистов по теоретико-игровым моделям функционирования организаций, вынесены в приложение.

Прежде, чем давать формальную постановку задачи стимулирования, определим корректно, что же в настоящее время понимается под стимулированием (в социально-экономических системах).

Под стимулированием в психологии в общем случае понимается внешнее воздействие на организм, личность или группу людей, отражаемое в виде психической реакции; побуждение к совершению некоторого действия (стимул - от латинского stimulus - остроконечная палка, которой погоняли животных; в психологии стимулирование - "воздействие, обусловливающее динамику психических состояний индивида, и относящееся к ней как причина к следствию" [35, С.343]).

Исследование стимулирования включает изучение поведения системы в отсутствии побуждения, анализ возможных реакций на те или иные воздействия, поиск воздействий, обеспечивающих совершение требуемых действий и выбор определенных состояний. Последний аспект соответствует управлению, понимаемому как целенаправленное воздействие на управляемую систему с целью обеспечения желательного ее поведения.

Рассмотрим социально-экономическую систему, состоящую из управляющего органа - центра и управляемого объекта, который мы условно будем называть активным элементом (АЭ). В качестве центра и АЭ могут выступать как отдельные люди, так и их группы, коллективы и т.д. Обобщение известных в психологии подходов к описанию структуры деятельности индивида [30,32,37], позволяет представить взаимодействие центра и активного элемента следующим образом - см. Рис.1. [15].

В процессе взаимодействия центра с онружающей средой формируется заказ (в том числе быть может социальный) - осознанная общественная или персонифицированная необходимость изменений и формулировка общих требований к этим изменениям. Относительная конкретизация этих требований с учетом мотивации приводит к формированию цели - осознанного образа предвосхищаемого результата деятельности. Соотнесенная с условиями, определенными внешней средой и другими участниками АС, и возможностями достижения, цель превращается в набор задач.

Последующие ответы на вопросы: "что?", "в каких формах?", "как?" и "с помощью чего?" следует делать для достижения цели, то есть выбор технологии: содержания, форм, методов и средств, соответственно, определяют результат деятельности. Самоуправление соответствует самостоятельной корректировке компонент деятельности с учетом сравнения результата и цели.

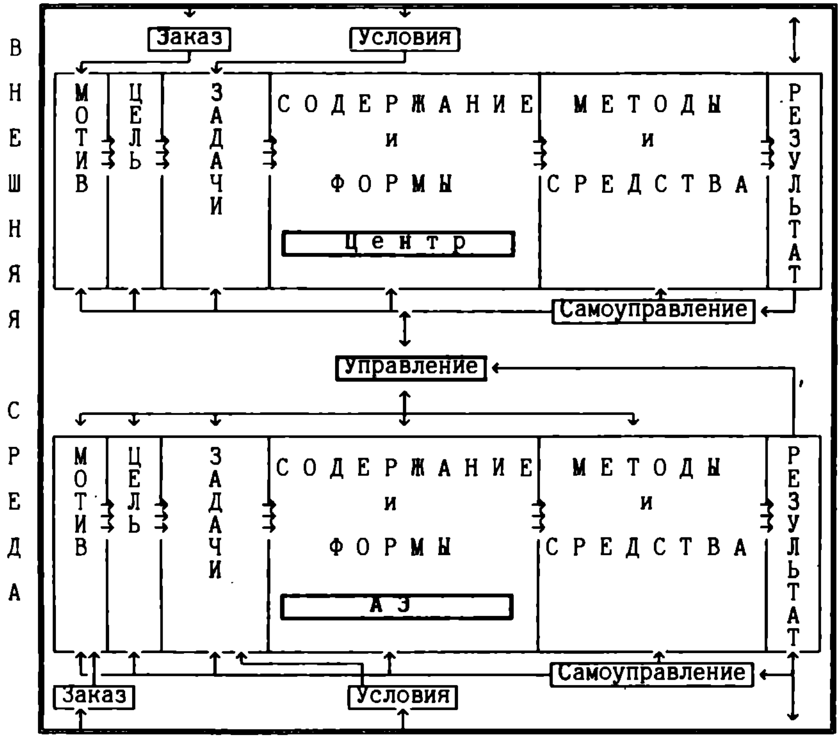

Рис.*1*. Структура взаимодействия центра и *АЭ*

Аналогичную стуктуру имеет деятельность АЭ, с тем лишь отличием, что ее процессуальные компоненты: мотив, цель, задачи, условия и технология определяются с учетом воздействий окружающей среды и управления (используемое ниже понятие "управление" в том числе включает в себя принятое в психологии понятие "руководство") со стороны центра.

На рисунке 1 приведена схема взаимодействия центра и одного АЭ. При наличии нескольких АЭ структуры деятельности будут, в общем, аналогичны рассматриваемой (с учетом взаимодействия всех участников системы).

В предложенной модели можно качественно и достаточно условно выделить механизмы управления двух типов. Механизмы первого типа это управление целями, задачами, технологией, структурой АС - составом АЭ и т.д. Механизмы второго типа - это управление непосредственно АЭ. Так как нас интересует именно управление АЭ, остановимся на его описании более подробно.

Рассмотрим переход от мотивов к задачам. Мотивом называется: побуждение к деятельности, связанное с удовлетворением потребностей субъекта; совокупность внешних или внутренних условий, вызывающих активность субъекта и определяющих ее направленность (побуждающий и определяющий выбор направленности деятельности); осознаваемая причина, лежащая в основе выбора действий и поступков [35,С.189]. Мотивация - процесс побуждения, вызывающий активность и определяющий ее направленность [35,С.190]. Существенную роль в расматриваемой конструкции играет понятие потребности - состояния индивида, создаваемое испытываемой им нуждой, выступающее источником активности [35,С.253]. Достаточно полная схема деятельности, связывающая потребности и мотивы, была предложена в [30] (см. также [33]): "среда - потребность - осознание - мотивация - решение - установка - действие". Для того, чтобы определить место стимулирования в этой схеме, рассмотрим кратко существующие теории мотивации (приводимое ниже описание современных представлений о мотивации дается с точки зрения психологических оснований менеджмента [39,72,93]).

Исторически, первые научно обоснованные представления о разнообразии потребностей и систематическое их изучение начались в конце XIX века. Во времена, например, Адама Смита экономическое положение большинства людей было столь тяжелым, что он считал, что человек всегда, когда ему будет предоставлена такая возможность, будет в первую очередь стараться улучшить свое экономическое положение. F.Taylor (основатель школы научного управления [95]) сделал мотивацию "кнута и пряника" эффективной, предложив оплачивать труд пропорционально вкладу. Однако, достаточно быстро пришло осознание того, что "кнута и пряника" недостаточно - в рамках школы человеческих отношений [82] большее внимание стало уделяться учету психологии работников, условий труда и т.д. Свой вклад в развитие представлений о потребностях и мотивации внесли представители бихевиоризма: Б.Ф.Скиннер, Д.Б.Уотсон и др.; физиолог высшей нервной деятельности И.П.Павлов и др.; психоанализ З.Фрейда, К.Юнга и другие разделы психологической науки (см. обзоры [21,39,61,72,80,91]).

Непосредственный и примитивный перенос положений из одной науки в другую имел свои положительные результаты, однако их обоснованность вызывала и вызывает по сей день немало возражений (например, большинство экспериментальных исследований по выявлению роли материального вознаграждения проводилось на животных [37,88]).

Современные теории мотивации, бурное развитие которых началось в начале 40-х годов (революцией в этой области стала, по-видимому, статья A. Maslow [81]), могут быть подразделены на содержательные (идентифицирующие внутренние побуждения) и процессуальные (отвечающие на вопрос "как" ведут себя люди). Перечислим кратко наиболее известные из них.

1. Иерархия потребностей (A.Maslow [81]). Согласно иерархическому принципу организации базовых потребностей человека выделяются (снизу вверх): основные физиологические потребности, потребности в безопасности, любви, социальной активности, самоуважении и самореализации. Лишь после того, как удовлетворены потребности одного уровня, человек стремится к удовлетворению потребностей другого более высокого уровня, причем удовлетворенная потребность не играет мотивирующей роли [39,57].

2. Структура потребностей (К.Б.Модсен [29]). Более детальная, чем в [81], классификация потребностей по: органическим мотивам, эмоциональным мотивам, социальным мотивам и деятельным мотивам.

3. Теория потребностей (D.C.McClelland [39]), в основании которой лежат потребности во власти, успехе и причастности.

4. Двухфакторная теория (F.Herzberg [78]). Различают гигиенические факторы (связанные с окружающей средой, в которой выполняется работа), к которым относится и зарплата, и мотивация

(характер и сущность самой работы). Результаты экспериментальных исследований влияния мотивирующих факторов приведены в [78].

5. Процессуальная теория (V.Vroom - теория ожиданий [97]), согласно которой наличие активной потребности не является единственным условием мотивации человека на достижение определенной цели, а важна также субъективная оценка вероятности получения вознаграждения. Мотивация при этом является условным математическим ожиданием получаемого вознаграждения.

6. Теория справедливости [79,88]. Люди субъективно определяют отношение полученного вознаграждения к затраченным усилиям и затем соотносят его с вознаграждением других людей, выполняющих аналогичную работу. При этом принцип справедливости практически совпадает с "принципом равных рентабельностей" [88].

7. Процессуальная модель (L.V. Porter - E.E.III. Lawler) - комплексная модель мотивации [91], объединяющая теорию справедливости и теорию ожиданий [97].

8. "X" и "Y" теории (D.M.McGregor [83]). Согласно аксиоматике теории "X", без активного воздействия люди пассивны и даже сопротивляются организационным потребностям (третий постулат), а по теории "Y", напротив, задачей менеджмента является организация мотивов и целей деятельности для наилучшего направления людьми своих усилий на достижение целей организации (четвертый постулат).

Таким образом, анализ структур деятельности центра и АЭ, перечисленные выше современные теории мотивации, а также результаты исследований отечественных психологов: А.Н.Леонтьева, С.Л.Рубинштейна, Б.С.Ананьева, А.В.Петровского [30,37 и др.] позволяют предложить следующую схему (см. рисунок 2). Цепочка: "мотив - цель - задачи - технология - действие - результат" совпадает с приведенной на рисунке 1 (отметим, что мы разделили действие и результат деятельности). Блок "потребность" лежит в основании всей этой цепочки, формируя (в процессе осознания - внутренней мотивации, с учетом внешней мотивации (2) мотив деятельности).

Управление со стороны центра (выбираемые центром условия деятельности) в общем случае может воздействовать на потребности

АЭ (1), (процесс) формирование мотивов (внешняя мотивация (2)), процесс выбора цели (3) и сам выбор (4), (процесс) выбор задач (5) и используемых АЭ технологий (6). Внешняя среда (объективные условия деятельности) могут оказывать влияние на потребности АЭ (7), процесс формирования мотивов (8), целей (9), задач (10) и технологии (11). Кроме того, воздействие внешней среды (12) может оказаться причиной несовпадения действия АЭ и результата его деятельности. Результатом деятельности АЭ может быть удовлетворение потребностей (частичное или полное) или их неудовлетворение (14). Поэтому <u>стимулирование может быть определено как комплексное целенаправленное внешнее воздействие на компоненты деятельности управляемой системы и процессы их формирования.</u>

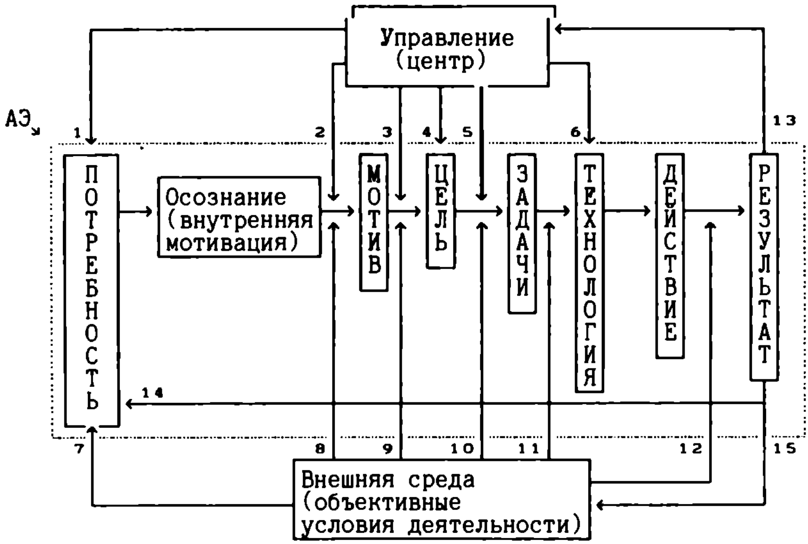

Рис.2. Управление компонентами деятельности АЭ

Таким образом, центр обладает широким спектром возможностей по управлению АЭ (воздействия (1)-(6) могут интерпретироваться как стимулы; следует при этом отметить, что, например, К.К.Платонов определяет стимулирование более узко - а именно, как воздействие на мотив (2)). Рассматриваемое в настоящей работе стимулирование (в узком смысле), в основном соответствует (5), то есть влиянию (созданию условий) на процесс выбора задач (или, что при фиксированных технологиях то же самое - действий) при фиксированных потребностях, мотивах, целях и влиянии окружающей среды. Управления (1)-(4) и (6), практически, не исследованы (по-крайней мере, формальные их модели на сегодняшний день, за редким исключением, отсутствуют [27,37]). Детальное и систематическое их изучение и описание выходит за рамки настоящей работы.

Таким образом, при фиксированных целях и технологии, предпочтительность различных действий АЭ зависит от условий (5) и (10), из которых (5) является одним из управлений со стороны центра. Возможность изменения предпочтений АЭ на множестве его стратегий (действий) обусловливает его управляемость центром - используя различные стимулы, центр может побуждать (в определеных пределах) АЭ выбирать те или иные действия.

Экспериментальные результаты изучения сравнительной индивидуальной важности различных моральных и материальных стимулов приводились в [20,38,57,80]. Интересно отметить, что в большинстве исследований подчеркивалось, что материальная заинтересованность не является доминирующей по сравнением с другими видами поощрения, в том числе и моральным. Так, в соответствии с [38,С.60], предпочтительность денежной премии сравнима с предпочтительностью предоставления отпуска в желаемое время; удовлетворенность работой - с материальной обеспеченностью [20,С.142] и т.д. Приводимые в упомянутых и близких к ним работах статистические данные подвергались и подвергаются справедливой критике со следующей точки зрения: имеет место, например, манипулирование информацией респондентами и влияние самого факта проведения опроса (что подчеркивалось, например, в описаниях Хотторнских экспериментов [82]).

Перейдем к качественному описанию моделей механизмов стимулирования. Как отмечалось выше, стимулирование является предметом исследований в психологии, экономике и социологии, теории управления социально-экономическими системами, исследовании операций, системном анализе и других разделах теории управления. В то же время, термины "побуждение", "действие", "психическое состояние" и т.д. применимы только к так называемым активным системам (АС), то есть организационным системам, элементы которых обладают способностью к активному поведению (активность в широком плане - "всеобщая характеристика живых существ, их собственная динамика как источник преобразования или поддержания ими жизненно важных связей с окружающим миром" [35, С.10], в узком - способность к самостоятельному выбору определенных действий): целеполаганию, работе с различной эффективностью, самостоятельному выбору значений состояний и действий (действие - "произвольный акт, анция, процесс, подчиненный представлению о результате, то есть процесс, подчиненный осознаваемой цели" [56, С.86]; акт деятельности, направленный на достижение конкретной цели), искажению информации и т.д.

Перечисленные выше проявления активности исследуются, в частности, в теории активных систем (ТАС) - разделе теории управления социально-экономическими системами, изучающем математические модели и свойства механизмов их функционирования, обусловленные активностью поведения. Использование понятийного аппарата и, соответственно, подходов к изучению АС только с общечеловеческих, философских и психологических позиций на сегодняшний день, к сожалению, недостаточно конструктивно. Поэтому, наряду с перечисленными выше, в настоящей работе широко используется исторически сложившийся понятийный аппарат теории активных систем. В том числе, мы не будем различать термины "социально-экономическая система" и "активная система", употребляя их как синонимы.

Момент зарождения теории активных систем и близких к ней математических теорий управления организационными системами можно условно датировать концом 1960-х годов (более 95% работ в этой области появились начиная с 70-го года). Разработка механизмов стимулирования в организационных системах с учетом человеческого фактора ведется в рамках таких разделов теории управления социально-экономическими системами, как: теория активных систем [5,11,12,19 и др.], информационная теория иерархических систем (ИТИС) или теория иерархических игр и теория игр с непротивоположными интересами [22,23,34 и др.], теория контрактов (ТК) [74,76,77,85 и др.] и теория коллективного выбора (точнее - теория реализуемости - ТР) [24,41,63,70,84,89,92 и др.].

Подробное описание основных результатов упомянутых научных направлений по исследованию механизмов стимулирования в активных системах приведен в следующих работах (на русском языке): [24] - вероятностные модели в ТАС и ТК, [25] - механизмы с сообщением информации в ТАС и ТР, [74] - основные результаты ИТИС, [105] - нечеткие модели в ТАС, [104] - результаты ТАС, ИТИС, ТК и ТР по изучению динамических и многоэлементных социально-экономических систем.

Отметим, что ссылки на обзоры существенны - ограниченный объем настоящей работы не позволяет провести детальное описание всего многообразия результатов исследования математических моделей механизмов стимулирования в активных системах.

Под механизмом функционирования (механизм - "система, устройство, определяющее порядок какого-либо вида деятельности" [54, С.341]) активной системы понимается совокупность правил, законов и процедур, регламентирующих взаимодействие ее участников.

Одним из основных методов исследования механизмов функционирования организационных систем является их моделирование. Модель механизма функционирования определяется заданием модели АС и механизма управления. Описание модели АС включает (та или иная конкретная модель АС однозначно определяется заданием следующих параметров):

1. Структуру АС;
2. Интересы (предпочтения) участников системы;
3. Допустимые множества (множества возможных стратегий и значений неопределенных параметров);
4. Информированность участников;
5. Порядок функционирования.

Структура АС включает в себя состав участников, их информационные, технологические, управляющие и другие связи. Ключевыми понятиями при исследовании стимулирования являются понятия интересов и предпочтений участников АС. Действительно, стимулирование может рассматриваться как воздействие на интересы (отметим, что используемое нами понимание интересов как реальных причин действий, событий, свершений, несколько шире, чем принятое в психологии - "мотив или мотивационное состояние, побуждающее к познавательной деятельности" [56, С.140]) и предпочтения управляемых элементов (см. ниже более подробно).

Как отмечалось выше, различают управляемые элементы - активные элементы (АЭ или иногда для краткости просто - элементы) и управляющий элемент - центр (управляющий орган). Описываемые в настоящей работе активные системы являются иерархическими двухуровневыми системами веерного типа, на верхнем уровне иерархии которых находится центр, а на нижнем - подчиненные ему активные элементы. С одной стороны, центр обладает свойством активности и может рассматриваться как один из активных элементов системы, а с другой, необходимость его выделения (по сравнению с остальными) обусловлена тем, что он, во-первых, формирует правила игры, а во-вторых, выражает интересы системы в целом. Поэтому, при исследовании задач управления АС позиции исследователей операции ориентированы на изучение возможностей достижения именно целей центра [12,19].

Допустимые множества значений параметров, описывающих систему, отражают информационные, административные, технологические и другие ограничения, накладываемые на исследуемую систему. Информированность участников отражает ту информацию, которой обладают центр и активные элементы на момент принятия решений. Порядок функционирования АС соответствует последовательности получения информации и принятия решений.

Предположим, что участники АС имеют одинаковую информацию о структуре системы, предпочтениях, допустимых множествах (с точностью до неопределенных параметров), информированности и порядке функционирования. Плюс к этому каждый из них может иметь некоторую дополнительную информацию о неопределенных параметрах.

Под стандартным порядком функционирования активной системы понимается следующая последовательность (один или несколько этапов могут быть опущены; кроме того, между любыми этапами в общем случае возможно получение участниками АС информации): участники АС получают некоторую информацию, центр выбирает механизм управления (в том числе - систему стимулирования) и сообщает его АЭ, АЭ сообщают что-либо центру, центр назначает планы - конкретизирует желаемые значения состояний элементов или результатов их деятельности, АЭ выбирает действие, реализуются значения неопределенных параметров (при этом они не всегда наблюдаются участниками АС), определяются значения целевых функций.

Механизм управления Σ выбирается центром из множества допустимых механизмов M и состоит из набора воздействий на параметры АС. Ниже, при описании частных механизмов стимулирования, в большинстве случаев предполагается, что возможности центра ограничены только стимулированием - воздействием на интересы и предпочтения элементов; то есть структура АС, допустимые множества, информированность участников и порядок функционирования заданы. Это предположение означает, что рассматриваются фиксированные классы механизмов управления, так как использование, например, механизмов с сообщением (или платой) информации, выбор структуры системы (многоканальные механизмы) и т.д. затрагивают, соответственно, порядок функционирования и информированность, а в последнем случае и структуру АС.

При воздействии на интересы АЭ иногда будем выделять из собственно механизмов стимулирования Σ_σ - изменения предпочтений АЭ с целью побуждения их к выбору требуемого состояния (желательное с точки зрения центра состояние АЭ называется планом) их составную часть - механизмы планирования Σ_π. Механизм планирования, заключающийся в выборе оптимального значения параметра - плана - в рамках параметрически заданного класса систем стимулирования, является более гибкой конструкцией, нежели чем механизм стимулирования: при фиксированном классе систем стимулирования корректировка планов является более оперативной. Необходимость такого выделения обусловлена в частности тем, что при решении задач планирования возникает проблема искажения информации, требующая, зачастую, отдельного исследования.

Представленная на рисунке 2 схема управления компонентами деятельности АЭ позволяет определить место и влияние неопределенности. Центр может иметь полную или неполную информацию о процессуальных компонентах деятельности управляемого объекта - АЭ и закономерностях их формирования, и/или о внешних по отношению к АС параметрах - объективных условиях деятельности АЭ и эффектах, вызываемых влиянием этих факторов.

Следовательно, в первом приближении можно выделить, соответственно, внутреннюю и внешнюю неопределенность. Дальнейшая детализация описания неопределенности должна отражать объект, относительно которого она имеет место: потребность, мотивация, мотив и т.д. и/или процесы их формирования. Так как в настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением стимулирования (5), то возможна внутренняя неопределенность относительно задач (предпочтений) АЭ и внешняя неопределенность относительно результатов его деятельности (12) (см. рисунок 2).

Перейдем от качественного описания модели социально-экономической системы к рассмотрению общей формальной (теоретико-игровой) модели механизма стимулирования.

Выше стимулирование определено как комплексное целенаправленное внешнее воздействие на компоненты деятельности (более конкретно - задачи деятельности) управляемой системы и процессы их формирования. Целенаправленность поведения участников активной системы и, соответственно, стимулирование, понимаемое как управление предпочтениями, определяющими их поведение, учитываются в теоретико-игровых моделях следующим образом.

В игре - взаимодействии агентов (игроков) выигрыш (полезность и т.д.) каждого из них зависит в общем случае как от его собственных действий (выбираемой стратегии), так и от действий других игроков. В иерархических играх, в частности - в игре $Г_2$ [22], метаигрок - центр - обладает правом первого хода, причем его стратегия - функция от стратегии второго игрока - активного элемента. Рациональность поведения игроков отражается предположением о том, что для каждого из них существует некоторая функция (целевая функция, функция полезности, выигрыша и т.д.), к максимизации которой он стремится.

В играх типа $Г_2$ второй игрок (АЭ) выбирает свою стратегию при известной стратегии первого игрока (центра). Следовательно, центр имеет возможность, зная о стремлении АЭ максимизировать собственную целевую функцию, предугадать какую стратегию выберет АЭ. Поэтому задача центра заключается в назначении такой своей допустимой стратегии, которая пбудила бы АЭ выбрать наиболее благоприятное для центра действие.

При рассмотрении задач стимулирования стратегия первого игрока интерпретируется как функция стимулирования (система стимулирования, механизм стимулирования), определяющая поощрение или наказание АЭ в зависимости от выбираемой им стратегии - действия.

Перейдем к описанию общей формальной модели и введем следующие обозначения (области определения и значения отображений конкретизируются ниже):

Σ - механизм управления (выбор допустимого механизма - стратегия центра);

α и β - векторы неопределенных параметров;

I – информация, имеющаяся у АЭ;

I' – информация, имеющаяся у центра;

$y \in A$ – действия (стратегии) АЭ, принадлежащие допустимому множеству A;

$R(\beta)$ – предпочтения (интересы) АЭ в отсутствии управления, заданные на множестве A и зависящие от неопределенных параметров; R может быть целевой функцией или их совокупностью, бинарным отношением и т.д. (конкретизации см. ниже);

$R_\Sigma(\beta)$ – предпочтения (интересы) АЭ с учетом управления, заданные на множестве A и зависящие от неопределенных параметров;

$\underset{I}{\to}$ – процедура устранения неопределенности с учетом информации I;

$R_\Sigma(\beta) \underset{I}{\to} R_\Sigma$ – устранение неопределенности активным элементом (переход к детерминированным предпочтениям) с учетом информации I;

$C(R_\Sigma)$ – выбор АЭ (C – правило, по которому АЭ выбирает свою стратегию или их множество в зависимости от предпочтений R_Σ;

$\Phi(C(R_\Sigma), \alpha, \Sigma)$ – целевая функция (предпочтения, интересы) центра (критерий управления), зависящая от неопределенных параметров α, выбора АЭ и механизма Σ;

$\Phi(C(R_\Sigma), \alpha, \Sigma) \underset{I'}{\to} \Phi(C(R_\Sigma), \Sigma)$ – устранение неопределенности центром (переход к детерминированным предпочтениям) с учетом информации I'

Приведем содержательные интерпретации введенных понятий. Присутствующая в системе неопределенность, обусловленная недостаточной информированностью участников АС о внешних и внутренних параметрах, отражена векторами α и β, которые должны быть согласованы с имеющейся информацией I и I'.

Множество A является множеством возможных действий АЭ, привлекательность которых определяется предпочтениями АЭ $R(\beta)$, то есть зависит от его интересов, целей и т.д. в отсутствии управления. Если центр воздействует на предпочтения АЭ, то сравнительная привлекательность различных действий может изменяться. Поэтому, условно эффект стимулирования можно представить как переход от предпочтений $R(\beta)$ к предпочтениям $R_\Sigma(\beta)$.

Важным является понятие выбора АЭ - правила, ставящего в соответствие множеству возможных действий и предпочтениям АЭ некоторое подмножество $\mathbf{C}(R_{\Sigma})$ множества 2^{A}, причем будем считать, что АЭ производит выбор в условиях полной информированности. Для этого от предпочтения $R_{\Sigma}(\beta)$ он должен, учитывая имеющуюся информацию I, с помощью некоторой процедуры устранения неопределенности $\underset{I}{\to}$ перейти к предпочтениям R_{Σ}.

Поясним, что понимается под "устранением неопределенности". При принятии решений о выборе стратегий участники АС могут следовать гипотезе рационального поведения (см. более подробно ниже), или какому-либо другому принципу. Однако, если в системе присутствует неопределенность, то для определения рационального выбора необходимо конкретизировать (ввести предположение) как будут принимать решения участники АС в условиях неопределенности. Одним из возможных подходов является предположение о том, что они "избавятся" от неопределенности (или постараются максимально ее уменьшить) и будут выбирать стратегии в условиях полной информированности [32]. Переходя к детерминированному представлению ситуации принятия решения, необходимо максимально учесть имеющуюся информацию о неопределенных параметрах.

Критерий управления - целевая функция центра (центр выражает интересы системы в целом) Φ ($\mathbf{C}$ (R_{Σ}), α, Σ) зависит от выбора АЭ, используемого управления Σ и неопределенных параметров α. Для того, чтобы центр мог, например, решать задачу синтеза оптимального механизма управления, необходимо, учитывая имеющуюся у него информацию I', с помощью некоторой процедуры устранения неопределенности $\underset{I}{\to}$, перейти к детерминированному представлению его предпочтений, то есть к целевой функции Φ ($\mathbf{C}$ (R_{Σ}), Σ).

Для решения задачи стимулирования необходимо ввести на множестве $M \ni \Sigma_{\sigma}$ критерий сравнения различных механизмов стимулирования. Как будет видно из дальнейшего изложения, в большинстве случаев этот критерий определяется как значение (максимальное или гарантированное) целевой функции центра на множестве выбора АЭ.

Различают прямые и обратные задачи стимулирования. Прямой задачей стимулирования называется задача поиска оптимального механизма стимулирования, удовлетворяющего заданным ограничениям

($\Sigma_\sigma \in M$). Обратной задачей стимулирования называется задача поиска класса механизмов стимулирования (или оптимального с точки зрения того или иного критерия механизма из этого класса), побуждающих АЭ выбрать некоторое действие (фиксированное или максимально/минимально возможное).

Формально, прямая задача синтеза оптимального механизма стимулирования обычно формулируется как задача поиска механизма стимулирования, имеющего максимальную эффективность:

$$\Phi (\mathbf{C} (R_\Sigma), \Sigma) \to \max_{\Sigma \in M}.$$

Обратная задача стимулирования заключается в поиске класса механизмов стимулирования $M' \subseteq M$, такого, что $\forall \Sigma_\sigma \in M'$ выполняется: $y' \in \mathbf{C} (R_{\Sigma_\sigma})$, где $y' \in A$ - некоторое фиксированное действие. Условие $y' \in \mathbf{C}(R_{\Sigma_\sigma})$ называют условием реализуемости действия y', а множество $A' = \{ y' \in A \mid \exists \Sigma_\sigma \in M : y' \in \mathbf{C}(R_{\Sigma_\sigma}) \} \subseteq A$ называют множеством действий, реализуемых заданным классом механизмов стимулирования M.

Основным способом описания интересов и предпочтений АЭ, наиболее распространенным в моделях теории активных систем и других разделах теории управления социально-экономическими системами, является "язык" целевых функций, причем предпочтения участников АС в большинстве случаев предполагаются скалярными.

Наиболее тонким и вызывающим наибольшие споры при описании модели АС является определение рационального выбора АЭ. Предположим, что на множестве A определены предпочтения АЭ (задано бинарное или взвешенное отношение предпочтения, целевая функция и т.д.) - скалярные или векторные. Естественно предположить, что АЭ выберет одно из наилучших с его точки зрения допустимых действий (альтернатив). Весь вопрос заключается в том, что понимать под наилучшей альтернативой?

Исследованию этой проблемы посвящено множество работ, в том числе по теории выбора, принятию решений, многокритериальной оптимизации и др. Задача определения рационального выбора АЭ, фактически, распадается на две подзадачи. Первая - определить множество наилучших (недоминируемых, несравнимых между собой и т.д.) альтернатив, то есть множество решений игры. Вторая подзадача заключается в том, что, если множество решений игры содержит более одного элемента, то необходмо решить какое конкретное действие выберет АЭ.

Для определения множества решений игры используется в основном следующий традиционный для теории игр и принятия решений подход. Пусть справедлива гипотеза рационального поведения (ГРП): если задана целевая функция АЭ (отражающая его интересы), то множество решений игры есть множество альтернатив, доставляющих максимум целевой функции. В многоэлементной АС это предположение означает, что элементы выберут допустимые равновесные стратегии, то есть стратегии, принадлежащие множеству решений игры. Ниже считается, что игра некооперативная (АЭ не имеют возможности договариваться, вступать в коалиции и т.д.), то есть под равновесием понимается равновесие Нэша (равновесие в доминантных стратегиях, если оно существует) [12,14].

При заданном множестве решений игры возможны различные подходы к определению конкретного выбора АЭ (принципы отбора). Ниже описываются два "предельных" подхода. Первый - оптимистический - подразумевает, что выполнена гипотеза благожелательности (ГБ), то есть, что АЭ выбирает из множества решений игры альтернативу, наиболее предпочтительную с точки зрения центра. Второй подход - пессимистический - использование принципа максимального гарантированного результата (МГР). В этом случае в большинстве активных систем лучшее решение является ε-оптимальным (см. главу 1).

Конкретизируем приведенную выше общую постановку задачи стимулирования в активных системах, то есть рассмотрим формулировку задачи стимулирования в терминах целевых функций.

Введем следующие обозначения:

$\Phi(x, z, \sigma(\cdot))$ - целевая функция центра,

$\Phi : X \times A_0 \times M \to \mathbb{R}^1$;

$\sigma = \sigma(x, z) \in M$ - функция стимулирования и

$\chi = \chi(x, z) \in M$ - функция штрафов, принадлежащие допустимому множеству M, $\sigma : X \times A_0 \to \mathbb{R}^1|M$;

$\mathbb{R}^1|M$ - множество возможных значений функции стимулирования - подмножество $\mathbb{R}^1$, определяемое ограничениями механизма стимулирования M;

$y \in A$ - действие активного элемента;

$\theta \in \Omega$ - внешний по отношению к активной системе неопределенный параметр - состояние природы, принадлежащий допустимому множеству Ω;

$z = z(y, \theta) \in A_0$ - результат деятельности АЭ, зависящий от его действия и состояния природы и принадлежащий допустимому множеству A_0;

$x \in X$ - план АЭ (желательное с точки зрения центра действие или результат деятельности АЭ), принадлежащий допустимому множеству X и определяемый в соответствии с процедурой планирования $\pi(\cdot)$: $x = \pi(s, \theta)$, $\pi : S \times \Omega \to X$;

$s \in S$ - сообщение активного элемента центру о неопределенных или неизвестных центру параметрах, принадлежащее допустимому множеству S;

$h(z, r)$ - функция дохода АЭ, $h : A_0 \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^1$;

Отметим, что с точки зрения содержательных (в том числе - экономических) интерпретаций функцию $h(\cdot)$ удачней было бы назвать прибылью АЭ. Однако мы будем следовать исторически сложившемуся термину "функция дохода".

$c(z, r)$ - функция затрат АЭ, $c : A_0 \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^1$;

$r \in \tilde{\Omega}$ - параметр функции дохода (затрат) АЭ принадлежащий допустимому множеству $\tilde{\Omega}$.

В рамках рассматриваемой модели возможны два различных представления целевой функции АЭ:

$$f(x, z, r, \sigma(\cdot)) =$$

$$= \begin{cases} h(z, r) - \chi(x, z) - \text{"доход минус штрафы"} \\ \sigma(x, z) - c(z, r) - \text{"стимулирование минус затраты"} \end{cases};$$

Предположим, что функция стимулирования (штрафов) может явным образом зависеть только от плана и действия АЭ или от плана и результата деятельности, то есть $\sigma = \sigma(x,y)$ или $\sigma = \sigma(x,z)$.

В данной формулировке стимулирование (изменение предпочтений АЭ центром) осуществляется путем поощрения или наказания АЭ за выбор тех или иных действий, то есть путем изменения его целевой функции. Таким образом, стимулирование заключается либо в прибавлении к целевой функции АЭ функции стимулирования $\sigma(\cdot)$ (задача стимулирования I рода), либо в одновременном прибавлении к целевой функции АЭ функции стимулирования $\sigma(\cdot)$ и вычитании этой функции из целевой функции центра (задача стимулирования II рода). В задаче стимулирования второго рода целевая функция центра имеет вид "доход минус затраты на стимулирование":

$$\Phi (x, z, \sigma(\cdot)) = H (x, z) - \sigma (x, z),$$

или "доход плюс штрафы":

$$\Phi (x, z, \chi(\cdot)) = H (x, z) + \chi (x, z).$$

Сделаем ряд терминологических замечаний. Ниже будет показано (глава 1), что в рамках вводимых предположений представления целевой функции АЭ в виде "доход минус штрафы" и "стимулирование минус затраты" эквивалентны. Поэтому в тех случаях, когда это не приводит к путанице, термины "штрафы" и "стимулирование", равно, как и термины "механизм стимулирования", "система стимулирования", "функция стимулирования" будут употребляться как синонимы.

Таким образом, механизм стимулирования Σ_σ определяется заданием функции стимулирования σ: $A \to \mathbb{R}^1|M$ (или σ: $A_0 \to \mathbb{R}^1|M$), а механизм планирования Σ_π – заданием процедуры планирования π: $S \times \Omega \to X$.

На основании имеющейся информации АЭ и центр устраняют неопределенность относительно внешнего параметра в (если истинное значение состояния природы $\hat{\theta}$ достоверно известно кому-либо из участников АС, то он подставляет это значение в свою целевую функцию; если же это значение не известно на момент принятия решений, но станет достоверно известным в последующем, то принимаемое решение может заключаться в установлении параметрической зависимости от этой будущей реализации).

Социально-экономическая система, в которой все участники информированы симмметрично и имеют полную информацию о существенных внутренних (целевые функции и допустимые множества) и внешних (состояние природы) параметрах, называется детерминированной АС. Если хотя бы одно из приведенных выше условий нарушено, то АС является активной системой с неопределенностью.

Различают интервальную (когда известно только множество возможных значений неопределенного параметра), вероятностную (когда помимо допустимого множества значений неопределенного параметра известно его вероятностное распределение и/или какие-либо иные статистические характеристики) и нечеткую (когда, помимо допустимого множества значений неопределенного параметра, имеется дополнительная нечеткая информация) неопределенность.

Использование того или иного способа (метода) устранения неопределенности определяется имеющейся информацией. Возможны, в частности, следующие методы устранения неопределенности:

- если участник АС знает только множество возможных значений неопределенного параметра, то устранение неопределенности может производиться за счет использования принципа максимального гарантированного результата (МГР), критериев пессимизма-оптимизма и т.д.;
- если известно распределение вероятностей случайного параметра, то целесообразно использовать эту информацию, то есть оперировать с ожидаемыми значениями целевых функций (EUA) или учитывать другие статистические характеристики случайной величины (например, минимизировать риск получения полезности, меньшей, чем заданное значение и т.д.);
- если имеется нечеткая информация о возможных значениях неопределенного параметра, то определение рационального выбора АЭ должно основываться на этой информации, а само множество выбора совпадать, например, с множеством максимально недоминируемых альтернатив (или четко недоминируемых альтернатив и т.д.);
- при различных типах неопределенности эффективность управления может быть повышена за счет выбора соответствующей структуры системы (информационных связей между элементами при фиксированных функциональных и управляющих связях) - например, использование многоканальных механизмов, основывающихся на анализе деятельности параллельно функционирующих каналов и т.д.;
- если часть участников АС обладает большей информацией, то неопределенность может быть уменьшена за счет сообщения информации от более информированных участников АС менее информированным и т.д.

Следует отметить, что даже при одинаковой информированности участники АС могут использовать различные методы устранения неопределенности и применяемые для этого процедуры могут оказаться далеко не "оптимальными". Так, например, не исключено, что, зная распределение вероятностей случайного параметра, кто-то из участников активной системы воспользуется принципом максимального гарантированного результата и т.д.

Стратегией АЭ в общем случае является выбор сообщения $s \in S$ (первый шаг) и действия $y \in A$ (второй шаг – после назначения планов). Определим функцию предпочтения АЭ:

$$\varphi_{\theta\Gamma}(\ \sigma(\cdot),\ \pi(\cdot)\ ) = \max_{y \in A}\ f_{\theta\Gamma}(\ y,\ \sigma(\cdot),\ \pi(\cdot)\ ),$$

где $f_{\theta\Gamma}(\cdot)$ – значение целевой функции АЭ после устранения в $f(\ \cdot,\ \theta,\ \Gamma\ )$ неопределенности относительно параметров $\theta \in \Omega$ и $\Gamma \in \tilde{\Omega}$. Множество

$$P^{y}_{\theta\Gamma}(\ \sigma(\cdot),\ \pi(\cdot)\ ) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A}\ f_{\theta\Gamma}(\ y,\ \sigma(\cdot),\ \pi(\cdot)\ )$$

является множеством решений игры (при фиксированном s АЭ выбирает действия из множества $P^{y}_{\theta\Gamma}$) на втором шаге. Отметим, что, если сообщение информации отсутствует, то индекс "у" будет опускаться. Сообщения АЭ в силу ГРП принадлежат множеству:

$$P^{s}_{\theta\Gamma}(\ \sigma(\cdot),\ \pi(\cdot)\ ) = \operatorname{Arg}\max_{s \in S}\ \varphi_{\theta\Gamma}\ (\ \sigma(\cdot),\ \pi(s)\ )$$

решений игры на первом шаге.

Обозначим

$$K(\Sigma,\Gamma) = \max_{s \in P^{s}_{\theta\Gamma}(\sigma(\cdot),\pi(\cdot))}\ \max_{y \in P^{y}_{\theta\Gamma}(\sigma(\cdot),\pi(\cdot))}\ \Phi_{\theta\Gamma}(y,\pi(s),\sigma(\cdot)),$$

$$K^{\Gamma}(\Sigma,\Gamma) = \min_{s \in P^{s}_{\theta\Gamma}(\sigma(\cdot),\pi(\cdot))}\ \min_{y \in P^{s}_{\theta\Gamma}(\sigma(\cdot),\pi(\cdot))}\ \Phi_{\theta\Gamma}(y,\pi(s),\sigma(\cdot))$$

максимальное значение целевой функции центра на множестве решений игры (использование максимума оправдано, если выполнена гипотеза благожелательности) и гарантированное значение целевой функции центра на множестве решений игры, соответственно, называются эффективностью $K(\Sigma)$ механизма управления Σ и его гарантированной эффекивностью $K^{\Gamma}(\Sigma)$.

Еще раз отметим, что во всех рассматриваемых в настоящей работе моделях предполагается, что элементы (если их несколько) выбирают равновесные по Нэшу стратегии, не имея возможности образовывать коалиции.

Классификация задач стимулирования в активных системах

Приведенная выше постановка задачи стимулирования является достаточно общей и охватывает модели активных систем, исследуемые в таких разделах теории управления социально-экономическими системами как: теория активных систем, информационная теория иерархических систем, теория контрактов и теория реализуемости.

Для получения целостной и комплексной картины необходимо в рамках приведенного выше описания классифицировать модели механизмов стимулирования в различных организационных системах. Поэтому введем следующую систему классификаций.

Основанием класификации оснований предлагаемой ниже системы классификации служит минимально необходимый набор параметров и признаков, однозначно задающий ту или иную конкретную активную систему.

Предлагаются следующие основания системы классификаций:

1. Структура АС (двухуровневые и многоуровневые АС).

2. Число периодов функционирования (статические АС - функционирующие в течение одного периода и динамические АС; для последних - степень дальновидности элементов и характер взаимозависимости периодов функционирования).

3. Порядок функционирования АС (стандартный - используемый в большинстве известных моделей (например, игра $Г_2$ [22,34]) и нестандартный).

4. Число АЭ (одноэлементные и многоэлементные АС; для последних - вид взаимодействия между элементами).

5. Информированность участников АС (симметричная, асимметричная или смешанная). Предполагается, что информированность участников о порядке функционирования и самой информированности симметричная. Кроме того, поскольку, как отмечалось выше, центр выражает интересы система в целом, считается, что АЭ всегда информирован не хуже, чем центр.

6. Неопределенность (наличие или отсутствие неопределенности - детерминированные АС и АС с неопределенностью, соответственно).

В свою очередь, АС с неопределенностью:

6.1. Тип неопределенности (внутренняя неопределенность - о параметрах самой АС, внешняя - о параметрах, внешних по отношению к АС и смешанная - для части участников - внутренняя, для других

- внешняя, или обеих типов). Для внутренней неопределенности - относительно целевых функций, допустимых множеств или и того, и другого.

6.2. Вид неопределенности (интервальная, вероятностная, нечеткая и смешанная неопределенность - все возможные комбинации перечисленных выше видов неопределенности для различных участников).

7. Принципы поведения участников АС (методы устранения неопределенности и принципы рационального поведения: ГРП, МГР (и его модификации), усреднение целевых функций (EU - expected utilities), выбор недоминируемых альтернатив (НД) и все их возможные комбинации).

По таким основаниям, как: структура АС, информированность участников, тип и вид неопределенности, а также принципы поведения участников АС, допустимо значительное число различных признаков классификации и их комбинаций. Следует, также отметить, что не все комбинации значений признаков классификации, соответствующих различным основаниям классификации, являются допустимыми. Так, например, использование анализа ожидаемых полезностей может использоваться только в вероятностных АС, сообщение информации имеет смысл только при асимметричной информированности и должно предусматриваться порядком функционирования активной системы и т.д.

Возможные комбинации значений признаков классификации приведены на рисунке 3 (в целях наглядности по основаниям 3, 5 и 6.1 даны не все возможные комбинации значений признаков, а только основные).

Выделим класс базовых моделей механизмов стимулирования (задач стимулирования) в двухуровневых, одноэлементных, статических АС со стандартным порядком функционирования.

В настоящей работе описываются, в основном, базовые задачи стимулирования, поэтому практически исключаются из дальнейшего рассмотрения следующие "сложные" АС, выделенные на рисунке 3 пунктиром:

- многоуровневые АС;
- динамические АС;
- АС с нестандартным порядком функционирования;

Рис. 3. Система классификаций моделей механизмов стимулирования в активных системах

- АС со смешанной информированностью и со смешанными видами и типами неопределенности;

- АС с неопределенностью относительно допустимых множеств, то есть рассматриваются модели АС с внутренней неопределенностью только относительно целевых функций.

- АС с симметричной информированностью и внутренней вероятностной неопределенностью (содержательные интерпретации этого класса практически неисследованных на сегодняшний день моделей достаточно затруднительны) - краткое обсуждение этого класса вероятностных АС приведено в начале третьей главы;

- многоэлементные АС с сильно связанными элементами (за исключением систем с сообщением информации) и их коалициями.

В рамках используемой системы классификаций мы будем рассматривать базовые модели механизмов стимулирования, условно обозначенные M1 - M13 и перечисляемые в таблице 1.

Номер модели АС	Информированность	Неопределенность	Тип неопр.	Вид неопр.	Примечания
M1.	C	-	-	-	+ / ТАС, ИТИС, ТК
M2.	C	+	внутр.	инт.	+ / ТАС, ИТИС
M3.	C	+	внутр.	вер.	- / о
M4.	C	+	внутр.	неч.	+ / о
M5.	C	+	внешн.	инт.	+ / ТАС, ИТИС
M6.	C	+	внешн.	вер.	+ / ТАС, ТК
M7.	C	+	внешн.	неч.	+ / о
M8.	A	+	внутр.	инт.	+ / ТАС, ИТИС, ТР
M9.	A	+	внутр.	вер.	- / ТАС
M10.	A	+	внутр.	неч.	+ / о
M11.	A	+	внешн.	инт.	+ / ТАС, ИТИС, ТР
M12.	A	+	внешн.	вер.	+ / ТАС, ТК
M13.	A	+	внешн.	неч.	+ / о

Таблица 1. Базовые модели механизмов стимулирования

В графе "примечания" используются следующие обозначения: "+" - рассматривается в настоящей работе, "-" - не рассматривается в настоящей работе, "о" - практически не исследовались ранее, и указываются разделы теории управления социально-экономическими системами, в которых изучались соответствующие модели (теория активных систем - ТАС, информационная теория иерархических систем - ИТИС, теория контрактов - ТК, теория реализуемости - ТР).

Если попытаться качественно охарактеризовать состояние дел по объему и уровню результатов исследования механизмов управления активными системами с неопределенностью, то получится примерно следующая картина. В таблице 2 приведены ссылки на основные работы отечественных и зарубежных авторов, посвященные исследованию соответствующих базовых моделей механизмов стимулирования (обзоры выделены жирным шрифтом).

Номер модели АС	Основные работы (см. список литературы)
М1.	2,5,11,12,13,14,15,19,34,67 и др.
М2.	5,6,10,22,34
М3.	34
М4.	1,45
М5.	5,10,23
М6.	7,8,9,14,19,26,44,48,64,65,69,73,74,76,77 и др.
М7.	45,49,86
М8.	10,12,14,22,24,34,44,68,70,85,89 и др.
М9.	44,60,75
М10.	45,66
М11.	12,14,43
М12.	9,25
М13.	45

Таблица 2. Библиография (основные работы) по базовым моделям механизмов стимулирования в активных системах

Относительно некоторых работ можно спорить к какому из классов моделей их следует отнести. Но, дело не в этом. Конечно, проведенное разбиение в определенной мере условно. Более важно то, что можно выделить три класса моделей (M1, M6 и M8), исследованию которых посвящено примерно более 80% работ по теоретико-игровому моделированию управления организациями. Остальные десять классов базовых моделей исследованы недостаточно или вообще не исследованы.

До конца 80-х годов в подавляющем большинстве работ (примерно 90%) по теории активных систем изучались либо детерминированные АС, либо АС с внутренней интервальной неопределеностью и асимметричной информированностью (в пропорции, примерно 3 / 1); в ИТИС пропорция была примерно обратной. Теория контрактов сконцентрировала свое внимание в основном (опять-же порядка 90% работ) на АС с внешней вероятностной неопределенностью и симметричной информированностью. Примерно ту же пропорцию в теории выбора (теории реализуемости) составляли модели АС с внутренней интервальной неопределенностью и асимметричной информированностью.

Неравномерность внимания к различным классам АС может объясняться тем, что отмеченные три класса составляют "ядро", охватывая многие реальные организационные системы. Такое объяснение вряд-ли можно признать удовлетворительным. Однако, заслуженно или незаслуженно, остальные классы АС оказались практически неисследованными.

Из анализа таблицы 2 (и соответствующих работ) можно сделать следующие качественные выводы (подробнее см.указанные обзоры):

- детерминированные задачи стимулирования исследованы достаточно подробно, по крайней мере по сравнению с остальными базовыми моделями, поэтому в настоящей работе в методических целях приводятся лишь основные известные результаты;

- при исследовании вероятностных задач стимулирования в ТК основной акцент делался на вычислительные методы решения и прикладные экономические интерпретации (трудовые, страховые, долговые и др. контракты), а аналитические методы решения не разрабатывались;

- в рамках ТР основное внимание исследователей уделялось изучению манипулируемости механизмов планирования и реализуемости функций коллективного выбора, а собственнно задача стимулирования почти не решалась;

- для теоретико-игровых задач, соответствующих некоторым из базовых моделей механизмов стимулирования, в теории иерархических игр [22,34 и др.] были получены достаточно общие результаты об оптимальных стратегиях и т.д., поэтому в настящей работе при интерпретации стратегии центра как функции стимулирования большее внимание уделяется поиску "простых" решений и исследованию их свойств;

- задачи стимулирования в нечетких активных системах не исследовались.

Поэтому можно заключить, что исследованию аналитических методов решения базовых задач и их свойств для базовых моделей АС, особенно для АС, функционирующих в условиях неопределенности, уделено недостаточное внимание. Настоящая работа является попыткой заполнить этот пробел.

Ниже проводится систематическое описание результатов исследования всех перечисленных в таблице 2 классов моделей АС, за исключением М3 и М9, содержательные интерпретации которых затруднительны. Следует признать, что известные в литературе результаты исследования базовых моделей М1, М6 и М8 оказали свое влияние, и автор исторически начинал исследования механизмов стимулирования в АС с неопределенностью именно с изучения этих базовых моделей и их модификаций. Более того, оказалось, что результаты и техника анализа базовых моделей зачастую оказываются эффективны при рассмотрении новых классов АС. Это в дальнейшем позволило придти к выводу, что существует общая методология исследования механизмов стимулирования в АС с неопределенностью.

Введенная система классификаций определяет структуру дальнейшего изложения. В настоящей работе в качестве ведущей выбрана классификация по основанию вид неопределенности, вторичной - по типу неопределенности, и, наконец, третичной - по информированности участников АС. В главе 1 приведен ряд результатов анализа детерминированных АС. Во второй главе описываются АС с интервальной неопределенностью: внутренней - М2, М8 и внешней - М5, М11 (соответственно, разделы 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4). В третьей главе - АС с внешней вероятностной неопределенностью - М6 и М12 (соответственно, разделы 3.1 и 3.2) и приводится краткое обсуждение моделей М3 к М9 с внутренней вероятностной неопределенностью. В четвертой главе - АС с нечеткой неопределенностью: внутренней - М4, М7 и внешней - М10, М13 (соответственно, разделы 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4).

Напомним, что общая постановка прямой задачи стимулирования, приведенная выше, имеет вид:

$$K(\Sigma) \to \max_{\Sigma \in M},$$

где эффективность и гарантированная эффективность стимулирования определяются следующими выражениями:

$$K(\Sigma) = \max_{s \in P^*_{\theta\Gamma}(\sigma(\cdot),\pi(\cdot))} \ \max_{y \in P^*_{\theta\Gamma}(\sigma(\cdot),\pi(\cdot))} \Phi_{\theta\Gamma}(y,\pi(s),\sigma(\cdot)),$$

$$K^{\Gamma}(\Sigma) = \min_{s \in P^*_{\theta\Gamma}(\sigma(\cdot),\pi(\cdot))} \ \min_{y \in P^{y}_{\theta\Gamma}(\sigma(\cdot),\pi(\cdot))} \Phi_{\theta\Gamma}(y,\pi(s),\sigma(\cdot)).$$

Общность постановки задачи стимулирования позволяет утверждать, что для описания каждой из исследуемых ниже базовых моделей М1-М13 достаточно задать (определить конкретный вид), помимо параметров модели (информированность и т.д.), целевую функцию центра $\Phi(\cdot)$, множество решений игры $P(\cdot)$ и эффективность $K(\cdot)$. Поэтому, несколько забегая вперед, покажем, что перечисленные в таблице 1 и рассматриваемые ниже базовые модели механизмов стимулирования в активных системах с неопределенностью (М1-М13) являются частными случаями приведенной выше 1.1 общей постановки задачи стимулирования, охватывающей большинство известных моделей ТАС, ИТИС, ТК и ТР.

Детерминированные активные системы:

М1. Отсутствие неопределенности, полная и симметричная информированность: $\Omega = \hat{\theta}$ (значок "^" над параметром обозначает его конкретное значение), $z \equiv y$, $A_0 \equiv A$, $\Omega = \hat{r}$, $\sigma = \sigma(x, y)$, $I = I' = \{\hat{r}, \hat{\theta}\}$, где I - информированность АЭ, I' - информированность центра (базовая модель ТАС). Формальная постановка задачи: (1.7).

Активные системы с интервальной неопределенностью:

М2. Внутренняя неопределенность и симметричная информированность: $\Omega = \hat{\theta}$, $\Omega = [d, D] \subseteq \mathbb{R}^1$, $z \equiv y$, $A_0 \equiv A$, $I = I' = \{\hat{\theta}, \Omega\}$ (базовая модель ИТИС). Формальная постановка задачи: $\Phi(y) = H(y)$, $P(\chi)$ определяется (2.1.1).

М8. Внутренняя неопределенность и асимметричная информированность: $\Omega = \hat{\theta}$, $z \equiv y$, $A_0 \equiv A$, $S = \tilde{\Omega} = [\ d,\ D\ ]$, $I' = \{\ \hat{\theta}, \tilde{\Omega}\ \}$, $I = \{\ \hat{r},\ \hat{\theta}\ \}$ (<u>базовая модель ТР</u>). Формальная постановка задачи: $\Phi(y) = H(y)$, $P(\chi)$ и $K(\chi)$ определяются (2.2.1).

М5. Внешняя неопределенность и симметричная информированность: $\tilde{\Omega} = \hat{r}$, $\Omega = [\ d,\ D\ ]$, $I = I' = \{\ \hat{r},\ \Omega\ \}$ (ИТИС). Формальная постановка задачи: $P(\chi)$ определяется (2.3.3), $K(\chi)$ – (2.3.4).

М11. Внешняя неопределенность и асимметричная информированность: $\tilde{\Omega}=\hat{r}$, $\Omega=[d,D]$, $I' = \{\hat{r},\Omega\}$, $I = \{\ \hat{r},\ \hat{\theta}\ \}$. Формальная постановка задачи: $P(\chi)$ и $K(\chi)$ определяются (2.4.1).

<u>Вероятностные активные системы:</u>

М6. Внешняя неопределенность и симметричная информированность: $\tilde{\Omega} = \hat{r}$, $I = I' = \{\ p(e),\ \hat{r}\ \}$, где $p(e)$ – вероятностное распределение (<u>базовая модель ТК</u>). Формальная постановка задачи: $P(\chi)$ и $K(\chi)$ определяются (3.1.5).

М12. Внешняя неопределенность асимметричная информированность: $\tilde{\Omega} = \hat{r}$, $I' = \{\ p(e),\ \hat{r}\ \}$, $I = \{\ \hat{r},\ \hat{\theta}\ \}$. Формальная постановка задачи: $P(\chi)$ определяется (3.2.1), $K(\chi)$ – (3.2.3).

<u>Нечеткие активные системы:</u>

М4. Внутренняя неопределенность и симметричная информированность: $\Omega = \hat{\theta}$, $z \equiv y$, $A_0 \equiv A$, $I = I' = \{\ \hat{\theta},\ \tilde{I}\ \}$, где $\tilde{I}$ – нечеткая информация о предпочтениях (нечетком отношении предпочтения или нечеткой функции дохода) АЭ. Формальная постановка задачи: $P(\chi)$ определяется (4.1.4), $K(\chi)$ – (4.1.5).

М10. Внутренняя неопределенность и асимметричная информированность: $\Omega = \hat{\theta}$, $z \equiv y$, $A_0 \equiv A$, $I' = \{\ \hat{\theta},\ \tilde{I}\ \}$, $I = \{\ \hat{\theta},\ \hat{r}\ \}$. Формальная постановка задачи: $P(\chi)$ определяется (4.2.3), $K(\chi)$ – (4.2.4).

М7. Внешняя неопределенность и симметричная информированность: $\tilde{\Omega} = \hat{r}$, $I = I' = \{\ \hat{r},\ \tilde{P}\ \}$, где $\tilde{P}$ – нечеткая информация о состоянии природы. Формальная постановка задачи: $P(\chi)$ определяется (4.3.8), $K(\chi)$ – (4.3.9).

М13. Внешняя неопределенность и асимметричная информированность: $\tilde{\Omega} = \hat{r}$, $I = \{\ \hat{r},\ \hat{\theta}\ \}$, $I' = \{\ \hat{r},\ \tilde{P}\ \}$. Формальная постановка задачи: $P(\chi)$ определяется (4.4.1), $K(\chi)$ – (4.4.2).

МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В главах 1 - 4 проводится систематическое описание результатов исследования базовых моделей механизмов стимулирования в социально-экономических системах с соответственно: полной информированностью, интервальной, вероятностной и нечеткой неопределенностью. Перед этим рассмотрим общую методологию исследования базовых моделей, приведем сводку результатов теоретических исследований, а также качественный анализ влияния неопределенности на эффективность стимулирования.

Теоретический анализ: методология и результаты

Приводимые ниже результаты исследования базовых задач стимулирования в социально-экономических системах свидетельствуют, что в рамках базовых моделей механизмов (задач) стимулирования возможен единый методологический подход (исходный принцип, охватывающий всю совокупность используемых методов) к решению задач анализа и синтеза систем стимулирования. Несмотря на многообразие изучаемых моделей, используемый подход заключается в единообразии их описания, общности технологии (совокупности методов, операций, приемов, этапов и т.д., последовательное осуществление которых обеспечивает решение поставленной задачи), и техники (совокупность навыков, приемов, умений, позволяющая реализовывать технологию) исследования, причем последняя основывается на изучении множеств реализуемых действий и минимальных затрат на стимулирование. Поясним последнее утверждение, рассмотрев описание, технологию и технику построения и исследования моделей механизмов стимулирования как в детерминированных активных системах, так и в АС с различными типами и видами неопределенности.

После описания модели, то есть задания в соответствии с введенными выше параметрами модели и системой классификаций задач стимулирования в АС, класса исследуемых активных систем, определяется рациональное поведение АЭ: на основании известных предпочтений АЭ на множестве результатов деятельности (эти предпочтения зависят от используемой центром системы стимулирования) и имеющейся информации о неопределенных факторах (взаимосвязи между действиями АЭ и результатами его деятельности) определяются предпочтения АЭ на множестве его стратегий (действий и/или сообщаемых оценок). В случае интервальной неопределенности этот переход осуществляется с использованием принципа МГР, в случае вероятностной (нечеткой) неопределенности целевая функция АЭ на множестве результатов его деятельности совместно с распределением вероятностей (нечеткой информационной функцией) индуцирует на множестве допустимых стратегий целевую функцию - ожидаемую полезность (индуцированное нечеткое отношение предпочтения (НОП) и т.д.).

Множество выбора при заданном множестве стратегий и предпочтениях АЭ, выражаемых, например, его целевой функцией, НОП и т.д., определяется стандартным образом. В случае, если множество выбора состоит более, чем из одного элемента, необходимо доопределить однозначно (используя ГБ или МГР) выбор АЭ. Этот выбор будет зависеть от системы стимулирования, эффективность которой задается значением целевой функции центра на множестве выбора АЭ (если предпочтения центра зависят от неопределенных параметров, то, как описывалось выше, ищется его детерминированная индуцированная система предпочтений). Следует отметить, что структура предпочтений центра и АЭ (возможность ранжирования стратегий) в большинстве случаев позволяет определять выбор (недоминируемые стратегии) достаточно тривиально. При менее "хороших" предпочтениях АЭ (например, нетранзитивных и т.д.) предложенные подходы могут доопределяться для случаев использования различных турнирных решений и более сложных соответствий выбора, что, правда, требует дальнейших исследований.

Имея критерий сравнения эффективностей различных систем стимулирования на их допустимом множестве, задача синтеза формулируется следующим образом: найти допустимую систему стимулирования, имеющую максимальную эффективность. Все трудности при решении этой задачи (поиска точки в области функционального пространства, максимизирущей заданный функционал, переменные которого в свою очередь сложным образом зависят от искомой функции) возникают потому, что она в общем случае не может быть сведена к какой-либо стандартной задаче оптимизации. В детерминированном случае свойства решения (которое является скачкообразной системой стимулирования) дается теоремой Ю.Б.Гермейера [22]. В ряде АС с неопределенностью удается дискретные задачи стимулирования свести к тем или иным известным оптимизационным (см. обзоры [9,10,44]).

Высокая вычислительная сложность алгоритмов численного решения дискетных задач и отсутствие возможности анализа зависимости оптимального решения от параметров модели, приводят к необходимости разработки методов получения именно аналитического решения. Поэтому основной акцент при описании оригинальных результатов в главах 2 - 4 делается именно на поиск аналитического решения задачи синтеза.

Лобовой поиск аналитического решения, как правило, не приводит к успеху - в большинстве случаев приходится "угадывать" решение, а затем доказывать его оптимальность, благо, что эвристические принципы угадывания, да и техника формального доказательства для различных моделей АС имеют много общего.

Техника доказательства большинства результатов использует анализ множества реализуемых действий - тех действий АЭ, которые он выбирает (гарантированно или по ГБ) при заданной функции стимулирования. Критерий сравнения различных систем стимулирования по эффективности может быть сформулирован в терминах множеств реализуемых действий: чем "шире" множество действий, реализуемых системой стимулирования, тем в рамках ГБ выше ее эффективность (двойственным подходом является сравнение затрат на стимулирование по реализации фиксированного действия). Поэтому оптимальная система стимулирования (или их класс) имеет максимальное множество реализуемых действий. Следовательно, для того, чтобы доказать оптимальность некоторого класса систем стимулирования достаточно показать, что не существует другой допустимой системы стимулирования, имеющей большее множество реализуемых действий. Этот подход оказывается плодотворным не только при доказательстве оптимальности, но и при исследовании свойств решения, влияния неопределенности и т.д.

Более того, в рамках каждой из базовых моделей М1-М13 возможны различные задачи стимулирования - прямые и обратные, первого и второго рода, с различными представлениями целевых функций участников АС и т.д. В то же время, проведенный анализ свидетельствует, что достаточно исследовать полностью одну из них - решение остальных задач данного класса требует лишь незначительных модификаций.

В качестве иллюстрации использования единства предложенного методологического подхода сформулируем общую для всех моделей АС с неопределенностью последовательность их исследования, включающую следующие этапы:

1. Описание модели: определение целевых функций и допустимых множеств, их свойств, а также порядка функционирования и информированности участников АС.

2. Определение рационального поведения АЭ в рамках рассматриваемой модели: задание процедуры (метода) устранения неопределенности и рационального выбора АЭ (определение множества решений игры - множества реализуемых действий).

3. Определение эффективности механизма стимулирования и формулировка, собственно, задачи синтеза оптимального механизма стимулирования.

4. Решение задачи синтеза: поиск аналитического решения и/или разработка алгоритмов численного решения задачи и исследование их свойств: сходимости, сложности и т.д.

5. Нахождение необходимых и достаточных условий оптимальности.

6. Анализ оптимального решения:

а) свойства оптимального решения и множества реализуемых действий, содержательные интерпретации;

б) влияние неопределенности на эффективность и свойства оптимального механизма стимулирования;

в) влияние параметров модели и определения рационального поведения на эффективность и свойства оптимального механизма стимулирования, в том числе - анализ "устойчивости" оптимального решения.

7. Исследование частных случаев (при усилении предположений и допущений о параметрах и свойствах модели АС) и возможностей обобщения (соответственно, при ослаблении).

8. Исследование устойчивости решений и адекватности модели моделируемой системе.

9. Внедрение модели: корректировка, разработка рекомендаций по практическому использованию, создание вычислительных средств, автоматизированных систем поддержки принятия решений и имитационных моделей.

Итак, этапы 1-3 включают описание АС и постановку задачи, этапы 4-5 соответствуют аналитическому и/или численному решению задачи, этапы 6-8 - исследованию модели и свойств оптимального решения, этап 9 - внедрению и практическому использованию результатов исследования.

Приведенная общая последовательность исследования (этапы 1-7) реализуются в главах 1-4 для базовых задач стимулирования. Качественное обсуждение выходящих за рамки настоящей работы этапов 8-9 проводится в заключении.

Обнадеживающим представляется тот факт, что оптимальными в базовых моделях оказываются достаточно "простые" системы стимулирования. Так, результаты теоретического исследования подтверждают высокую эффективность следующих широко распространенных на практике систем стимулирования (их формальное описание приведено в главе 1):

- <u>скачкообразных</u> <u>(С-типа)</u>, при использовании которых АЭ поощряется (наказывается) либо на максимально возможную - фиксированную - величину, либо не поощряется (не наказывается) вообще, в зависимости от результатов его деятельности;

- <u>компенсаторных</u> <u>(К-типа)</u>, при использовании которых стимулирование (штрафы) компенсирует изменение функции затрат (дохода), делая целевую функцию АЭ постоянной в определенном диапазоне значений результата деятельности;

- <u>пропорциональных</u> <u>(L-типа)</u>, при использовании которых стимулирование (штрафы) АЭ прямо пропорционально (изменяется линейно с постоянной "ставкой" - коэффициентом пропорциональности) результатам его деятельности.

Таблица 3 содержит сводку результатов теоретического исследования задач стимулирования в АС с неопределеннностью: для базовых моделей М1-М13 указаны оптимальные системы стимулирования (ОСС), соотношение между эффективностями К и гарантированными эффективностями $K^{Г}$ стимулирования в АС с неопределённостью и соответствующих детерминированных АС (K_{o} и $K^{Г}_{o}$), изменение эффективности (гарантированной эффективности) с ростом неопределенности U ("↑" - возрастает, "↓" - убывает, "↑↓" - может как возрастать, так и убывать), а также номера предположений и формальных результатов, устанавливающих указанные свойства механизмов стимулирования (см. главы 1 - 4).

N	ОСС	K/K_{o}	$K^{Г}/K^{Г}_{o}$	K(U)	$K^{Г}$(U)	предположения	Утверждения
М1	С и К	=1	≤1	–	–	1.1 - 1.4	1.4
М2	С и К	≤1	≤1	↓	↓	2.1.1 2.1.2	2.1.1-2.1.5
М4	С или К	$^{\le}_{\ge}1$	≤1	↓↑	↓	4.1.1-4.1.3	4.1.3, 4.1.4 4.1.6
М5	К	≤1	≤1	↓	↓	2.3.1 2.3.2	2.3.1, 2.3.2
М6	С или К	≤1	≤1	↓	↓	3.1.1-3.1.6	3.1.8 (10,14, 16,19,23)
М7	С или К	≥1	≤1	↑	↓	4.3.1	4.3.5, 4.3.7 4.3.8, 4.3.10
М8	С	$^{\le}_{\ge}1$	≤1	↓↑	↓	2.2.1-2.2.7	2.2.4, 5.1.2
М10	С и К	≤1	≤1	↓	↓	4.2.1 4.2.2	4.2.1, 4.2.2
М11	С и К	≤1	≤1	↓	↓	2.4.1-2.4.3	2.4.1-2.4.4
М12	С или К	$^{\le}_{\ge}1$	≤1	↓↑	↓	3.2.1 3.2.2	3.2.1-3.2.3
М13	С	≤1	≤1	↓	↓	4.4.1	4.4.2, 4.4.3

Таблица 3. Сводка результатов теоретического исследования базовых моделей

Итак, в базовых моделях механизмов стимулирования в активных ситемах с неопределенностью в рамках вводимых ниже предположений оптимальными оказываются следующие системы стимулирования:

М1. С-типа и К-типа ("и" означает - одновременно).

М2. С-типа и К-типа.

М4. С-типа или К-типа ("или" означает - в зависимости от вводимых предположений).

M5. K-типа.
M6. С-типа или К-типа.
M7. С-типа или К-типа.
M8. С-типа.
M10. С-типа и К-типа.
M11. С-типа и К-типа.
M12. С-типа или К-типа.
M13. С-типа.

Отдельно следует отметить, что ни в одной из базовых моделей пропорциональные системы стимулирования (L-типа) не доминировали скачкообразные и компенсаторные: ситуации, в которых имело бы место: $K_L > K_c$ и одновременно $K_L > K_к$ не встречались.

Таким образом, <u>единый методологический подход к разработке и исследованию всего многообразия базовых механизмов стимулирования в активных системах с неопределенностью заключается в общности их описания, технологии и техники исследования и использует при решении задач анализа и синтеза свойства зависимости множеств реализуемых действий (и/или минимальных затрат на стимулирование) от параметров активной системы.</u>

Приведенные в главах 1 - 4 теоретические результаты анализа и синтеза базовых механизмов стимулирования в активных системах с интервальной, вероятностной и нечеткой неопределенностью, полученные в рамках единого методологического подхода, составляют теоретическую основу для разработки и исследования механизмов стимулирования в широком классе сложных АС с неопределенностью.

Неопределенность и эффективность стимулирования

Возможность использования единого подхода к анализу базовых моделей механизмов стимулирования в активных системах с различными типами и видами неопределенности позволяет сделать ряд общих выводов о роли неопределенности в управлении (в частности - стимулировании) АС.

В детерминированной активной системе оптимальным оказывается целое множество систем стимулирования - от наиболее "жестких" -

скачкообразных до наиболее слабых - компенсаторных. 'Задачи стимулирования в АС с неопределенностью, рассматриваемые в настоящей работе, удовлетворяют принципу соответствия: при предельном переходе ("стремлении" ненопределенности к "нулю") они переходят в детерминированные АС, а их оптимальные решения - в оптимальные решения соответствующих детерминированных задач стимулирования. Причем в большинстве случаев оптимальными оказываются "граничные" системы стимулирования - С-типа или К-типа. Таким образом, множество оптимальных систем стимулирования в АС с неопределенностью является подмножеством (иногда собственным) систем стимулирования, оптимальных в соответствующих детерминированных активных системах.

Ключевыми понятиями детерминированной теории активных систем являются понятия согласованного плана и согласованной системы стимулирования (см., например, [12] и главу 1 настоящей работы). Если при исследовании базовых моделей механизмов стимулирования в АС с неопределенностью основной акцент делается на анализ множества реализуемых действий, а условие реализуемости есть ни что иное, как условие согласованности (в ТК этому термину соответствует ICC - Incentive Compatibility Constraint - ограничение согласованности стимулирования [9]), то вопрос о том, что следует понимать под согласованностью плана в АС с неопределенностью заслуживает особого обсуждения.

Так как, например, в вероятностных АС, результат деятельности АЭ является случайной величиной, то вряд-ли разумно определять план как некоторую точку множества A_0 (хотя, задавая область в этом множестве, можно считать ее "планом", который выполняется, если при выборе АЭ реализованного действия результат деятельности оказывается в этой области, например, с вероятностью не ниже заданной и т.д.). Считать планом точку скачка (проводя полную аналогию с детерминированным случаем) не целесообразно по тем же причинам. Так или иначе, даже не наблюдая действий АЭ, центр, подбирая систему стимулирования, управляет именно выбором действия. Поэтому можно считать планом действие, реализуемое системой стимулирования С-типа (такой план всегда согласован).

Важный методологический вывод, который следует из проведенного анализа, заключается в следующем: непосредственное обобщение понятий плана и согласованного плана с детерминированной модели на модели АС с неопределенностью невозможно, так как в общем случае в последних план (в детерминированном понимании) не совпадает ни с выбором (действием) АЭ, ни с результатом его деятельности. Поэтому требуется дополнительное исследование и введение нового более общего понятия плана для АС с неопределенностью, которое удовлетворяло бы принципу соответствия и включало в себя "детерминированное" определение как частный случай.

Вполне согласованным с практическим опытом является и результат о том, что во всех базовых моделях с ростом верхнего ограничения механизма стимулирования расширяется множество реализуемых действий, что совместно с результатами анализа влияния информированности участников на эффективность управления АС позволяет расширить класс моделей АС, для которых применима использованная технология и техника анализа, включив в него АС с платой за информацию, смешанной неопределенностью, квазидинамические и квазимногоэлементные АС и т.д.

Поэтому, по-видимому, целесообразно следовать следующей рекомендации: первыми "кандидатами на оптимальность" в любой новой (неисследованной) социально-экономической системе являются скачкообразные и компенсаторные системы стимулирования. Приведенные в настоящей работе методы и алгоритмы исследования эффективности систем стимулирования позволяют достаточно просто проверять оптимальность этих "кандидатов" в широком классе реальных систем и их моделей.

Принципу соответствия удовлетворяют также большинство выводов о влиянии неопределенности на эффективность стимулирования, причем, что представляется крайне важным, опять-же, общей является следующая технология анализа роли неопределенности в АС с интервальной, вероятностной и нечеткой неопределенностью.

Для двух АС, отличающихся либо множеством значений неопределенного фактора, либо той информацией, которую имеют о нем участники АС, вводится критерий сравнения "величин" неопределенности, с одной стороны учитывающий специфику задачи, а с другой - согласованный с известными мерами неопределенности (например - энтропией и т.д.). Далее показывается, что в АС с большей неопределенностью множество действий АЭ, реализуемых любой допустимой системой стимулирования, не шире (шире), чем в АС с меньшей неопределенностью, что позволяет сразу сделать вывод и о сравнительной эффективности оптимальных систем стимулирования в этих АС.

При использовании гипотезы благожелательности в ряде моделей АС с неопределенностью (см., например, М4, М7, М8, М12) эффективность стимулирования оказывается не меньше, чем в соответствующих детерминированных АС, и возрастает с ростом неопределенности (содержательные интерпретации и подробное обсуждение этого "парадокса" приведены ниже [45,87]).

Если эффективность стимулирования определяется как гарантированное значение целевой функции центра на множестве реализуемых действий, то для всех рассмотренных моделей, независимо от типа и вида неопределенности, справедливы следующие выводы: эффективность стимулирования в АС с неопределенностью не выше, чем в детерминированной АС, причем с ростом неопределенности эффективность стимулирования уменьшается, а с уменьшением неопределенности - возрастает и стремится к аналогичному показателю для соответствующей детерминированной активной системы.

Общность описания и технологии анализа задач стимулирования в различных социально-экономических системах с неопределенностью позволяет также "сравнивать" неопределенности различных видов, выделяя классы интервалов, вероятностных распределений и нечетких информационных функций, то есть информацию о неопределенном параметре, при которых эффективность стимулирования удовлетворяет заданным свойствам (например, не ниже заданной и т.д.).

Механизмы стимулирования с платой за информацию

При описании моделей механизмов стимулирования в условиях неопределенности (главы 2-4) значительное внимание уделяется исследованию влияния величины неопределенности на эффективность стимулирования. Оказывается справедливым вывод, что чем больше неопределенность, тем ниже гарантированная эффективность управления активной системой, причем в АС с неопределенностью этот показатель, как правило, был не выше, чем в соответствующей детерминированной АС.

Понятие "величины" неопределенности и критерии их сравнения вводятся с учетом специфики рассматриваемой модели, однако, во всех моделях величина неопределенности связана с иннформированностью участников: чем большей информацией обладает центр и/или активный элемент, тем меньше неопределенность. Последний вывод справедлив независимо от типа и вида неопределенности: в АС с интервальной неопределенностью "мерой" неопределенности является интервал возможных значений неизвестного параметра, в вероятностных АС - аналог энтропии, в нечетких АС - соотношение между функциями принадлежности и т.д.

Важно, что во всех случаях вводится не числовая "мера" неопределенности, а качественный критерий сравнения двух АС по величине неопределенности типа "больше - меньше". Действительно, важно определить в какой из двух АС неопределенность выше, а вопрос: "на сколько?" не поднимается.

В большинстве известных моделей считается, что участники АС, обладая на момент принятия решения некоторой информацией, могут использовать эту информацию и только ее. Возможность получения дополнительной информации отсутствует (использование механизмов с сообщением информации от АЭ центру не является исключением: несмотря на то, что центр получает новую информацию, он получает ее после выбора процедуры планирования, причем сам факт обмена информацией изначально заложен в механизме функционирования). Такой порядок функционирования достаточно распространен на практике. Однако, встречаются ситуации, в которых участники АС имеют возможность до принятия решения целенаправленно получать информацию из окружающей среды или от других участников системы, причем, в большинстве случаев, для получения этой информации необходимы некоторые финансовые или какие-либо другие затраты.

Механизмы стимулирования, в которых участники АС имеют возможность за плату приобрести информацию, получили название механизмов стимулирования с платой за информацию [48]. При использовании механизмов с платой за информацию имеют место две противоположные тенденции. С одной стороны, получение дополнительной информации может повысить эффективность управления. С другой стороны, часть средств, потраченная на приобретение информации уменьшает доход участника АС или его возможности по управлению, что может привести к снижению эффективности стимулирования. Если точность и количество поступающей информации монотонно связаны с затратами на ее получение, то, очевидно, существует некоторый оптимум – компромисс между снижением эффективности, вызванным уменьшением управляющих возможностей, и ее ростом, обусловленным большей информированностью.

Различают механизмы стимулирования с платой за информацию двух типов. В первом (частном) случае центр имеет возможность, заплатив некоторую величину ΔC, получить всю необходимую информацию о внутренних и внешних параметрах, сведя для себя задачу к детерминированной. С ростом величины ΔC уменьшаются управляющие возможности центра, поэтому задача заключается в определении максимальной величины ΔC^*, которую центру еще выгодно заплатить (в сравнении с решением исходной задачи в условиях неопределенности).

В моделях второго типа количество приобретаемой информации (и, следовательно, остающаяся неопределенность) является переменной величиной, монотонно зависящей от затрат на приобретение информации (общий случай, включающий как частный модели первого типа). Тогда задача заключается в определении оптимальной, то есть максимизирующей эффективность стимулирования, платы за информацию. При этом не исключается, что возможны ситуации, в которых приобретать дополнительную информацию вообще не имеет смысла (плата слишком высока), или наоборот, оказывается целесообразным полное устранение неопределенности.

Существенной чертой механизмов с платой за информацию является добровольность ее приобретения: каждый из участников АС вправе самостоятельно решать приобретать ли ему дополнительную информацию и в каком объеме. Понятно, что, в принципе, приобретать информацию могут как центр, так и активные элементы. Важно также различать у кого приобретается информация – у третьих лиц, не входящих в состав АС, или у участников самой активной системы. Так, например, возможны механизмы с сообщением информации в АС, в которых центр может, заплатив АЭ определенную сумму, например, уменьшить диапазон возможных (неизвестных для него) значений неопределенного параметра, а затем использовать механизм планирования уже в условиях меньшей неопределенности. Задача манипулирования при этом все равно возникает, однако, следует учитывать, что плата за информацию может увеличить значение целевой функции АЭ.

Для получения ответа на вопрос целесообразно ли использование механизмов с платой за информацию и определения оптимальной величины этой платы необходимо в каждом конкретном случае:

1. Определить зависимость информированности участников АС от величины платы за информацию.

2. Найти соотношение между эффективностью стимулирования и информированностью участников (величина платы за информацию выступает при этом как параметр). Уравнение, связывающее максимальное реализуемое действие с величиной платы за информацию, получило название "основного уравнения" для соответствующего механизма с платой за информацию.

3. Вычислить величину платы за информацию, максимизирующую эффективность стимулирования (из основного уравнения найти $\Delta C^* \in [0,C]$, максимизирующее целевую функцию центра).

В частном случае, когда величина платы за информацию ΔC фиксирована, следует определить эффективности оптимальных механизмов стимулирования в исходной АС с неопределенностью при ограничении C и в соответствующей детерминированной АС с ограничением $(C-\Delta C)$, что дает возможность найти максимальную величину платы за информацию, которая еще выгодна центру. Сравнение полученного значения с существующим (в данной АС) позволяет принять решение о целесообразности приобретения дополнительной информации.

Приводимые ниже при описании базовых моделей примеры, иллюстрирующие описанный подход, свидетельствуют, что, во-первых, возможность приобретения информации может повысить эффективность стимулирования в АС с неопределенностью, и, во-вторых, существует единая для АС с различными видами и типами неопределенности методика определения оптимальной величины платы за информацию и условий целесообразности использования механизмов этого класса.

Перейдем к рассмотрению собственно базовых моделей механизмов стимулирования в социально-экономических системах.

ГЛАВА 1. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Исследованию прямых детерминированных задач стимулирования первого рода в ТАС посвящено значительное число работ [2,5,11,12,14,19 и др.]. В настоящем разделе приводятся как известные, так и оригинальные результаты решения задач стимулирования в детерминированных активных системах. Необходимость их краткого описания перед переходом к исследованию моделей с неопределенностью обусловлена следующими факторами. Во-первых, АС с полной информированностью участников являются в некотором смысле простейшими и многие результаты детерминированной теории обобщены на случай АС с неопределенностью. Во-вторых, детерминированные АС являются предельным случаем АС с неопределенностью. Принцип соответствия требует, чтобы при уменьшении неопределенности характеристики механизмов стимулирования в АС с неопределенностью стремились (в оговариваемом ниже смысле) к соответствующим характеристикам детерминированных АС. И, наконец, в-третьих, при изучении роли неопределенности эффективность стимулирования в детеминированной АС является тем эталоном, с которым сравниваются эффективности стимулирования в различных АС с неопределенностью.

Детерминированная задача стимулирования первого рода

В данной базовой модели (М1): $\Omega=\hat{\theta}$ (значок "ˆ" над параметром обозначает его конкретное значение), $z \equiv y$, $A_0 \equiv A$, $\hat{\Omega} = \hat{r}$, $\sigma = \sigma(x,y)$, $I = I' = \{ \hat{r}, \hat{в} \}$, где I – информированность АЭ, I' – информированность центра.

Обозначим SP – класс действительнозначных функций $q(x)$, определенных на $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $q(x)$ – непрерывная функция;

2) существует единственная точка $r \in \mathbb{R}^1$ (возможно $r = -\infty$ или $r = +\infty$) такая, что $q(x)$ строго монотонно возрастает при $x < r$ и строго монотонно убывает при $x > r$;

3) $q(r) < +\infty$.

Функции, принадлежащие классу SP называются однопиковыми.

Обозначим SP' - класс действительнозначных функций $q(x)$, определенных на $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $q(x)$ - полунепрерывна сверху;

2) существуют точки r^-, $r^+ \in \mathbb{R}^1$ (возможно $r^- = r^+ = r$, $r^- = -\infty$ или $r^+ = +\infty$) такие, что $q(x)$ не убывает при $x \le r^-$, постоянна при $x \in [r^-, r^+]$ и не возрастает при $x \ge r^+$;

3) $q(r^{\pm}) < +\infty$.

Функции, принадлежащие классу SP' называются квазиоднопиковыми (при рассмотрении квазиоднопиковых функций считается, что $r^{\pm}$ равно либо r^-, либо, r^+; r - произвольная точка отрезка $[r^-, r^+]$).

Рассмотрим двухуровневую иерархическую активную систему веерного типа, состоящую из центра и n активных элементов [12,14]. Обозначим: $I = \{1, 2, \dots, n\}$ - множество активных элементов; $y_i \in A_i$ - действие i-го АЭ, $h_i(y_i)$ - его функция дохода, $C_i(y_i)$ - функция затрат, $x_i \in X_i$ - план, назначенный i-му АЭ, $\chi_i(x_i, y_i) \in M_i$ - функция штрафов, $\sigma_i(x_i, y_i) \in M_i$ - функция стимулирования, $i \in I$.

Введем следующие предположения.

А.1.1. $A_i = X_i = \mathbb{R}^1$, $i \in I$.

Для большинства рассматриваемых ниже моделей можно считать, что $\exists\, A^-, A^+$: $A = X = [A^-, A^+]$, где $-\infty < A^- \ll r \ll A^+ < +\infty$.

А.1.2. χ_i - неотрицательная равномерно ограниченная сверху:

$$0 \le \chi_i(x_i, y_i) \le C_i < +\infty, \quad \forall\, y_i \in A_i,\ x_i \in X_i,\ i \in I$$

кусочно-непрерывная функция. Вектор $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ называется ограничением механизма стимулирования.

А.1.3. $h_i(\cdot) \in SP'$, $i \in I$.

А.1.4. $-C_i(\cdot) \in SP'$, $C_i(0) = 0$, $i \in I$.

Отметим, что в первой главе используется двойная нумерация формул, предположений, утверждений и примеров: "$n_1.n_3$", где $n_1=1$ - номер главы, а n_3 - порядковый номер объекта. В главах 2-4 используется тройная нумерация: "$n_1.n_2.n_3$", где n_1 - номер главы, n_2 - номер раздела, n_3 - порядковый номер объекта в разделе.

Обозначим $\chi = \{\chi_i\}_{i=1}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Предположение А.1.1 соответствует гипотезе независимого поведения

(ГНП), то есть независимости элементов: $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Можно показать, что в активных системах, в которых действие АЭ (и, соответственно, его план) является конечномерным вектором (A_i и X_i принадлежат E^{n_i}), приведенные ниже результаты также имеют место.

Ограниченность функций штрафов и стимулирования (предположение А.1.2) достаточно логична, так как если штрафы не ограничены, то при предположении А.1.3 центр может побудить АЭ выбрать любое действие. Предположениям А.1.3 и А.1.4 удовлетворяют функции дохода и затрат большинства экономических объектов [12,31].

Целевая функция i-го АЭ имеет вид "доход минус штрафы":

$$(1.1)\quad f_i(x_i, y_i) = h_i(y_i) - \chi_i(x_i, y_i),\ i \in I,$$

или "стимулирование минус затраты":

$$(1.2)\quad f_i(x_i, y_i) = \sigma_i(x_i, y_i) - C_i(y_i),\ i \in I.$$

Большинство рассматриваемых ниже моделей использует представление (1.1) при $y_i \geq r_i$, что не снижает общности, так как, если выполнены А.1.3 и А.1.4, то все результаты для $y_i \geq r_i$ легко переносятся на случай $y_i \leq r_i$, а (1.1) и (1.2) совпадают с точностью до линейного преобразования.

<u>Предположения А.1.1 - А.1.4 будут считаться выполненными, если не оговорено особо, в ходе всего последующего изложения.</u>

Так как АЭ независимы, то множество решений игры имеет вид:

$$P(\chi, x) = \prod_{i=1}^{n} P_i(\chi_i, x_i), \text{ где } X = \prod_{i=1}^{n} X_i \text{ и}$$

$$(1.3)\quad P_i(\chi_i, x_i) = \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in A_i} \{ h_i(y_i) - \chi_i(x_i, y_i) \},\ i \in I.$$

Обозначим множество согласованных планов [2,12]:

$$Q(\chi) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(\chi_i), \text{ где}$$

$$(1.4)\quad Q_i(\chi_i) = \{ x_i \in X_i \mid h_i(x_i) - \chi_i(x_i, x_i) \geq$$
$$\geq h_i(y_i) - \chi_i(x_i, y_i)\ \forall\ y_i \in A_i \},\ i \in I.$$

Эффективность механизма стимулирования определяется как:

$$(1.5)\quad K(x,\chi) = \max_{y \in P(\chi,x)} \Phi(x, y),$$

а гарантированная эффективность:

$$(1.6)\quad K^{\Gamma}(x,\chi) = \min_{y \in P(\chi,x)} \Phi(x, y),$$

где $\Phi(x, y)$ – целевая функция центра. Задача стимулирования заключается в выборе механизма стимулирования, имеющего максимальную эффективность:

$$(1.7)\quad K(x,\chi) \to \max_{x \in X,\ \chi \in M}.$$

или максимальную гарантированную эффективность: $K(x,\chi)^{\Gamma} \to \max\limits_{x \in X,\ \chi \in M}$.
Использование максимума по множеству решений игры оправданно, если выполнена гипотеза благожелательности (ГБ): из действий, максимизирующих его целевую функцию АЭ выбирает действие, наиболее благоприятное для центра.

Согласованной называется система стимулирования, для которой $Q = P(\chi) = \bigcup\limits_{x \in X} P(\chi,x)$ [12]. Согласованные системы стимулирования обладают тем привлекательным свойством, что назначаемые элементам планы выполняются.

В силу полунепрерывности сверху функций дохода элементов множества Q_i связны и замкнуты, а из А.1.3. и ограниченности C_i следует их ограниченность. В силу ГНП, множество Q выпукло. Более того, если выполнена ГБ и А.1.1 – А.1.3 (А.1.4), то $\bigcup\limits_{\chi \in M} Q(\chi)$ – выпуклое замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$.

Система стимулирования следующего вида:

$$(1.8)\quad \chi_i^{c}(x_i, y_i) = \begin{cases} 0, & y_i \ (\substack{\le \\ \ge})\ x_i \\ C_i, & y_i \ (\substack{> \\ <})\ x_i \end{cases}, \qquad i \in I$$

называется скачкообразной (С-типа). Множество систем стимулирования С-типа при всевозможных $x \in X$ обозначим $M_x \subseteq M$. Систему стимулирования:

$$\chi_i^{QC}(x_i, y_i) = \begin{cases} 0, & y_i = x_i \\ C_i, & y_i \ne x_i \end{cases}, \qquad i \in I$$

назовем квазискачкообразной (QC-типа).

Введем также компенсаторные (К - типа) системы стимулирования, имеющие вид (при рассмотрении одноэлементных АС (n=1) индекс "i" опускается):

$$(1.9)\quad \chi_k(y) = \begin{cases} h(y) - [\, h_{max} - C \,],\ y \in [\, y^-, y^+ \,] \\ 0,\ y \notin [\, y^-, y^+ \,] \end{cases},$$

где $h_{max} = h(y_2)$, $y_2 = r$, и квазикомпенсаторные (QK-типа) системы стимулирования, определяемые следующим образом:

$$\chi_k^Q(x,y) = \begin{cases} h(y) - [\, h_{max} - C \,],\ y = x \\ C,\ y \neq x \end{cases}$$

Множество систем стимулирования К-типа обозначим M_k ($M_k=M_k(h(\cdot))$). Эскизы графиков различных функций стимулирования при параболической функции затрат приведены на рисунках 4 - 7.

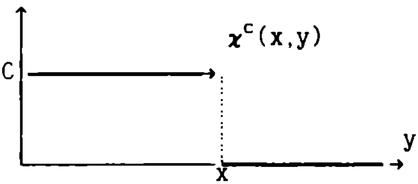

Рис. 4.
Скачкообразная функция стимулирования

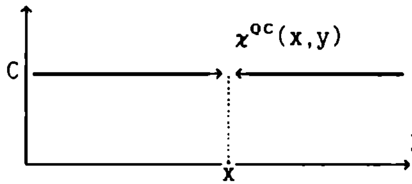

Рис. 5.
Квазискачкообразная функция стимулирования

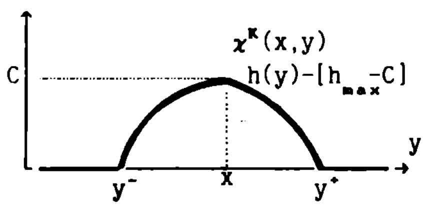

Рис. 6.
Компенсаторная функция стимулирования

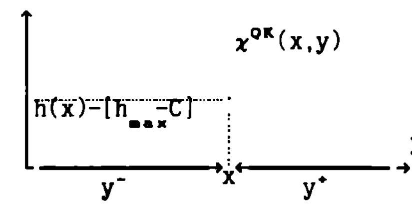

Рис. 7.
Квазикомпенсаторная функция стимулирования

Максимальное множество действий АЭ, реализуемых при заданных ограничениях механизма стимулирования определяется следующим утверждением.

Утверждение 1.1. Если выполнена ГБ и А.1.1 - А.1.3, то согласованная система стимулирования С-типа имеет при данных ограничениях (c_1, c_2, ..., c_n) механизма стимулирования максимальное множество реализуемых действий: $Q_i(\chi_i^c) = [y_i^-, y_i^+]$, $x_i \in X_i$, $i \in I$, где

$$y_i^- = \min \{ y \in A_i \mid h_i(y) \geq h_i(r_i) - c_i \},$$

$$y_i^+ = \max \{ y \in A_i \mid h_i(y) \geq h_i(r_i) - c_i \}, \ i \in I. \Rightarrow$$

Значок "⇒" в конце утверждения означает, что его доказательство вынесено в приложение.

Утверждения 1.1, 1.3, 1.5-1.7 не являются оригинальными - их аналоги можно найти, например, в [12]. Доказательства некоторых из этих утверждений приводятся в методических целях - для полноты представлений о технике доказательств.

Отметим, что наибольший интерес при исследовании механизмов стимулирования представляет случай, когда целевая функция центра монотонна по действию или результату деятельности активного элемента, точнее говоря - когда ее максимум достигается вне множества реализуемых действий. Действительно, если абсолютно оптимальное для центра действие АЭ меньше максимального из реализуемых, то оно также реализуемо в силу связности множества реализуемых действий (этот факт имеет место не только в детерминированных АС, но и во всех базовых моделях - см. ниже). Поэтому, если не оговорено особо, мы будем считать, что цель центра - побудить АЭ выбрать как можно большее действие.

Пример 1.1. Пусть функция дохода АЭ: $h(y) = y - y^2/2r$, где r - некоторая положительная константа. Тогда $y^{\pm} = r \pm \sqrt{2rC}$ и оптимальный план $x^* = y^+$. Система стимулирования $\chi_c(x^*, y)$ реализует максимальное действие y^+ (см. рисунок 8). o

Значок "o" означает окончание доказательства, примера и т.п.

В большинстве рассматриваемых в настоящей работе базовых моделей оптимальными оказываются системы стимулирования С-типа или К-типа, причем, зачастую, явно или неявно подразумевается их интерпретация как зависимость материального вознаграждения (зарплаты) от тех или иных показателей (действий АЭ, результатов их деятельности и т.д.). Использование скачкообразных и компенсаторных функций стимулирования оправданно, в частности, в

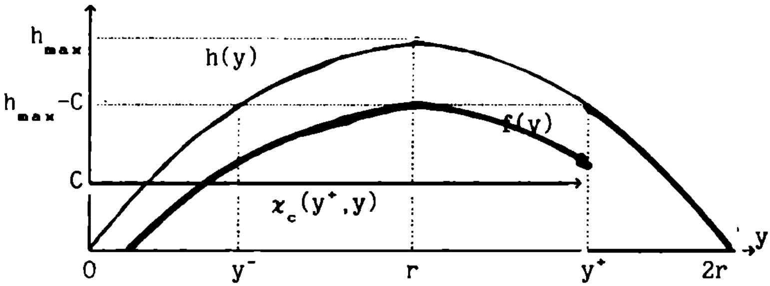

Рис. 8. Целевая функция АЭ в примере 1.1.

силу их простой структуры и легкости содержательных интерпретаций. В то же время, достаточно распространены на практике так называемые сдельные системы оплаты, когда вознаграждение пропорционально, например, количеству произведенной продукции. Поэтому исследуем соотношение между эффективностями стимулирования систем стимулирования С-типа, К-типа и пропорциональными (линейными) системами стимулирования, в которых значение функции стимулирования прямо пропорционально действию АЭ или результату его деятельности и которые мы условно обозначим как системы стимулирования L-типа.

Будем различать класс M_L - неограниченных пропорциональных систем стимулирования: $M_L = \bigcup_{\alpha=0}^{\infty} M_L(\alpha)$, где

$$M_L(\alpha) = \{ \chi(x,y) \mid \chi(x,y) = \beta \mid x - y \mid, \beta \in [0,\alpha] \}$$

и класс $M_L^{'}$ - пропорциональных систем стимулирования, ограниченных неотрицательной константой С: $M_L^{'} = \bigcup_{\alpha=0}^{\infty} M_L^{'}(\alpha)$, где

$$M_L^{'}(\alpha) = \{ \chi(x,y) \mid \chi(x,y) = \min (C, \beta \mid x - y \mid), \beta \in [0,\alpha] \}.$$

Эскиз графика системы стимулирования L-типа для случая, когда целевая функция АЭ имеет вид "доход минус штрафы" приведен на рисунке 9 (если используется представление "стимулирование минус затраты", то, очевидно, следует в определении $M_L(\alpha)$ положить x = 0).

Понятно, что $K_L^{'} \le K_L$, поэтому исследуем системы стимулирования из класса M_L.

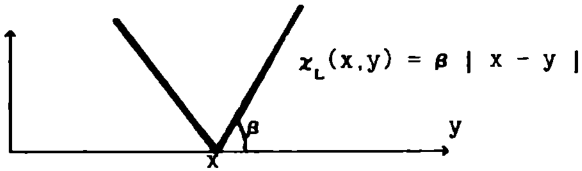

Рис. 9. Пропорциональная функция стимулирования

Введем в рассмотрение такую субъективную характеристику работника, как количество часов (в день) $t(h)$, которое он готов отработать за данную зарплату h (ставку заработной платы). Предположим, что ежедневное рабочее время может изменяться между 0 и 16 часами. Рассмотрим следующие случаи.

1. Функция $t(h)$ - линейна: $t = \alpha h$. Это предположение означает, что работник одинаково оценивает каждый час своего рабочего в α^{-1}. Его функция затрат будет также линейна. Пусть β - ставка заработной платы (оплата за единицу времени). Понятно, что если $\beta < \alpha^{-1}$, то получим нулевое решение [62], если $\beta = \alpha^{-1}$, то АЭ безразличен между отработкой произвольного числа часов, если же $\beta > \alpha^{-1}$, то индивид согласится отработать любое число часов, но наиболее предпочтительна для него будет занятость максимально возможное время. Минимальные затраты на стимулирование по реализации $t = t^*$ при использовании повременной - сдельной - оплаты (при $\beta = \alpha^{-1}$) равны βt^*. При фонде стимулирования С максимальное реализуемое действие равно $t^* = C / \beta$. При использовании системы стимулирования С-типа максимальное реализуемое действие такое же - αC, совпадают и минимальные затраты на стимулирование. Значит справедлив следующий результат.

<u>Утверждение</u> <u>1.2а.</u> При линейных функциях затрат АЭ сдельная оплата и система стимулирования С-типа эквивалентны.

2. Предположим теперь, что $t(h)$ - возрастающая дифференцируемая вогнутая функция, то есть для того, чтобы побудить АЭ отработать каждый следующий час требуется обеспечить ему все больший доход. Соответствующая функция затрат $c(t)$ будет выпуклой. Повторяя рассуждения, приведенные в первом пункте, легко придти н выводу, что при использовании сдельной оплаты АЭ выберет такое действие (количество отработанных часов) t^*, что: $\frac{dc(t^*)}{dt} = \beta$ (при условии, что его целевая функция неотрицательна:

$\beta t^* \geq c(t^*)$, иначе выбор - LCA (Least Cost Action - действие с мимнимальными затратами, если выполнено А.1.4, то LCA равно нулю). Рассмотрим следующий

Пример 1.2. Пусть АЭ имеет квадратичную функцию затрат: $c(t) = \gamma t^2/2$. Тогда при почасовой ставке β он выберет действие $t^* = \beta / \gamma$ ($t^* \leq 2\beta/\gamma$ - условие неотрицательности целевой функции АЭ). Затраты на стимулирование при этом равны $c_L(t^*) = \beta^2/\gamma$. При использовании минимальной системы стимулирования С-типа, реализующей то же действие, затраты на стимулирование равны $c_{FB}(t^*) = \beta^2/2\gamma \leq c_L(t^*)$. Если фонд стимулирования ограничен величиной С, то максимальное действие, реализуемое системой стимулирования С-типа равно: $t_{FB}^{max} = \sqrt{2C/\gamma}$, а максимальное действие, выбираемое АЭ при использовании оптимальной сдельной оплаты равно: $t_L^{max} = \sqrt{C/\gamma} \leq t_{FB}^{max}$.

Двойственным является представление целевой функции АЭ в виде "доход минус штрафы". В условиях примера 1.1 выберем $x \in [\ r,\ 2r\ ]$ и определим минимальное α, такое, что $x \in P_{L(\alpha)}$: $\alpha(x) = x\ /\ r - 1$. Соответственно, при заданном α пропорциональной системой штрафов при квадратичной функции дохода АЭ реализуется действие $x(\alpha) = r\ (1+\alpha)$. Для того, чтобы $P_{L(\alpha)} \geq P_C$ (и, следовательно, $K_{L(\alpha)} \geq K_C$) необходимо, чтобы выполнялось: $\alpha \geq \sqrt{2C/r}$, то есть существует ограничение на мимнимальную ставку заработной платы, реализующей заданое действие.

Затраты на стимулирование:

$$c_C(x) = h(r) - h(x),\ x \in P_C;\ c_L(x) = \alpha\ (\ x - r\ ).$$

Очевидно, $\forall\ x \in [\ r,\ 2r\ ]$ $c_C(x) \leq c_L(x)$, следовательно эффективность пропорциональных штрафов не выше, чем скачкообразных.

Для случае пропорциональных штрафов, ограниченных сверху константой С, получаем, что совпадение $P_{L'(\alpha)} = P_C$ имеет место при $\alpha \geq \sqrt{2C/r}$, то есть при одинаковых ограничениях $P_L \leq P_C$.

Качественно, неэффективность пропорциональных систем стимулирования можно объяснить тем, что, как правило, функции дохода и затрат АЭ нелинейны - не постоянны их маржинальные полезности, а линейные штрафы и вознаграждения являются "нечувствительными" к скорости изменения функций дохода и затрат (и их производных) в зависимости от действий и результатов деятельности АЭ. ◦

Итак, анализ примера позволяет выдвинуть предположение о том, что при выпуклой функции затрат АЭ система стимулирования С-типа не менее эффективна, чем сдельная оплата.

Утверждение 1.2б. При выпуклых функциях затрат АЭ система стимулирования С-типа не менее эффективна, чем сдельная оплата. •

3. Предположим, что функция затрат АЭ монотонно возрастает и вогнута (соответственно, функция t(h) - возрастает и выпукла). Рассмотрим следующий

Пример 1.3. Пусть $c(t) = 2 \gamma \sqrt{t}$. При использовании сдельной оплаты целевая функция АЭ имеет минимум в точке $t_{min} = \gamma^2 / \beta^2$. Определим $t_0 \ne 0$: $\forall t \ge t_0$ $f(t) \ge 0$. В нашем примере $t_0 = 4 \gamma^2 / \beta^2$. Если $t_0 \ge 16$, то АЭ выберет LCA, то есть предпочтет не работать. Если $t_0 < 16$, то АЭ будет работать максимальный рабочий день (условимся, что он составляет 16 часов). Значит при достаточно низких ставках сдельной оплаты АЭ не согласится работать, а при достаточно больших - будет трудиться весь рабочий день и ничто не сможет заставить его работать менее 16 часов и больше нуля. При использовании системы стимулирования С-типа можно побудить АЭ выбрать любое действие от 0 до 16, варьируя ограничение ФЗП С. Затраты на стимулирование по реализации максимального рабочего времени при использовании системы стимулироания С-типа - 8γ не выше, чем при использовании сдельной оплаты - 16β, так как из $t_0 < 16$ следует, что $\gamma < 2\beta$. ∘

По аналогии с доказательством утверждения 1.2б для случая произольных вогнутых затрат АЭ можно показать, что минимальные затраты на стимулирование при использовании систем стимулирования С-типа меньше, чем при сдельной оплате, а максимальное множество реализуемых действий - шире. Таким образом справедливо следующее

Утверждение 1.2в. При вогнутых функциях затрат АЭ система стимулирования С-типа не менее эффективна, чем сдельная оплата.

Объединяя результаты утверждений 1.2а-1.2в, получаем, что при любых монотонных (линейных, выпуклых и вогнутых) функциях затрат АЭ система стимулирования С-типа не менее эффективна, чем сдельная оплата.

Сделанный вывод вполне соответствует практической распространенности систем стимулирования С-типа (которые могут интерпретироваться как аккордные) - только 14% американских рабочих получают по трудовым договорам сдельную оплату [62].

Остальные же 86%, в соответствии с заключенными трудовыми соглашениями (договорами, контрактами) получают фиксированное вознаграждение на основе количества отработанных часов, дней, недель и т.д., заранее оговоренного в контракте, то есть на основании систем стимулирования С-типа.

Использование сдельной оплаты труда имеет смысл, когда трудно установить единые для всех работающих нормативы их деятельности для повременной оплаты - например, в условиях неполной информированности. Известно, что сдельно оплачиваемые работники получают более высокие зарплаты. В то же время повременно оплачиваемые чувствуют себя более защищенными от неблагоприятных ситуаций (экономические аспекты этого явления подробно изложены, например, в [62,71,77]). Сделав маленькое отступление, обсудим последнее утверждение более подробно.

Если в детерминированной АС АЭ не склонен к риску, то в его целевой функции фигурирует полезность от получаемого вознаграждения $u(\sigma(y))$. Если $\sigma \in M$, то, обозначая $s(y) = u(\sigma(y))$, $s(\cdot) \in M'$, где $M' = u(M)$, получим детерминированную задачу. Иначе дело обстоит в случае вероятностной неопределенности. Если АЭ не склонен к риску, а центр нейтрален к риску (это - стандартное предположение в теории контрактов [74,76]), то заключение трудового контракта, в силу происходящего при этом перераспределения риска, имеет черты страхования. Поэтому системы стимулирования С-типа предпочтительней сдельной оплаты в вероятностных АС с точки зрения защищенности АЭ от последствий реализации неблагоприятных состояний природы [71].

Итак, системы стимулирования С-типа эффективней сдельной оплаты в досточно широком классе детерминированных АС. Используя предложенную технику анализа задач синтеза оптимальной функции стимулирования, можно легко найти оптимальное решение в классе параметрически заданных систем стимулирования в АС с неопределенностью (например, оптимальную величину ставки заработной платы и т.д.). Более того, полученные результаты исследования эффективности систем стимулирования в L-типа в детерминированных АС могут легко быть обобщены на случай базовых моделей АС с неопределенностью. Во всех базовых моделях, исследуемых в настоящей работе, эффективность систем стимулирования L-типа оказывается не выше, чем С-типа или К-типа.

Поэтому основной акцент при исследовании задач синтеза в базовых моделях делается именно на скачкообразные и компенсаторные системы стимулирования.

Более того, несколько забегая вперед, отметим, что отмеченный выше акцент на исследование систем стимулирования С-типа и К-типа обусловлен еще и тем, что в любой из базовых моделей хотя бы одна из них оказывается оптимальной. Так как мы все базовые модели рассматриваются в рамках предположения А.1.2, то есть "находимся" в классе ограниченных функций штрафов (стимулирования), то для решении задачи синтеза достаточно предъявить хотя бы одну оптимальную функцию из этого класса, несмотря на то, что быть может существуют другие оптимальные системы стимулирования из этого же класса (см., например, пример 1.5). Системы же стимулирования L-типа не удовлетворяют предположению А.1.2, в то время как $M_L^{*} \le M$. Поэтому, с одной стороны, как будет видно и дальнейшего изложения (см. также утверждения 1.2а-1.2в), в большинстве случаев пропорциональные системы стимулирования не оптимальны, а с другой - они требуют самостоятельного систематического исследования как класс параметрически заданных систем стимулирования. Можно выдвинуть предположение что именно в силу их "параметричности" соответствующий анализ (их эффективности, согласованности и т.д.) потребует от исследователей меньших временны́х и других "затрат", чем изучение более "богатого" класса M.

Продолжим исследование оптимальных систем стимулирования в детерминированной модели.

Во-первых, следует отметить, что если гипотеза благожелательности не выполнена, то, очевидно, максимальное множество действий, реализуемых всевозможными системами стимулирования С-типа составляет интервал: (y_i^-, y_i^+). Более корректно - решение задачи максимизации гарантированной эффективности ε-оптимально. В ходе дальнейшего изложения акцентировать внимание на этом эффекте мы не будем.

<u>Пример</u> <u>1.4.</u> В примере 1.1 при использовании центром оптимальной системы стимулирования С-типа целевая функция АЭ достигало максимального значения в двух точках, то есть $P_c = \{ r, y^* \}$. Если выполнена гипотеза благожелательности, то АЭ выбирает из P_c максимальное реализуемое действие, как наиболее

предпочтительное с точки зрения центра. Если отказаться от ГБ и оперировать гарантированной эффективностью, то придется считать, что в этой ситуации АЭ выберет действие r, то есть система стимулирования $\chi_\varepsilon(y^*,y)$ обладает достаточно низкой гарантированной эффективностью. В то же время система стимулирования $\chi_C^\delta(y^*-\delta,y)$, где $\delta > 0$ – достаточно малая величина реализует действие $(y^*-\delta)$. В силу полунепрерывности функции дохода АЭ сверху для достаточно малых $\varepsilon>0$ всегда найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что система стимулирования χ_C^δ будет ε-оптимальна, то есть будет выполнено: $K(\chi_c) - K(\chi_C^\delta) \le \varepsilon$. о

Во вторых, по аналогии с доказательством оптимальности системы стимулирования С-типа (утверждение 1.1) легко показать, что система стимулирования К-типа также реализует в рамках ГБ действие y^* и, следовательно, тоже является оптимальной. Более того, в рассматриваемой детерминированной активной системе оптимальным оказывается целое множество систем стимулирования – от наиболее "жестких" – скачкообразных до наиболее слабых – компенсаторных. Действительно, любая система стимулирования из класса $M_{kc} \subseteq M$:

$$M_{kc} = \{ \chi \in M \mid \chi_k(y) \le \chi(y) \le \chi_c(y^*,y) \ \forall\ y \in A \}$$

реализует максимальное действие y^*.

Пример 1.5. Множество систем стимулирования M_{kc} для АС, рассмотренной в примере 1.1, приведено на рисунке 10.

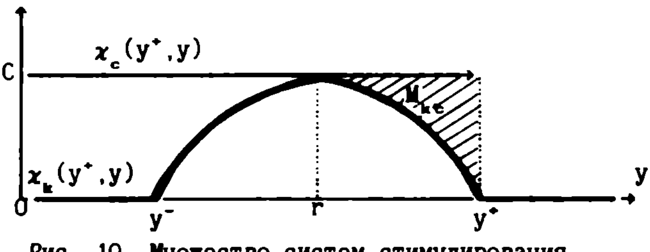

Рис. 10. Множество систем стимулирования, оптимальных в условиях примера 1.1.

Лемма 1.3. Если выполнены А.1.1-А.1.3, то $\forall\ \chi \in M\ P(\chi) \subseteq Q^*$, где $Q^* = \prod_{i=1}^{n} [\ y_i^-\ ,\ y_i^+\ ]$. →

Следствием утверждения 1.1 и леммы 1.3 является следующее утверждение.

Утверждение 1.4. Если выполнены А.1.1-А.1.3, то согласованные системы стимулирования: C, QC, K и QK - типа оптимальны.

Отметим, что здесь и далее утверждения об оптимальности определенных классов систем стимулирования (например, C-типа) означают, что в этих классах содержится хотя бы одна оптимальная функция стимулирования: например, для класса M_x это значит, что $\exists\ x \in X:\ \forall\ \chi \in M\ \ K(\ \chi_c(x,\cdot)\ ) \geq K(\ \chi(\cdot)\ )$.

Ряд полезных свойств функций стимулирования устанавливается следующими леммами, при доказательстве которых предполагается, что $y \geq r$ (противоположный случай расматривается полностью аналогично).

Лемма 1.5. Если некоторая система стимулирования $\chi_1(y)$ реализует действие $y^* > r$, то для системы стимулирования $\chi_2 \in M$:

$$(1.10)\ \chi_2(y) = \begin{cases} 0,\ y \geq y^* \\ \chi_1(y),\ y < y^* \end{cases},$$

не может быть одновременно выполнено $\{\ \exists\ \tilde{y} \in P(\chi_2):\ \tilde{y} < y^*\ \}$ и $\{\ y^* \in P(\chi_2)\ \}$. ➧

Лемма 1.6. Если некоторая система стимулирования $\chi_1(y)$ реализует действие $y^* > r$, то для системы стимулирования $\chi_2 \in M$:

$$(1.11)\ \chi_2(y) = \begin{cases} \chi_1(y),\ \ y \geq y^* \\ \geq \chi_1(y),\ y < y^* \end{cases},$$

не может быть одновременно выполнено $\{\ \exists\ \tilde{y} \in P(\chi_2):\ \tilde{y} < y^*\ \}$ и $\{\ y^* \in P(\chi_2)\ \}$. ➧

Следствие 1.7. Для функций стимулирования, не зависящих от плана, с ростом степени централизации эффективность стимулирования не уменьшается, причем при анализе задач стимулирования в детерминированных АС без потери общности (и эффективности) можно ограничиться классом монотонных функций стимулирования (ср.с результатами по степени централизации [12]).

Из утверждения 1.4 следует, что в рамках введенных предположений эффективность стимулирования в прямой задаче стимулирования первого рода равна эффективности механизма оптимального согласованного планирования:

$$(1.12)\ K^* = \max_{x \in Q^*} \Phi(\ x,\ x\ ).$$

Рассмотрим соотношение между эффективностью стимулирования (1.12) и гарантированной эффективностью

$$(1.13)\quad K^{\Gamma*} = \max_{\chi\in M} \min_{y\in P(\chi)} \Phi(x,y).$$

Очевидно, что если $\arg \max_{y\in Q^*} \Phi(y,y) \le \prod_{i=1}^{n} (y_i^-, y_i^+)$, то $K^* \equiv K^{\Gamma*}$. Если же максимум целевой функции центра достигается на границе множества Q^*, то эффективность, определенная с помощью (1.6), сколь угодно мало отличается от (1.12), то есть соответствующая система стимулирования является ε-оптимальной.

Обратная задача стимулирования первого рода решается гораздо проще. Фиксируем $y' \in A$. Минимальные затраты на стимулирование (минимальная величина верхнего ограничения механизма стимулирования), очевидно, равны: $c_{min}(y') = h_{max} - h(y')$. Для гарантированной реализуемости достаточно положить $c^{\Gamma}_{min} = c_{min} + \delta$, где $\delta > 0$.

Выше подчеркивалось, что механизмы планирования являются составной частью механизмов стимулирования (в широком смысле) и соответствуют оперативному назначению планов в рамках параметрически заданного класса систем стимулирования (например, С-типа). Поясним это утверждение более подробно.

Обозначим Q_i, $i \in I$ - множества соглсованных планов АЭ в многоэлементной детерминированной АС, в которой оптимальными являются скачкообразные системы стимулирования. Тогда задача назначения оптимальных планов примет вид: $\Phi(x) \to \max_{x\in Q}$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q = \prod_{i=1}^{n} Q_i$ - вектор планов.

Во всех базовых механизмах стимулирования в АС с неопределенностью, описываемых в настоящей работе, решение задачи стимулирования сводится фактически к поиску и исследованию множеств действий, реализуемых теми или иными системами стимулирования. Имея зависимости реализуемых действий от планов (например, от точек скачка при использовании систем стимулирования С-типа) $y_i^*(x)$, $i \in I$, задачу стимулирования

$$\Phi(y^*) \to \max_{y^*\in P},$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$, можно свести к задаче планирования:

$$\Phi\ (\ y_1^*(x),\ y_2^*(x),\ \ldots,\ y_n^*(x)\ ) \rightarrow \max_{x \in X}.$$

Приведенные рассуждения позволяют сделать вывод, что в решении задачи стимулирования могут быть выделены два этапа: исследование согласованности (реализуемости) и решение задачи планирования - выбора из определенных на первом этапе множеств реализуемых действий комбинаций, оптимальных с точки зрения центра, или, что то же самое - выбора планов, побуждающих АЭ выбрать эти действия. Последнее утверждение вполне согласовано с методологией детерминированной ТАС [12,14] и рядом частных результатов ТК и ТР (см. обзоры [9,10,44]).

Детерминированная задача стимулирования второго рода

Пусть $n = 1$, целевая функция АЭ имеет вид (1.2), а целевая функция центра (детерминированная задача стимулирования второго рода иногда называется детерминированной задачей теории контрактов):

$$(1.14)\quad \Phi\ (\ x,\ y\ ) = H\ (\ y\ ) - \sigma\ (\ x,\ y\ ).$$

Из результатов предыдущего анализа следует, что действий, лежащих вне множества Q^*, при заданных ограничениях механизма стимулирования центр реализовать не может. Очевидно, что минимальные затраты на стимулирование по реализации действия $y \in Q^*$ равны $C(y)$. Поэтому оптимальным для центра действием является действие, доставляющее максимум разности его функции дохода и минимальным затратам на стимулирование, то есть:

$$(1.15)\quad y^* = \arg \max_{y \in Q^*} \{\ H(y) - C(y)\ \}.$$

Пусть целевая функция АЭ имеет вид (1.1). Тогда целевая функция центра определяется следующим образом:

$$(1.16)\quad \Phi\ (\ x,\ y\ ) = H\ (\ y\ ) + \chi\ (\ x,\ y\ ).$$

Оптимальной системой стимулирования в этом случае является квазикомпенсаторная, а оптимальным реализуемым действием - действие y^*:

$$(1.17)\quad y^* = \arg \max_{y \in Q^*} \{\ H(y) + h(y)\ \}.$$

Рассматриваемую до сих пор детерминированную задачу стимулирования можно назвать многоэлементной с некоторой натяжкой, так как АЭ не зависимы (не связаны в силу ГНП) и отсутствуют общие ограничения на управление, поэтому многоэлементная задача автоматически декомпозируется на набор одноэлементных. Рассмотрим детерминированную АС со слабо связанными АЭ, то есть такую АС, в которой действия, выбираемые АЭ независимы ($A = \prod_{i=1}^{n} A_i$), стимулирование каждого АЭ зависит только от его собственных действий, но существуют общие ограничения на стимулирование в АС. Будем считать, что, помимо А.1.2, функции стимулирования (штрафов) должны удовлетворять бюджетному ограничению: $\sum_{i=1}^{n} C_i \le C$, то есть ограничен суммарный фонд стимулирования. При этом максимальное множество реализуемых действий для i-го АЭ зависит от соответствующего верхнего ограничения механизма стимулирования:

$$Q_i^*(C_i) = [\ y_i^-(C_i),\ y_i^+(C_i)\ ].$$

Оптимальное решение задачи стимулирования первого рода определяется следующим образом. Целевая функция центра равна:

$$(1.18)\quad \Phi\ (\ C\ ) = \max_{\{y_i \in Q_i^*(C_i)\}} H\ (\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n\ ).$$

Задача нахождения оптимального вектора $\vec{C} = (C_1,\ C_2, \dots,\ C_n)$, удовлетворяющего бюджетному ограничению и максимизирующего (1.18), является стандартной задачей условной оптимизации. Аналогичным образом может быть решена и обратная задача: найти минимальное суммарное стимулирование, побуждающее элементы выбрать определенные действия.

Пример 1.6. В активной системе имеется $n \ge 1$ активных элментов с функциями дохода $h_i(y_i) = y_i - y_i^2/2r_i$, $i=\overline{1,n}$; ограничения механизмов стимулирования $\{\ C_i\ \}$ таковы, что $\sum_{i=1}^{n} C_i = C$; целевая функция центра – $H(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ y_i$, где $\{\ \alpha_i\ \}$ – положительные константы. Из примера 1.1 следует, что при заданных ограничениях механизма стимулирования $\{\ C_i\ \}$

максимальное реализуемое действие i-го АЭ: $y_i^* = r_i + \sqrt{2r_iC_i}$, $i=\overline{1,n}$. Задача свелась к определению оптимального набора ограничений $\{ C_i^* \}$, максимизирующего целевую функцию центра при бюджетном ограничении. Решение соответствующей стандартной задачи условной оптимизации имеет вид: $C_i^* = \dfrac{r_i\alpha_i^2}{\sum_{j=1}^{n} r_j\sigma_j^2} C$, $i=\overline{1,n}$. ○

Детерминированная задача стимулирования, сформулированная в терминах сравнительных предпочтений

Пусть множество возможных действий АЭ конечно: $A = \{ y_1, y_2, \dots, y_n \}$ и предпочтения АЭ в отсутствии стимулирования заданы следующим образом [45]. Элементы σ_{ij} матрицы Σ, $i,j=\overline{1,n}$ – положительные, отрицательные или равные нулю числа, интерпретируемые как сравнительная предпочтительность различных действий АЭ. Если $\sigma_{ij} > (<) 0$, то действие y_i в отсутствии стимулирования строго лучше (хуже) для АЭ, чем действие y_j; если $\sigma_{ij}= 0$, то действия y_i и y_j эквивалентны.

Предположим, что управление со стороны центра (стимулирование) заключается в изменении сравнительной предпочтительности различных действий, то есть в изменении элементов матрицы Σ. Задача стимулирования при этом будет заключаться в таком их допустимом изменении, чтобы наилучшим для АЭ стало наиболее благоприятное для центра действие.

Предположим, что предпочтения АЭ удовлетворяют следующему свойству:

$$(1.19)\quad \forall\ i,\ j,\ m \in \{ 1,\ 2,\ \dots,\ n \}\quad \sigma_{ij} = \sigma_{im} + \sigma_{mj}.$$

Условие (1.19) назовем условием внутренней согласованности предпочтений АЭ. Из (1.19) тривиально следует, что $\sigma_{ii} = 0$, $\sigma_{ij} = - \sigma_{ji}$ $\forall$ $i,j = \overline{1,n}$. Поэтому внутреннюю согласованность можно условно рассматривать как аналог полноты и транзитивности для бинарных отношений [55,58].

Легко видеть, что если выполнено (1.19), то граф G_Σ, соответствующий матрице Σ, является потенциальным с потенциалами вершин: $q_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}$, $i=\overline{1,n}$. Более того, условие внутренней согласованности является необходимым и достаточным для потенциальности G_Σ. Действительно, с одной стороны в соответствии с (1.19) длина любого гамильтонова контура в графе G_Σ равна нулю, а это не что иное как определение потенциальности графа. С другой стороны, имея потенциальный граф можно по потенциалам вершин определить матрицу Σ: $\sigma_{ij} = \frac{1}{n} (q_i - q_j)$, $i,j = \overline{1,n}$, удовлетворяющую (1.19).

Если предпочтения АЭ внутренне согласованы, то $\Sigma = - \Sigma^T$ и информация о всех элементах матрицы Σ является избыточной. Например, Σ однозначно задается вектором (σ_{12}, σ_{23}, σ_{34} ..., $\sigma_{n-1,n}$). Остальные элементы матрицы определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{i-j-1} \sigma_{i-k,i-k-1}, & \text{если } j < i \\ \sum\limits_{k=0}^{j-i-1} \sigma_{i+k,i+k+1}, & \text{если } j > i \end{cases}$$

Использование подобных процедур достаточно привлекательно, так как требует гораздо меньшей информации и иногда облегчает работу по выявлению и обработке предпочтений АЭ.

Наилучшим действием для АЭ в рассматриваемой модели будем считать действие y_k, для которого $\sigma_{kj} \ge 0$ для всех $j = \overline{1,n}$. В случае внутренне согласованных предпочтений такое действие (быть может не единственное) всегда существует. Иначе говоря, если выполнено (1.19), то наилучшим будет действие, имеющее максимальный потенциал.

Перейдем к решению задачи стимулирования. Для этого Определим для произвольных i и j ($i, j \in \{ 1, 2 \ \ n \}$) операцию ($j \to i$):

(1.20) $\sigma_{jm} \to (\sigma_{jm} + \sigma_{ij})$, $\sigma_{mj} \to (- \sigma_{jm})$, $m=\overline{1,n}$.

При этом, очевидно, действие y_j становится эквивалентным действию y_i ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = 0$), причем (1.20) обеспечивает сохранение внутренней согласованности предпочтений АЭ. Примем, что затраты на стимулирование - "стоимость" проведения операции ($j \to i$) - равна $n \sigma_{ij}$.

Определим множество действий, реализуемых в рассматриваемой модели при заданных ограничениях механизма стимулирования:

$$P' = \{ y_l \in A \mid \sigma_{kl} \le C / n \}.$$

Для решения прямой задачи стимулирования центр выбирает из множества P' действие, наиболее предпочтительное с его точки зрения.

Решение обратной задачи стимулирования оказывается еще более простым: если y_k – наиболее предпочтительное с точки зрения АЭ действие в отсутствии стимулирования, то минимальные затраты на стимулирование по реализации действия y_l равны $n\,\sigma_{kl}$, $l=\overline{1,n}$.

Выше было доказано, что условие внутренней согласованности предпочтений АЭ является необходимым и достаточным для потенциальности соответствующего графа, что позволяет установить взаимно однозначное соответствие между рассмотренными моделями.

<u>Утверждение 1.8.</u> Задачи стимулирования, сформулированные в терминах целевых функций и внутренне согласованных сравнительных предпочтений, эквивалентны. ♦

Таким образом, при конечном множестве допустимых действий задачи стимулирования, сформулированные в терминах целевых функций и сравнительных предпочтений, удовлетворяющих условию внутренней согласованности, эквивалентны.

<u>Пример 1.7.</u> Пусть функция дохода АЭ: $h(y) = y - y^2/4$, множество возможных действий: $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$. Соответствующая $h(y)$ ($\|h_l\| = (0, 3/4, 2, 3/4, 0 \|$) матрица Σ сравнительных предпочтений имеет вид:

$$\Sigma = \frac{1}{5} \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & -3/4 & -2 & -3/4 & 0 \\ 3/4 & 0 & -5/4 & 0 & 3/4 \\ 2 & 5/4 & 0 & 5/4 & 2 \\ 3/4 & 0 & -5/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & -3/4 & -2 & -3/4 & 0 \end{array} \right\| .$$

При этом $\|q_l\| = \|h_l\| - 7/10$. Оптимальное для АЭ действие в отсутствии стимулирования $y_k = 2$ ($k=3$). Например, если центр хочет побудить АЭ к выбору действия $y_4 = 3$, то операция ($4 \to 3$) требует затрат $c_{4\to3} = 5/4$, а матрица Σ переходит в следующую матрицу:

$$\Sigma_{4\to3} = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 0 & -3/4 & -2 & -2 & 0 \\ 3/4 & 0 & -5/4 & -5/4 & 3/4 \\ 2 & 5/4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5/4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3/4 & -2 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Получающийся в результате применения к $||q_1||$ вектор весов имеет вид: $||q_1||_{4\to3}$ = (-19/20, -1/5, 21/20, 21/20,-19/20), то есть $||q_1||_{4\to3} = ||h_1||$ -19/20 + (0, 0, 0, 5/4, 0). ∘

Использование "языка" сравнительных предпочтений выглядит привлекательным по следующим причинам. Во-первых, достаточно яркой и отчетливой становится понимание и итерпретация стимулирования как управления предпочтениями активных элементов. Во-вторых, множество всевозможных сравнительных предпочтений АЭ шире, нежели чем множество его предпочтений, описываемых целевыми функциями [58].

Таким образом, результаты исследования детерминированной задачи стимулирования позволяют сделать вывод, что в этом классе АС оптимальными являются скачкообразные и компенсаторные системы стимулирования, причем в рамках достаточно широких предположений удается найти аналитический вид оптимального решения и исследовать его свойства, рассматривая множества реализуемых действий. Более того, проведенный анализ свидетельствует, что несмотря на многообразие моделей внутри данного класса (задачи стимулирования первого и второго рода, прямые и обратные, с различными представлениями целевых функций и т.д.), достаточно ограничиться решением одной из них - результаты для остальных будут незначительными модификациями полученных.

ГЛАВА 2. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

В настоящей главе рассматриваются задачи анализа и синтеза механизмов стимулирования в активных системах с интервальной внешней и внутренней неопределенностью при симметричной и асимметричной информированности участников.

2.1. Механизмы стимулирования в активных системах с внутренней интервальной неопределенностью и симметричной информированностью

Рассмотрим одноэлементную активную систему, в которой функция дохода (затрат) АЭ зависит от неопределенного параметра $r \in \Omega$. Предположим, что имеет место интервальная неопределенность и симметричная информированность, то есть на момент выбора стратегий центр и АЭ знают только множество Ω возможных значений неопределенного параметра (М2).

В данной базовой модели (М2): $\Omega = \hat{B}$, $\Omega = [d, D] \subseteq \Re^1$, $z \equiv y$, $A_0 \equiv A$, $I = I' = \{ \hat{B}, \Omega \}$.

Порядок функционирования следующий: центр выбирает и сообщает АЭ функцию стимулирования из класса M, при известной функции стимулирования АЭ выбирает некоторое допустимое действие, после чего становятся известными истинное значение неопределенного параметра и значения целевых функций.

Определим процедуру устранения неопределенности активным элементом. Будем считать, что АЭ выбирает действие $y \in A$, максимизирующее его целевую функцию, рассчитывая на наихудшее для него значение неопределенного параметра. Иными словами, предположим, что АЭ использует принцип максимального гарантированного результата. Тогда множество решений игры определяется следующим образом:

$$(2.1.1)\quad P(\chi) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \min_{r \in \Omega} f(y, \chi, r),$$

где целевая функция АЭ имеет либо вид: $f(y, \chi, r) = h(y,r) - \chi(y)$, либо: $f(y, \chi, r) = \sigma(y) - c(y,r)$.

Задача стимулирования заключается в поиске функции стимулирования, доставляющей максимум целевой функции центра при условии, что АЭ выбирает действие из множества (2.1.1) (см. первую главу настоящей работы).

Относительно функции дохода $h(y,r)$ (затрат - $c(y,r)$) предположим, что она при любом значении неопределенного параметра $r \in \Omega$ принадлежит классу квазиоднопиковых функций, для которых r - точка пика.

Пусть $\Omega = [d, D]$, $-\infty < d \le D < +\infty$ - конечный отрезок $\mathbb{R}^1$, а зависимость функции дохода (затрат) от неопределенного параметра удовлетворяет следующему предположению:

А.2.1.1. Независимо от действия АЭ функция дохода (затрат) монотонна по параметру r (для дифференцируемых зависимостей: $\forall y \in A$, $\forall r \in \Omega$ либо $\frac{\partial h(y,r)}{\partial r} \ge 0$ ($\frac{\partial c(y,r)}{\partial r} \ge 0$), либо $\frac{\partial h(y,r)}{\partial r} \le 0$ ($\frac{\partial c(y,r)}{\partial r} \le 0$)).

В силу введенного предположения минимум целевой функции АЭ $f(y, \chi, r)$ по r при любых допустимых $y \in A$, $\chi \in M$ достигается либо при $r = D$, либо при $r = d$. Для простоты предположим, что функция дохода (затрат) АЭ возрастает по r (остальные случаи рассматриваются полностью аналогично). Тогда (2.1.1) примет вид:

$$(2.1.2)\quad P(\chi) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \{ h(y, d) - \chi(y) \},$$

или, соответственно, $P(\sigma) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \{ \sigma(y) - c(y, D) \}$.

В рамках введенных предположений прямая задача стимулирования совпадает с детерминированной задачей, описанной в главе 1. Оценим эффективность стимулирования в рассматриваемой активной системе. При квазиоднопиковой функции дохода АЭ и ограниченных штрафах, максимальное множество решений игры совпадает с отрезком

$$(2.1.3)\quad P = [y^-, y^+],$$

правая и левая границы которого определяются:

$$y^- = \min \{ y \in A \mid h(y, d) \ge h_{max}(d) - C \},$$
$$y^+ = \max \{ y \in A \mid h(y, d) \ge h_{max}(d) - C \},$$
$$(y^- = 0,\ y^+ = \max \{ y \in A \mid c(y, D) \le C \}),$$

где $h_{max}(d) = \max_{y \in A} h(y, d)$.

Сделанный вывод о структуре множества решений игры в рассматриваемой модели, совместно с результатами главы 1, доказывает справедливость следующего утверждения.

<u>Утверждение</u> <u>2.1.1.</u> Если выполнено А.2.1.1, то в активной системе с внутренней интервальной неопределенностью и симметричной информированностью при использовании активным элементом максимального гарантированного результата система стимулирования С-типа оптимальна.

Более того, можно показать, что в этом случае скачкообразная система стимулирования является не единственной оптимальной - оптимальными оказываются также, например, компенсаторные и квазикомпенсаторные функции штрафов. Воспользовавшись результатами главы 1, можно показать, что пропорциональные системы стимулирования имеют меньшую эффективность, то есть в рамках введенных предположений в М2 выполнено:

$$K_c = K_k \geq K_L .$$

Пусть $\hat{r} \in \Omega$ - истинное значение параметра функции дохода (затрат). Обозначим $K_0(\hat{r})$ - эффективность стимулирования в детерминированной активной системе с функцией дохода (затрат) АЭ $h(y,\hat{r})$ ($c(y,\hat{r})$), К - эффективность стимулирования в рассматриваемой АС с интервальной неопределенностью при использовании АЭ МГР. Тогда справедливо следующее утверждение.

<u>Утверждение</u> <u>2.1.2.</u> Если выполнено А.2.1.1, то в активной системе, в которой целевая функция АЭ имеет вид "стимулирование минус затраты", $\forall\ \hat{r} \in \Omega$ $K_0(\hat{r}) \geq K$. $\rightarrow$

К сожалению, в активной системе, в которой целевая функция АЭ имеет вид "доход минус штрафы", результат утверждения в общем случае не справедлив - предположения А.2.1.1 оказывается недостаточно. Качественно этот факт можно объяснить следующим образом: в силу предположения А.1.4 $\forall\ y \in A$, $\forall\ r \in \Omega$ $c(0,r)=0$, $c(y,r) \geq 0$, то есть минимальное значение функции затрат фиксировано и не зависит от неопределенного параметра. Для функции дохода АЭ этот факт, в общем случае не имеет места - максимум по $y \in A$ функции дохода может зависеть от r.

Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим следующий пример.

Пример 2.1.1. Пусть функция дохода АЭ:

$$h (y, r) = y - y^2/ 2 r, \; A = \mathbb{R}^1_+, \; d = 1, \; D = 2, \; C = 0.25.$$

Тогда $y^- = 1 - 1/\sqrt{2}$, $y^+ = 1 + 1/\sqrt{2}$. Если $\hat{r} = 1.5$, то действие, например, равное $\tilde{y} = 1 - 1/\sqrt{2}$ не реализуемо. o

Анализ рассмотренного выше примера подсказывает, что для того, чтобы для АС с целевой функцией АЭ - "доход минус штрафы" можно было получить результат, аналогичный утверждению 2.1.2, следует усиливать требования, налагаемые на зависимость функции дохода АЭ от неопределенного параметра. Например, достаточным оказывается введение следующего предположения:

А.2.1.2. Максимальное значение функции дохода АЭ не зависит от параметра r.

Утверждение 2.1.3. Если выполнено А.2.1.1. и А.2.1.2, то в активной системе, в которой целевая функция АЭ имеет вид "доход минус штрафы", $\forall \hat{r} \in \Omega \;\; K_0(\hat{r}) \geq K$.

Доказательство утверждения 2.1.3 практически повторяет доказательство утверждения 2.1.2 и не приводится.

Следует признать, что предположения А.1.2.1 и А.1.2.2. являются далеко не необходимыми - можно было бы привести целый ряд подобных предположений, обеспечивающих как возможность применения использованной техники анализа, так и справедливость полученных результатов.

Итак, мы исследовали соотношение между эффективностями стимулирования в АС с интервальной внутренней неопределенностью (и симметричной информированностью) и соответствующих детерминированных АС. Перейдем теперь к анализу роли неопределенности, то есть ее влияния на эффективность стимулирования. Для этого необходимо ввести критерий сравнения различных АС по "степени неопределенности".

Пусть имеются две активные системы с внутренней интервальной неопределенностью, отличающиеся лишь множествами возможных значений неопределенного параметра: Ω_1 и Ω_2. Обозначим K_1 и K_2 - эффективности стимулирования в первой и второй АС, соответственно.

Будем считать, что первая АС характеризуется меньшей неопределенностью, если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Если множества возможных значений параметра - отрезки $\mathbb{R}^1$, то, очевидно, последнее условие эквивалентно одновременному выполнению следующих условий: $d_1 \ge d_2$ и $D_1 \le D_2$.

Утверждение 2.1.4. Если выполнено А.2.1.1., то в активной системе, в которой целевая функция АЭ имеет вид "стимулирование минус затраты" $K_1 \ge K_2$. ➡

Пример 2.1.2. Пусть функция затрат АЭ имеет вид: $c(y) = ry^2$, $y \in [0,+\infty)$, $\hat{r} = 2$, $d = 1$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $C = 12$.

Вычисляем: $y_1^+ = 2$, $y_2^+ = \sqrt{3}$, $y_0^+ = \sqrt{6}$. Видно, что $y_0^+ \ge y_1^+ \ge y_2^+$, то есть имеет место $K_0 \ge K_1 \ge K_2$.

Введем возможность приобретения информации за плату при следующей зависимости правой границы множества Ω от ΔC:

(2.1.4) $D(\Delta C) = \min \{ (d-D_1)\, \Delta C/C + D_1,\ d \}$.

При $\Delta C = 0$ имеем первую АС, при $\Delta C = C$ - детерминированную АС, для которой известно, что $\hat{r} = d$, но фонд стимулирования: $C-\Delta C$ равен нулю. Запишем основное уравнение для рассматриваемого механизма с платой за информацию: $D(\Delta C)\,(y^+)^2 = C - \Delta C$, откуда получаем зависимость максимального реализуемого действия от величины платы за информацию: $y^+(\Delta C) = \left[\frac{(C-\Delta C)C}{(d-D_1)\Delta C + D_1 C} \right]^{1/2}$.

Исследуем поведение функции $y^+(\Delta C)$ при $\Delta C \in [0,C]$. Оказывается, что $\frac{\partial y^+(\Delta C)}{\partial \Delta C} \le 0$, то есть плата за информацию не выгодна для центра. Содержательно, использование механизма с платой за информацию в этом случае не целесообразно, так как плата за информацию "слишком высока" (потери фонда стимулирования на приобретение информации не окупаются должным увеличением информированности центра). о

Как и при сравнении эффективностей стимулирования в АС с неопределенностью и в соответствующей детерминированной АС, при представлении целевой функции АЭ в виде "доход минус штрафы" одного только предположения А.2.1.1 оказывается недостаточно для доказательства результата, аналогичного утверждению 2.1.4.

Утверждение 2.1.5. Если выполнено А.2.1.1. и А.2.1.2, то в активной системе, в которой целевая функция АЭ имеет вид "доход минус штрафы" $K_1 \ge K_2$. ➡

Отметим, что, во-первых, сравнимость неопределенностей по критерию $\Omega_1 \le \Omega_2$ оказывается существенной. Приведенные выше результаты в случае, например, $\Omega_1 \setminus \Omega_2 \ne \varnothing$ не справедливы. Во-вторых, при доказательстве утверждения 2.1.4 (соответственно - 2.1.5), нам потребовалась лишь "часть" условия $\Omega_1 \le \Omega_2$, а соотношение $d_1 \ge d_2$ ($D_1 \le D_2$) могло и нарушаться. И, наконец, в третьих, при предельном переходе к детерминированной АС ($d = D$) полученные выше результаты (утверждения 2.1.1-2.1.5) переходят в соответствующие результаты детерминированной теории (глава 1).

Итак, утверждения 2.1.4 и 2.1.5 гласят, что с ростом неопределенности эффективность стимулирования в АС с внутренней интервальной неопределенностью уменьшается. Однако, следует иметь ввиду, что этот факт имеет место только в случае, если АЭ использует в качестве метода устранения неопределенности принцип максимального гарантированного результата и если центр достоверно знает о принципах поведения элемента. На самом деле, в том числе и в случае интервальной внутренней неопределенности, использование МГР дает достаточно заниженную оценку эффективности стимулирования. Рассмотрим другие способы устранения неопределенности в исследуемом классе активных систем.

Пусть при принятии решения о выборе действия АЭ устраняет неопределенность относительно параметра $r \in \Omega$, рассчитывая на наилучшее для себя значение этого параметра. Предположим, что центр знает как поведет себя активный элемент. Тогда, если выполнено предположение А.2.1.1, то множество решений игры определится выражением

$$(2.1.5)\quad P(\chi) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \{ h(y, D) - \chi(y) \},$$

$$(P(\sigma) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \{ \sigma(y) - c(y, d) \}).$$

Максимальное множество решений игры будет отрезком со следующими границами:

$$y^- = \min \{ y \in A \mid h(y, D) \ge h_{max}(D) - C \},$$

$$y^+ = \max \{ y \in A \mid h(y, D) \ge h_{max}(D) - C \},$$

$$(y^- = 0,\ y^+ = \max \{ y \in A \mid c(y, d) \le C \}).$$

При использовании АЭ "оптмистичного" прогноза значений неопределенного параметра можно сформулировать результаты, аналогичные утверждениям 2.4.2 - 2.4.5, причем совпадение результатов будет иметь место с точностью до наоборот: $\forall\ \hat{r} \in \hat{\Omega}$ $K_0(\hat{r}) \le K$, $K_1 \le K_2$.

Содержательно, при увеличении неопределенности максимальное множество решений игры будет не уменьшаться, а расширяться. Формальный анализ этого случая, практически, совпадает со анализом использования МГР и опускается. Качественный вывод, который следует из приведенных рассуждений, следующий: при использовании АЭ максимума по множеству возможных значений неопределенного параметра, чем больше неопределенность (в указанном выше смысле), тем выше эффективность стимулирования. Этот парадоксальный на первый взгляд результат обусловлен используемой процедурой устранения неопределенности и предположениями о рациональном поведении (выборе) АЭ. Аналогичные выводы будут справедливы для многих из рассматриваемых ниже в настоящей работе классов активных систем с неопределенностью.

Приведем пример еще одной активной системы, в которой наличие неопределенности выгодно для центра. В АС, рассматриваемой в примере 2.1.1, введение неопределенности, хотя и не расширяет множества реализуемых действий, но позволяет реализовать в условиях неопределенности и использования активным элементом принципа максимального гарантированного результата действия (например, $\tilde{y}$), которые не реализуемы в детерминированной АС. Качественный вывод из анализа такого рода АС следующий: иногда (при выполнении ГБ или использовании АЭ оптимистимчного прогноза) чем меньшей информацией обладает АЭ, тем это выгодней для центра.

Принципиально важной оказывается симметричность информированности участников АС не только относительно целевых функций и допустимых множеств, но и принципов поведения (устранения неопределенности и выбора стратегий) друг друга. Например, оставаясь в рамках гипотезы рационального поведения, можно показать, что если центр считает, что АЭ использует оптимистичную оценку неопределенного параметра (или в рамках А.2.1.1 любую "линейную комбинацию" наихудшей и наилучшей оценки), а на самом деле АЭ является "пессимистом" и использует МГР, то такая "неправильная" информированность центра приводит к сильному снижению эффективности стимулирования.

2.2. Механизмы стимулирования в активных системах с внутренней интервальной неопределенностью и асимметричной информированностью

В данной базовой модели (M8): – $\Omega=\hat{\theta}$, $z\equiv y$, $A_0\equiv A$, $S=\hat{\Omega}$ = [d,D], $I' = \{ \hat{\theta}, \hat{\Omega} \}$, $I = \{ \hat{r}, \hat{\theta} \}$.

В отличие от соответствующей модели с симметричной информированностью, рассмотренной в предыдущем разделе (M2), предположим, что на момент принятия решения (выбора стратегий) АЭ достоверно знает реализовавшееся значение неопределенного параметра, а центр имеет о нем информацию в виде интервала возможных значений.

Множество решений игры и эффективность стимулирования имеют, соответственно, вид:

$$(2.2.1)\quad P (x, \chi, \hat{r}) = \mathrm{Arg}\max_{y\in A} \{ h(y,r) - \chi(x,y) \},$$

$$K (\chi, x) = \min_{\hat{r}\in\hat{\Omega}} \max_{y\in P(x,\chi,\hat{r})} H (y).$$

В активных системах с асимметричной информированностью участников одним из возможных способов устранения неопределености (в большинстве известных моделей – интервальной) является сообщение информации (если это предусмотрено порядком функционирования АС) от более информированных участников менее информированным. Если сообщаемая АЭ информация используется центром при принятии управленческих решений, то возникает проблема манипулирования. Поэтому при исследовании механизмов управления этим классом АС значительное внимание, помимо решения задач анализа и синтеза собственно механизмов стимулирования в узком смысле, будет уделяться изучению неманипулируемости и эффективности тех или иных процедур планирования.

В одноэлементных активных системах с интервальной неопределенностью и асимметричной информированностью эффективность стимулирования может оказаться достаточно низкой, даже при использовании механизмов с сообщением информации, хотя в этом случае проблемы манипулирования не возникает (при n = 1 для любого механизма планирования существует эквивалентный механизм открытого управления). В многоэлементной АС вовлечение АЭ в игру с сообщением информации иногда дает возможность повысить эффективность стимулирования (особенно ярко этот эффект проявляется в M11, описываемой в разделе 2.4). Поэтому в настоящем разделе определяется класс активных систем с внутренней интервальной неопределенностью и асимметричной информированностью, в котором при поиске оптимального механизма планирования можно без потери эффективности ограничиться рассмотрением только неманипулируемых механизмов то есть таких механизмов, что для любой процедуры планирования существует эквивалентная процедура, в которой сообщение достоверной информации является равновесием Нэша.

Основными требованиями к любому механизму управления активной системой являются его оптимальность (в смысле максимальной эффективности), согласованность (выполнение плана) и неманипулируемость (достоверность сообщаемой информации). Согласованные и неманипулируемые механизмы получили название правильных. Естественно, хотелось бы, чтобы оптимальный механизм был правильным. Однако это не всегда имеет место (см., например, [10]).

Рассмотрим активную систему, состоящую из центра и n активных элементов. Задача центра заключается в назначении планов активным элементам. Предположим, что центр не знает параметров, определяющих предпочтения элементов, поэтому планы назначаются на основании сообщаемой элементами информации. Коль скоро АЭ осознают возможность влияния на принимаемые центром решения, они сообщат такие заявки, чтобы назначенные на их основании планы были для них наиболее выгодны. Понятно, что при этом получаемая центром информация может вовсе не соответствовать истине. Значит появляется проблема искажения информации.

Возникает первый вопрос - может ли центр использовать такой механизм, в котором всем АЭ было бы выгодно сообщать достоверную информацию (то есть механизм, в котором сообщение правды - равновесие Нэша) ? Второй вопрос - если существует такой "хороший" механизм, в котором все ведут себя честно, то какова его эффективность ? Если он не оптимален (эффективность его низка), то может быть стоит смириться с неправдой ради оптимальности.

Обозначим план i-го АЭ: $x_i = \pi_i(s)$, где $\pi(s)$ – процедура планирования, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – сообщения (заявки) элементов. Заявка i-го АЭ $s_i \in \Omega_i$, $s \in \Omega$, где $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$. Обозначим $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in D^* = \pi(\Omega)$,

$$s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{(i-1)}, s_{(i+1)}, \ldots, s_n),$$

где s_{-i} – обстановка для i-го АЭ, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Все последующее изложение будем проводить параллельно для однопиковых и квазиоднопиковых функций предпочтения АЭ (соответственно используя для последних обозначение "'" и приводя для них результаты в круглых скобках).

Обозначим

$$G_i = \{ j \in I \mid \pi_i(s) \text{ – не убывает по } s_j,\ \forall s \in \Omega \},$$

$$H_i = \{ j \in I \mid \pi_i(s) \text{ – не возрастает по } s_j,\ \forall s \in \Omega \}.$$

Точку $r_i \in \mathbb{R}^1$ назовем идеальной точкой i-го АЭ, а точку $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ – идеальной точкой. Для функций предпочтения из класса SP' область $R^* = \prod_{i=1}^{n} [r_i^-, r_i^+]$ назовем идеальной областью.

Точка $s^* \in \Omega$ является равновесием Нэша, если $\forall i \in I$, $\forall s_i \in \Omega_i$

(2.2.2) $\varphi_i(\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*)) \geq \varphi_i(\pi_i(s_i, s_{-i}^*))$.

Очевидно, при фиксированном множестве Ω и процедуре планирования $\pi(\cdot)$ равновесие Нэша зависит от идеальной точки, то есть $s^* = s^*(r)$. Введем следующие предположения.

А.2.2.1(1'). $\Omega_i = [d_i, D_i] \in \mathbb{R}^1$, $-\infty < d_i \leq D_i < +\infty$, $i \in I$.

А.2.2.2. $\pi_i(s)$ – непрерывная строго возрастающая по s_i функция $\forall s \in \Omega$, $i \in I$.

А.2.2.2'. $\pi_i(s)$ – непрерывная неубывающая по s_i функция $\forall s \in \Omega$, $i \in I$.

А.2.2.3(А3'). $\forall i \in I$ $G_i \cup H_i = I$.

A.2.2.4(A4'). $\forall\ i \in I$, $\forall\ r \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{r}_i \in \mathbb{R}^1$ если

$$\pi_i(s^*(\tilde{r}_i, r_{-i})) \ge \pi_i(s^*(r_i, r_{-i})),$$

то

(2.2.3) $\forall\ j \in G_i \quad \pi_j(s^*(\tilde{r}_i, r_{-i})) \ge \pi_j(s^*(r_i, r_{-i}))$,

(2.2.4) $\forall\ j \in H_i \quad \pi_j(s^*(\tilde{r}_i, r_{-i})) \le \pi_j(s^*(r_i, r_{-i}))$.

A.2.2.5. $\varphi_i \in SP$.

A.2.2.5'. $\varphi_i \in SP'$.

A.2.2.6. $r \notin D^*$.

A.2.2.6'. $R^* \cap D^* = \varnothing$.

A.2.2.7'. Для любого $i \in I$, для любых $s_{-i} \in \Omega_{-i}$, s_i^1, $s_i^2 \in \Omega_i$: $s_i^1 > s_i^2$ выполнено

если $\pi_i(s_i^1, s_{-i}) < r_i$, $\pi_i(s_i^2, s_{-i}) < r_i$, то АЭ сообщит s_i^1;

если $\pi_i(s_i^1, s_{-i}) > r_i$, $\pi_i(s_i^2, s_{-i}) > r_i$, то АЭ сообщит s_i^2.

Прокомментируем введенные предположения. Предположение А.2.2.1 ограничивает множество допустимых сообщений элементов и играет ключевую роль для последующего анализа. Если отказаться от ограниченности заявок, то, например, при $\varphi \in SP$ и $r = +\infty$, элементы будут сообщать бесконечные заявки и могут не достичь "разумного" равновесия. Ограничение заявок в некотором смысле гарантирует существование конечного равновесия Нэша.

Второе предположение характеризует возможность монотонного воздействия каждого исполнителя на получаемый план в любой ситуации игры.

Третье и четвертое предположения накладывают ограничения на взаимодействие элементов. Предполагается, что элементы связаны, причем монотонно, при любой ситуации игры. Предположение А.2.2.4 требует, чтобы изменение назначаемых планов при изменении идеальной точки одного из элементов соответствовало знаку "связи" между ними. В некоторых случаях можно выделить группы элементов, связанных "ресурсно" - когда при увеличении плана одного из АЭ планы остальных не увеличиваются, и "комплектно" - когда увеличение плана одного АЭ не приводит к уменьшению плана остальных.

Предположение А.2.2.5 означает, что у каждого АЭ существует абсолютно оптимальный план r_i (множество таких планов для SP^*), причем чем ближе назначаемый центром план к абсолютно оптимальному, тем он лучше (не хуже) для АЭ. Важно отметить, что предпочтения АЭ сепарабельны - каждого конкретного элемента "не интересует" какие планы назначены остальным.

Предположение А.2.2.6 не является критичным и, практически, не используется в дальнейшем. Оно свидетельствует лишь о том, что нет полного согласования интересов центра и элементов, то есть центр не может назначить абсолютно оптимальные для всех АЭ планы. Если абсолютно оптимальный план является допустимым, то задача вырождается и проблема манипулирования не появляется.

Предположение А.2.2.7' гласит, что если для двух различных стратегий i-го АЭ s_i^1 и s_i^2 назначаемый ему план строго меньше (больше) абсолютно оптимального, то АЭ сообщит большую (меньшую) заявку. Фактически, это - предположение о поведении элементов при выборе заявок (в процессе схождения к равновесию Нэша) - элемент будет стремиться использовать весь диапазон допустимых заявок, даже если это не приближает его к абсолютно оптимальному плану. Такое поведение АЭ имеет место, например, если выполнена гипотеза индикаторного поведения. Введение подобного предположения обусловлено необходимостью "доопределить" положение равновесия (в А.2.2.2' и А.2.2.5' по сравнению с А.2.2.2 и А.2.2.5 мы отказались от строгой монотонности). Возможно вместо приведенного выше А.2.2.7' использовать следующее предположение:

для любых $i, j \in I$, для любых $r_i, r_j, \tilde{r}_j \in \mathbb{R}^1$, $r_{-j} \in \mathbb{R}^{n-1}$ выполнено: если $\pi_i(s^*(r_j, r_{-j})) \le r_i$, $\pi_i(s^*(\tilde{r}_j, r_{-j})) \ge r_i$, то

$$s_i^*(r_j, r_{-j}) \ge s_i^*(\tilde{r}_j, r_{-j}).$$

Седьмое предположение в такой "редакции", исключает из рассмотрения "экзотические" системы, в которых АЭ в равновесии "просит" больше, а получает меньше. Последний вариант выглядит менее "естественно" и при его использовании усложняется доказательство приводимой ниже леммы 2.2.3'

Предположениям А.2.2.1 - А.2.2.7 удовлетворяют, например, механизмы распределения ресурса, затрат, механизмы активной экспертизы [5,6,11], механизмы планирования в производственных системах при фиксированном суммарном объеме выпуска или при требованиях к пропорции (комплектности) выпускаемых изделий и т.д. Равновесие Нэша, определяемое (2.2.2), обладает следующим свойством.

Лемма 2.2.1(1'). Если выполнено А.2.2.1, А.2.2.2, А.2.2.5 (А.2.2.1', А.2.2.2', А.2.2.5', А.2.2.7'), то для любого $r \in \mathbb{R}^n$ и для любого $i \in I$

1(1'). Если $\pi_i(s^*(r)) < r_i(r_i^-)$, то $s_i^*(r) = D_i$.

2(2'). Если $\pi_i(s^*(r)) > r_i(r_i^*)$, то $s_i^*(r) = d_i$.

3. Если $s_i^*(r) \in (d_i, D_i)$, то $\pi_i(s^*(r)) = r_i$. ◆

Построим соответствующий механизму $\pi(\cdot)$ прямой механизм g, определив его следующим образом:

(2.2.5) $g_i(\tilde{r}) = \pi_i(\, s^*(\tilde{r})\,)$, $i \in I$,

где $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n)$ - сообщение элементов о своей идеальной точке r.

Сообщение r является равновесием Нэша, если $\forall\, i \in I$, $\forall\, \tilde{r}_i \in \mathbb{R}^1$

(2.2.6) $\varphi_i(\, \pi_i(\, s^*(\, r_i, r_{-i}\,)\,)\,) \ge \varphi_i(\, \pi_i(\, s^*(\, \tilde{r}_i, r_{-i}\,)\,)\,)$,

где $r_{-i} = (r_1, \ldots, r_{(i-1)}, r_{(i+1)}, \ldots, r_n)$.

Следует отметить, что вопрос о существовании и единственности равновесия Нэша $s^*(r)$ не принципиален для проводимого исследования и в настоящей работе не рассматривается. Действительно, утверждения всех приводимых результатов можно читать следующим образом: "Если для некоторого $r \in \mathbb{R}^n$ существует равновесие Нэша (может быть не единственное), то любое из этих равновесий удовлетворяет ..." и далее по тексту.

В дальнейшем нам потребуются свойства механизма g, даваемые следующими леммами:

Лемма 2.2.2(2'). Если выполнено А.2.2.1, А.2.2.2, А.2.2.5 (А.2.2.1', А.2.2.2', А.2.2.5', А.2.2.7'), то для любого $r \in \mathbb{R}^n$ и для любого $i \in I$

1. Если $g_i(r) < r_i$, то $\forall\, \tilde{r}_i \ge g_i(r)$, $\forall\, j \in I$.

$$g_j(r_{-i}, \tilde{r}_i) = g_j(r).$$

2. Если $g_i(r) > r_i$, то $\forall\, \tilde{r}_i \le g_i(r)$, $\forall\, j \in I$

$$g_j(r_{-i}, \tilde{r}_i) = g_j(r).$$

Справедливость леммы 2.2.2.(2') следует из леммы 2.2.1(1').

Лемма 2.2.3(3'). Если выполнено А.2.2.1 - А.2.2.5 (А.2.2.1' - А.2.2.5', А.2.2.7'), то для любого $r \in \mathbb{R}^n$ и для любого $i \in I$

1. Если $g_i(r) < r_i$, то $\forall\ \tilde{r}_i < g_i(r)$

$$g_i(r_{-i},\tilde{r}_i) \le g_i(r);$$

2. Если $g_i(r) > r_i$, то $\forall\ \tilde{r}_i > g_i(r)$

$$g_i(r_{-i},\tilde{r}_i) \ge g_i(r). \rightarrow$$

Лемма 2.2.2(2') утверждает, что при изменении идеальной точки в определенных пределах ситуация равновесия не меняется.

Лемма 2.2.3(3') характеризует монотонность изменения итогового равновесия при изменении идеальной точки в определенных пределах.

Докажем для рассматриваемой модели существование эквивалентного прямого механизма. Эквивалентным прямым механизмом называется такой прямой механизм, удовлетворяющий (2.2.5), в котором элементы сообщают непосредственно параметры своих функций предпочтения и сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для всех элементов. В рамках введенных предположений справедливо следующее

Утверждение 2.2.4(4'). Для любого механизма, удовлетворяющего А.2.2.1 - А.2.2.6 (А.2.2.1'-А.2.2.7'), существует эквивалентный прямой механизм. $\rightarrow$

Используя результат утверждения 2.2.4, центр может предложить элементам не сообщать заявки, а честно сказать, какие планы они считают для себя абсолютно оптимальными. На основании этой информации центр может пообещать "восстановить" равновесные заявки элементов. Так как центр использует в прямом механизме заявки, которые были равновесными в исходном механизме, результат не изменится, но центр получит представление об истинных предпочтениях элементов. Поэтому аналогичный подход к управлению получил в ряде работ название принципа выявления [10,85].

При анализе класса систем, удовлетворяющих введенным выше предположениям возникает закономерный вопрос - насколько существенным является то или иное предположение? Приводимый ниже пример иллюстрирует, что в некоторых системах (не удовлетворяющих введенным выше предположениям) результат утверждения 2.2.4, равно как и принцип выявления, не имеет места. То есть, для непрямого механизма, имеющего равновесие, мы построим соответствующий прямой механизм, в котором элементу выгодно искажать информацию.

<u>Пример</u> <u>2.2.1.</u> Пусть в активной системе имеются $n = 2$ активных элемента с идеальными точками $r_1 = -1$, $r_2 = 0$. Предположим, что допустимые множества $S_1 = S_2 = [0,1]$, а процедура планирования имеет вид

$$x_1 = g_1 (s_1, s_2) = s_1 + 2 s_2,$$

$$x_2 = g_2 (s_1, s_2) = 1 - s_1 - s_2.$$

В качестве функций предпочтения выберем расстояние от назначаемого элементу плана до его идеальной точки

$$(2.2.7) \quad \varphi_1(x_1,r_1) = - | x_1 - r_1 |, \quad \varphi_2(x_2,r_2) = - | x_2 - r_2 |.$$

В рассматриваемой системе выполнены предположения А.2.2.1, А.2.2.3, А.2.2.5, А.2.2.6 и нарушены А.2.2.2 и А.2.2.4, причем, как будет видно в дальнейшем, нарушение именно предположения А.2.2.4 оказывается критичным.

При выбранных конкретных значениях идеальных точках равновесные сообщения элементов $s_1^* (-1, 0) = 0$, $s_2^* (-1, 0) = 1$. Предположим теперь, что центр использует прямой механизм, построенный в соответствии с (2.2.5). Тогда, если первый АЭ сообщает оценку $\tilde{r}_1 = 3 \neq r_1$, а второй АЭ честно сообщает $\tilde{r}_2 = r_2$, то центр восстановит следующие "равновесные" стратегии:

$$s_1^*(3, 0) = 1, \; s_2^* (3, 0) = 0.$$

Вычисляем

$$x_1 = g_1 [s_1^* (r_1, r_2), s_2^* (r_1, r_2)] = 2,$$

$$\tilde{x}_1 = g_1 [s_1^* (\tilde{r}_1, r_2), s_2^* (\tilde{r}_1, r_2)] = 1.$$

Итак,

$$r_1 < g_1 [s_1^* (\tilde{r}_1, r_2), s_2^* (\tilde{r}_1, r_2)] <$$

$$< g_1 [s_1^* (r_1, r_2), s_2^* (r_1, r_2)] < \tilde{r}_1.$$

Таким образом:

$$\varphi_1 (x_1, p_1) = - 3 < - 2 = \varphi_1 (\tilde{x}_1, p_1),$$

то есть сообщение достоверной информации о идеальных точках не является равновесием Нэша в соответствующем прямом механизме. Число АЭ при этом не играет никакой роли. о

Таким образом, в общем случае, равновесное сообщение любого элемента зависит от типов (идеальных точек) остальных элементов и, манипулируя в прямом механизме, АЭ изменяет не только свою равновесную стратегию, восстанавливаемую центром, но и равновесные стратегии других АЭ. Введенные предположения обеспечивают, фактически, невыгодное для каждого АЭ изменение равновесных стратегии остальных (как "реакцию" на его отклонение), что удерживает его от манипулирования.

Перейдем теперь к решению собственно задачи стимулирования (до сих пор в настоящем разделе мы исследовали фактически лишь манипулируемость механизмов планирования). В главе 1 был описан класс детерминированных активных систем, в которых при поиске оптимального механизма стимулирования можно без потери эффективности ограничиться классом согласованных механизмов (например, С-типа). Ниже устанавливается связь между неманипулируемыми механизмами планирования и согласованными механизмами стимулирования и доказывается, что в активных системах, удовлетворяющих вводимым предположениям, оптимальными являются правильные, то есть неманипулируемые и согласованные механизмы управления. Рассмотрим активную систему, состоящую из центра и п АЭ с целевыми функциями:

$$f_i\,(x_i,\ y_i,\ r_i) = h_i\,(y_i,\ r_i) - \chi_i\,(x_i,\ y_i),\ i \in I. \tag{2.2.8}$$

Механизм управления включает в себя как составные части механизм планирования и механизм стимулирования. "Мостом" между результатами главы 1 и раздела 2.2 служит приводимая ниже лемма 2.2.5, определяющая для рассматриваемой модели функции предпочтения элементов через их целевые функции. При использовании скачкообразной системы стимулирования функция предпочтения i-го АЭ равна

$$\varphi_i(\ x_i,\ r_i\ ) = \max_{y_i \in A_i}\ [\ h_i(y_i,r_i) - \chi_i^c(x_i,y_i)\ ],\ i \in I. \tag{2.2.9}$$

<u>Лемма</u> <u>2.2.5.</u> Если выполнены предположения, введенные в главе 1 и А.2.2.6 - А.2.2.7', то $\forall\ i \in I$ функция предпочтения принадлежит классу SP'. ⇒

Значение функции предпочтения АЭ определяется следующим выражением:

$$\varphi_i(\ x_i,\ r_i\ ) = \begin{cases} h_i(x_i,r_i),\ x_i \in [x_i^-,x_i^+] \\ h_i(r_i,r_i) - c_i,\ x_i \notin [x_i^-,x_i^+] \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Утверждение 2.2.4 и лемма 2.2.5 доказывают справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.2.6. Если выполнены предположения, введенные в главе 1. и А.2.2.6 - А.2.2.7', то для любого механизма найдется правильный механизм не меньшей эффективности.

То есть при поиске оптимального механизма в нлассе активных систем, удовлетворяющих введенным предположениям, можно ограничиться множеством правильных механизмов.

Следовательно оптимальным согласованным механизмом стимулирования является система стимулирования С-типа, при использовании которой удается не только обеспечить согласованность назначаемых планов, но и построить эквивалентный прямой (неманипулируемый) механизм. При использовании систем стимулирования К-типа функция предпочтения АЭ оказывается константой, значит ее эффективность не выше эффективности скачкообразной системы стимулирования.

Определим множество механизмов управления, удовлетворяющих введенным выше предположениям: $\mathfrak{L}_1$, и соответствующее множество правильных механизмов: $\mathfrak{L}_2$, то есть $\mathfrak{L}_2$ - множество механизмов управления таких, что: $\chi \in M_\chi$, $P(\chi) = Q^*$, $x_i \in Q_i$, $\tilde{r}_i = r_i$, $i \in I$.

В соответствии с результатом утверждения 2.2.6, решения задач $K(\Sigma) \to \max\limits_{\Sigma \in \mathfrak{L}_1}$ и $K(\Sigma) \to \max\limits_{\Sigma \in \mathfrak{L}_2}$ совпадают. Этот факт достаточно удивителен, так как, очевидно, имеет место вложение $\mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{L}_1$. Однако, в соответствии с утверждением 2.2.6 при введенных предположениях решения задачи синтеза оптимального механизма управления и задачи поиска оптимального правильного механизма совпадают. Тот факт, что при поиске оптимального механизма можно ограничиться рассмотрением множества правильных механизмов имеет важное методологическое значение. Действительно, использование механизмов, побуждающих элементы к сообщению правды и выполнению обязательств, представляется достаточно привлекательным.

Относительно влияния неопределенности в рассматриваемой модели можно сделать следующий вывод: с ростом неопределенности - "расширением" множества Ω эффективность стимулирования может как возрастать, так и уменьшаться. Получение более конкретных результатов в этом направлении требует отдельного достаточно трудоемкого исследования и выходит за рамки настоящей работы.

2.3. Механизмы стимулирования в активных системах с внешней интервальной неопределенностью и симметричной информированностью

Рассмотрим активную систему, в которой результат деятельности активного элемента зависит от внешнего по отношению к АС параметра $\theta \in \Omega$ – состояния природы. Будем считать, что на момент выбора стратегий и центр, и активный элемент имеют одинаковую информацию о неопределенном параметре, а именно – предположим, что им известно лишь множество Ω его возможных значений (М5).

В данной базовой модели (М5) – $\hat{\Omega} = \hat{r}$, $\Omega = [\ d,\ D\ ]$, $I = I' = [\ \hat{r},\ \Omega\ ]$. Тогда целевые функции центра и АЭ имеют, соответственно, вид:

$$(2.3.1)\quad \Phi\ (\ z\ ) = H\ (\ z\ (\ y,\ \theta\ )\ )$$

и

$$(2.3.2)\quad f\ (\ z,\ \chi\ ) = h\ (\ z\ (\ y,\ \theta\ )\ ) - \chi\ (\ z\ (\ y,\ \theta\ )\ ),$$

где $z = z\ (\ y,\ \theta\ ) \in A_0$ – результат деятельности АЭ, определяемый выбираемым им действием $y \in A$ и состоянием природы $\theta \in \Omega$.

Если центр и АЭ при устранении неопределенности ориентируются на максимальный гарантированный результат, то множество решений игры имеет вид

$$(2.3.3)\quad P\ (\ \chi\ ) = \operatorname{Arg} \max_{y \in A}\ \min_{\theta \in \Omega}\ f\ (\ z,\ \chi\ ),$$

а эффективность стимулирования в рамках гипотезы благожелательности определяется

$$(2.3.4)\quad K\ (\ \chi\ ) = \max_{y \in P(\chi)}\ \min_{\theta \in \Omega}\ H\ (\ z\ (\ y,\ \theta\ )\ ).$$

Введем следующие предположения:

А.2.3.1. $z = z\ (\ y,\ \theta\ )$ – непрерывная монотонно возрастающая функция своих переменных.

А.2.3.2. Для любого множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^1$ максимальное гарантированное значение функции дохода активного элемента постоянно.

Отметим, что в АС с представлением целевой функции АЭ в виде "стимулирование минус затраты" в силу А.1.4 имеет место:

$$\forall\ \theta \in \Omega\ \ \min_{y \ge 0} c\ (\ z(y,\theta)\ ) = 0.$$

Обозначим $H(y) = \min_{\theta\in\Omega} H(z(y, в))$. Тогда, если действия АЭ наблюдаются центром, то стимулирование (фуннция штрафов) может основываться на действии АЭ, то есть $\chi = \chi(y)$. В этом случае, обозначая $h(y) = \min_{в\in\Omega} h(z(y, в))$, получаем детерминированную задачу стимулирования: $\max_{y\in P(\chi)} H(y) \to \max_{\chi\in M}$, для решения которой можно воспользоваться результатами, приведенными в главе 1 настоящей работы, причем относительно влияния величины неопределенности на эффективность стимулирования можно сделать следующий вывод.

<u>Утверждение</u> <u>2.3.1.</u> Если выполнены предположения 2.3.1 и 2.3.2, то в активной системе с внешней интервальной неопределенностью, симметричной информированностью и наблюдаемых действиях АЭ с ростом неопределенности эффективность стимулирования не увеличивается. ➔

Анализ задачи стимулирования несколько усложняется в случае, когда действия АЭ ненаблюдаемы для центра, то есть когда стимулирование должно основываться на наблюдаемых результатах деятельности: $\chi = \chi(z)$.

Решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования дается следующим утверждением:

<u>Утверждение</u> <u>2.3.2.</u> В активной системе с внешней интервальной неопределенностью, симметричной информированностью и ненаблюдаемых действиях АЭ оптимальной является компенсаторная функция штрафов. ➔

При предельном переходе к детерминированной АС $\Omega = \hat{в}$ и выбранное элементом действие однозначно определяет результат его деятельности (обычно зависимость $z(\cdot, \cdot)$ выбирают так, чтобы $\forall y \in A$ выполнялось $z(y,\hat{\theta}) \equiv y$). В детерминированной АС множество Y_{min} не пусто и совпадает с максимальным множеством решений игры (напомним, что компенсаторная система стимулирования оптимальна в детерминированной АС).

Исследуем влияние неопределенности на эффективность стимулирования для случая ненаблюдаемых действий АЭ. С ростом неопределенности в смысле $\Omega_1 \le \Omega_2$ (см. также раздел 2.1) множество Y_{min} сужается. Параллельно сужается и множество реализуемых действий (при использовании АЭ МГР). В какой-то момент при достаточно "большом" множестве возможных значений неопределенного параметра оказывается, что $Y_{min} = \varnothing$. Тогда АЭ осуществляет выбор из множества Y_{max}. Легко видеть, что если неопределенность увеличивается (диапазон возможных значений состояния природы растет), то не сужается и множество Y_{max}. При этом, если АЭ ориентируется на максимальный гарантированный результат, то множество реализуемых действий с ростом неопределенности не растет (какую бы систему стимулирования, даже не оптимальную, не использовал бы центр). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 2.3.3. Если выполнено предположение 2.3.1, то в активной системе с внешней интервальной неопределенностью, симметричной информированностью и ненаблюдаемых действиях АЭ с ростом неопределенности эффективность стимулирования не увеличивается.

Отметим, что результат утверждения 2.3.3 справедлив в предположении использования активным элементом МГР. Можно показать, что если АЭ будет использовать оптимистичную оценку еостояния природы, то получится прямо противоположный результат: с ростом неопределенности эффективность стимулирования будет увеличиваться. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим следующий пример.

Пример 2.3.1. Пусть функция дохода АЭ: $h(z) = z - z^2/2r$, $\Omega = [\ d,\ D\ ]$, где $d = -D$, $D = \sqrt{rc}$, $H\ (z) = z$, $z = y + \theta$.

Тогда $z^{\pm} = r \pm \sqrt{2rc}$, $Y_{min} = [r-(\sqrt{2}-1)\sqrt{rc}\ ,\ r+(\sqrt{2}-1)\sqrt{rc}\ ]$ и центр заинтересован в выборе активным элементом как можно большего действия (независимо от того, какой метод устранения неопределенности - МГР, критерий "оптимизма-пессимизма" и т.д., использует центр). При использовании компенсаторной системы стимулирования в детерминированной АС центр может побудить АЭ выбрать действие $y_o = z^*$, в АС с интервальной неопределенностью - действие $y_{МГР} = r + (\ \sqrt{2}\ -\ 1)\ \sqrt{rc}$. Если же АЭ использует оптимистичную оценку состояния природы, то в рамках гипотезы благожелательности центр может побудить его выбрать действие $y_{опт} = z^* + \sqrt{rc}$. Видно, что максимальные реализуемые действия для рассмотренных случаев удовлетворяют следующему соотношению (этому же соотношению удовлетворяют и эффективности стимулирования): $y_{МГР} < y_o < y_{опт}$.

Введем в рассматриваемом примере возможность приобретения информации. Пусть $D = \alpha\sqrt{rC}$, $\alpha \in [0,1]$, $\alpha = 0$ соответствует детерминированной АС. Тогда $y_{мгр}(\alpha) = r + (\sqrt{2} - \alpha)\sqrt{rC}$ ($y_{мгр}(0)=y_o$), то есть неопределеность параметризована α.

Выберем следующую зависимость информированности от величины платы за информацию: $\alpha = \alpha(\Delta C) = e^{-\Delta c/c}$. Основное уравнение примет вид: $y_{мгр}(\Delta C) = r + (\sqrt{2} - e^{-\Delta c/c})\sqrt{r(C-\Delta C)}$. На краях отрезка $[0,C]$ имеем: $y_{мгр}(0) = r + (\sqrt{2} - 1)\sqrt{rC}$, $y_{мгр}(C) = r$. В последнем случае (при нулевом фонде стимулирования) АЭ выбирает LCA - оптимальное для себя действие в отсутств и стимулирования. Единственная точка максимума $\Delta C^* \in (0,C)$ основного уравнения удовлетворяет трансцендентному уравнению: $9 - 2\,\Delta C/C = 3e^{-\Delta c/c}$. o

Аналогичные эффекты могут проявляться и в случае когда центру неизвестны достоверно принципы поведения (устранения неопределенности и выбора) активного элемента - для рассматриваемой АС легко привести примеры, соответствующие приведенным в разделе 2.1.

2.4. Механизмы стимулирования в активных системах с внешней интервальной неопределенностью и асимметричной информированностью

Предположим, что в АС присутствует следующая неопределенность: результат деятельности i-го АЭ $z_i \in A_i^o$ в общем случае не совпадает с его действием, например $z_i(y_i, \theta) = y_i + \theta$, $i \in I$, где $\theta \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^1$ - общий для всех АЭ внешний неопределенный параметр - состояние природы (М11). В данной базовой модели: $\hat{\Omega}=\hat{r}$, $\Omega = [\,d, D\,]$, $I^* = \{\,\hat{r}, \Omega\,\}$, $I = \{\,\hat{r}, \hat{\theta}\,\}$.

Мы выбрали для первоначального рассмотрения простейший, в некотором смысле, случай - когда результат деятельности АЭ содержит аддитивную "помеху". Результат настоящего раздела справедлив и для общего случая:

А.2.4.1. $z_i = Q_i(y_i, \theta)$, где $Q_i(\cdot,\cdot)$ - неубывающая функция своих переменных, $i \in I$.

А.2.4.2. Функция дохода центра монотонна по действиям АЭ.

В рассматриваемой ниже модели участники АС информированы асимметрично: выбирая ненаблюдаемое для центра действие, АЭ знает состояние природы, а центр в момент выбора системы стимулирования - нет. Тогда, если центр после выбора АЭ узнает реализовавшееся значение в, представляется логичным предоставить ему возможность назначать план как функцию в, то есть использовать так называемый гибкий план $x_i = x_i(e)$ [2,9].

В предположении ненаблюдаемости действий и без обмена информацией множество решений игры и эффективность стимулирования имеют, соответственно, вид:

$$(2.4.1)\ P(x, \chi, \hat{B}) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \{ h(z(y,\hat{\theta})) - \chi(x, z(y,\hat{\theta})),$$

$$K(x, \chi) = \min_{\hat{B} \in \Omega} \max_{y \in P(x,\chi,\hat{B})} H(y).$$

Здесь и далее будем считать, что доход центра и доход всех АЭ зависит только от соответствующих действий АЭ, в то время как стимулирование каждого АЭ зависит только от его наблюдаемого результата. Более того, для простоты будем считать, что целевая функция центра $\Phi(y) = H(y)$ монотонно возрастает по действиям всех АЭ. Из результатов главы 1 следует, что наиболее выгодный для центра (среди реализуемых) выбор АЭ - y_i^*, $i \in 1$.

В этом случае, используя систему стимулирования

$$\tilde{\chi}_i^c(x_i(e), z_i) = \begin{cases} C_i, & z_i < y_i^* + в \\ 0, & z_i \geq y_i^* + в \end{cases}$$

с гибким планом $x_i(\theta) = y_i^* + e$, центр побуждает АЭ выбрать действия, в точности равные x_i^*, $i \in I$. В более общем случае, если имеет место А.2.4.1, то оптимальный гибкий план определяется из условия: $x_i(e) = Q_i(y_i^*, в)$, $i \in I$. Таким образом, справедлива следующее

Утверждение 2.4.1. Если состояние природы наблюдаемо центром после выбора элементами своих действий, то $\forall\, в \in \Omega$ эффективность механизма гибкого планирования равна эффективности оптимального механизма планирования в аналогичной детерминированной системе.

Обозначим K_2 - эффективность механизма гибкого планирования, K_1 - эффективность стимулирования в соответствующей детерминированной АС (то есть в АС в которой $\Omega = \hat{B}$; в случае несмещенной помехи $\hat{\theta}=0$). Из утверждения 2.4.1 следует, что $K_2=K_1$.

Предположим теперь, что в рамках рассматриваемой модели состояние природы вообще не наблюдаемо для центра, то есть ему известно лишь, что в $\in \Omega$ и он не может получать никакую дополнительную информацию.

В этом случае, если $A_i = X_i = \Omega = \mathbb{R}^1$, $i \in I$, то, какую бы систему стимулирования не использовал центр, всегда найдется такое состояние природы, при котором АЭ выбирают наихудшие для центра действия. Поэтому гарантированное значение эффективности в этом случае равно $K_3 = H(r)$, где $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, что соответствует неиспользованию центром стимулирования вообще (при $\chi_i \equiv 0$ АЭ выберут действия, максимизирующие их функции дохода).

Полученную оценку гарантированной эффективности K_3 вряд ли можно признать удовлетворительной. Поэтому предположим, что каждый АЭ, зная реализовавшееся значение состояния природы – $\hat{в}$, сообщает центру ее оценку $s_i \in S = \Omega$, $i \in I$. Очевидно, в общем случае $s_i \neq \hat{в}$ и АЭ будут сообщать наиболее выгодные для них оценки.

Пусть $n = 1$, то есть в системе имеется только один элемент. Если предположить, что центр "верит" АЭ и подставляет в закон гибкого планирования вместо в сообщение АЭ s, то, опуская индекс "i", получим, что для АЭ наиболее выгодно выбрать действие $y^* = r$ и сообщить оценку

(2.4.2) $s = r + в - y^+$.

Таким образом, делая вид, что он выбрал оптимальное для центра действие x^+, и манипулируя информацией, АЭ обеспечивает абсолютно оптимальное для себя значение целевой функции, то есть справедливо

<u>Утверждение</u> <u>2.4.2.</u> В системе с одним АЭ и сообщением информации при ненаблюдаемом состоянии природы $\forall$ е $\in \Omega$ эффективность механизма стимулирования $K_4 = H(r) = K_3$.

Результат утверждения 2.4.2 позволяет сделать вывод, что эффективность механизма в одноэлементной системе с сообщением информации при ненаблюдаемом состоянии природы не выше, чем без сообщения информации, и ниже, чем в соответствующей детерминированной АС.

Центр, конечно, может использовать эквивалентный прямой механизм: попросить АЭ честно сообщить состояние природы, пообещав подставить сообщенную оценку в (2.4.2) и использовать ее для назначения плана. При этом в силу принципа открытого управления (ОУ) эффективности исходного и соответствующего прямого механизма будут равны, но, зато, центр будет знать истинное состояние природы. Таким образом, эквивалентный неманипулируемый механизм существует [5], однако его использование не позволяет достичь эффективности K_1.

Можно наделить центр рефлексией: пусть он обещает АЭ считать сообщенную оценку за истинную, а, на самом деле, использует (2.4.2) для определения реализовавшегося значения состояния природы. Такой "усложненный" механизм может иметь более высокую эффективность при условии, что АЭ не "разгадает" стратегию центра. И центр, и АЭ могут обладать еще более глубокими уровнями рефлексии, однако, исследование такого рода задач выходит за рамки настоящей работы.

В рассмотренных выше в настоящем разделе механизмах стимулирования многоэлементность системы не играла, практически, никакой роли - задача распадалась на ряд одноэлементных. Ниже в механизмах с сообщением информации наличие нескольких элементов играет ключевую роль: оказывается, заставив АЭ участвовать в игре с сообщением информации, центр может получить более полную информацию о значении неопределенного внешнего фактора.

Если $n > 1$, но все АЭ одинаковы, то, очевидно, стратегия типа (2.4.2) является доминантной и $K_4 = H(r)$. Ситуация меняется если АЭ различны и центр использует информацию, поступающую от каждого из них. Тот факт, что состояние природы одинаково для всех существеннен - если несколько различных элементов функционируют в одинаковых условиях, то оказывается возможно, сравнивая результаты их деятельности и сообщения, более точно, чем в одноэлементной модели, оценить реализовавшееся значение $\hat{\theta}$. Так как центр оценивает в на основании сообщений элементов, то все они оказываются вовлеченными в игру, в которой стратегия каждого АЭ состоит в выборе действия и сообщаемой оценки. Найдем равновесные стратегии и оценим эффективность K_5 этого механизма.

Пусть центр использует следующую процедуру определения оценки состояния природы по сообщениям элементов

(2.4.3) $\theta''(s) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{ s_i \}$,

где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, и систему стимулирования типа С-типа с гибким планом

(2.4.4) $x_i (\theta^*(s)) = y_i^+ + \theta''(s)$.

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

<u>Утверждение</u> <u>2.4.3.</u> Если $n \geq 2$, то при использовании центром механизма (2.4.1), (2.4.3)-(2.4.4) $\forall\ \theta \in \Omega$, $\forall\ i \in I$ сообщение $\tilde{s}_i = \hat{\theta}$ и выбор действия $\tilde{y}_i = y_i^*$ является равновесием Нэша. В этой точке Нэша эффективность $K_s = K_1$.

Утверждение 2.4.3 гласит, что в предложенном механизме при любом состоянии природы выбор оптимального для центра действия и сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для всех элементов.

Но, к сожалению, в общем случае сообщение достоверной информации оказывается не единственным равновесием Нэша при использовании центром построенного механизма. Обозначим $v_i = r_i - y_i^* \leq 0$, $r_i(e) = v_i + \theta$, $i \in I$, и, предполагая, что не все v_i одинаковы, упорядочим АЭ в порядке возрастания $\{v_i\}$.

А.2.4.3. $\forall\ \theta \in \Omega$ упорядочение $\{ r_i(e) \}$ совпадает с упорядочением $\{ v_i \}$.

Доминантной стратегией каждого АЭ является сообщение

(2.4.5) $s_i^* = r_i(\theta)$.

При этом в соответствии с (2.4.3) центр определяет $e^* = r_n(e)$, то есть элемент с максимальным номером в упорядочении $\{ v_i \}$ оказывается "диктатором" и получает абсолютно оптимальный для себя план. Остальные элементы могут, в принципе, сообщать произвольные оценки, не превосходящие θ^*. Действие y_i^*, выбираемое i-м АЭ, максимизирует

$$h_i(y_i) - \begin{cases} C_i, & y_i < y_i^+ + r_n - x_n^* \\ 0, & y_i \geq y_i^+ + r_n - x_n^+ \end{cases},$$

то есть

(2.4.6) $y_i^* = y_i^+ + v_n \geq r_i$, $i \in I$.

Таким образом, доминантные стратегии

$$s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*),\ y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$$

удовлетворяют (2.4.5)-(2.4.6). Отметим, что с точки зрения АЭ это равновесие Парето-доминирует ($\tilde{s}$, $\tilde{y}$), поэтому вряд ли можно ожидать, что элементы "окажутся" в точке ($\tilde{s}$, $\tilde{y}$). Для любого состояния природы $\theta \in \Omega$ эффективность K_s^* механизма (2.4.5) - (2.4.6) в точке (s^*, y^*) оказывается равной $K_s^* = H(y^*)$, причем: $K_4 \leq K_s^* \leq K_s$.

Рассмотренная выше процедура (2.4.3) является лишь одной из возможных процедур оценки состояния природы по сообщениям элементов. Если, например, $\theta^*(s) = \min_{i=\overline{1,n}} \{ s_i \}$, то диктатором будет первый АЭ. Понятно, что в общем случае эффективность зависит от используемой процедуры планирования. Поэтому исследуем задачу синтеза оптимальной процедуры планирования.

Так как состояние природы аддитивно входит в результат деятельности АЭ (здесь и далее аддитивность результата деятельности по действию и состоянию природы оказывается существенной), то ограничимся рассмотрением процедур планирования вида

(2.4.7) $x_i(s) = y_i^* + \pi(s)$,

где функция π: $\Omega^n \to \Omega$ монотонна по всем своим переменным и $\forall\ a \in \Omega$ $\pi(\vec{a}) = a$, где $\vec{a} = (a, a, \ldots, a)$.

Целевая функция i-го АЭ при этом имеет вид

$$f_i(x_i(s), y_i, \theta) = h_i(y_i) - \chi_i^c(x_i(s), y_i + \theta),$$

а его функция предпочтения:

(2.4.8) $\varphi_i(x_i(s), \theta) = f_i(x_i(s), \hat{y}_i, \theta), i \in I$,

где $\hat{y}_i$: $f_i(x_i(s), \hat{y}_i, \theta) \ge f_i(x_i(s), y_i, \theta)\ \forall\ y_i \in A_i$.

Функция предпочтения (2.4.8) обладает следующим свойством:

$$\varphi_i(x_i(s), \theta) = \begin{cases} h_i(r_i) - c_i, & x_i(s) \notin [\ y_i^- + e,\ y_i^* + \theta\ ] \\ h_i(x_i(s) - \theta), & x_i(s) \in [\ y_i^- + \theta,\ y_i^* + \theta\ ] \end{cases}.$$

Пусть $\Omega = [\ d, D\ ] \subseteq \mathbb{R}^1$, $-\infty < d < 0 < D < +\infty$ и существует равновесие Нэша $s^* \in \Omega^n$. Тогда по аналогии с результатами раздела 2.2 и свойствами равновесия в механизмах активной экспертизы [5] получим, что

- если $\pi(s^*) > v_i + e$, то $s_i^* = d$;
- если $\pi(s^*) < v_i + \theta$, то $s_i^* = D$;
- если $s_i^* \in (d, D)$, то $\pi(s^*) = v_i + \theta$.

Определим (n+1) число

$$w_i = \pi (\underbrace{d, d, \ldots, d}_{i}, \underbrace{D, D, \ldots, D}_{n-i}),\ w_0 = D \ge w_1 \ge \ldots \ge w_n = d.$$

Каждому механизму $\pi(\cdot)$ соответствует некоторое разбиение отрезка $[d, D]$ последовательностью $\{ и_i \}$. Диктатором (если он есть) в этом случае является элемент с номером $q = q(\theta)$, определяемым из условия

$$(2.4.9)\quad \pi\,(\underbrace{d,\ d,\ \dots,\ d}_{q\ -\ 1}, s^*_q\ ,\ \underbrace{D,\ D,\ \dots,\ D}_{n\ -\ q}) = r_q(\theta).$$

Для любого $в \in \Omega$, $w_0 = D > r_1(в)$, $r_n(в) < D$. Получаем, что

$$\begin{cases} 1)\ \forall\ в \in \Omega \text{ таких, что } и_n = d > r_n(в) \\ \quad [\ r_1(в),\ r_n(в)\ ] \cap [\ d,\ D\ ] = \emptyset, \text{ следовательно,} \\ \quad \forall\ i \in I,\ \forall\ s \in \Omega^n\ r_i(\theta) < \pi(s), \text{ то есть } s^*_i = d,\ \pi(d) = d. \\ 2)\ \forall\ \theta \in \Omega \text{ таких, что } и_n = d \le r_n(в), \text{ существует} \\ \quad \text{единственный элемент с номером } q \text{ такой, что } w_{q-1} > r_{q-1}, \\ \quad и_q \le r_q\ [5]. \text{ При этом } \pi(s^*) = \min\ (\ w_{q-1},\ r_q\ ),\ s^*_j = d, \\ \quad j=\overline{1,q-1},\ s^*_j = D,\ j=\overline{q+1,n},\ s^*_q = D, \text{ если } и_{q-1} \le r_q,\ s^*_q \\ \quad \text{удовлетворяет, если } и_{q-1} > r_q \end{cases} \qquad (2.4.10)$$

По аналогии с результатами раздела 2.2 можно показать, что в рамках рассматриваемой модели для любого механизма гибкого планирования существует неманипулируемый механизм не меньшей эффективности. Значит, при поиске оптимального механизма можно ограничиться классом неманипулируемых. Однако, условия неманипулируемости могут оказаться достаточно громоздкими, поэтому для нахождения оптимального механизма мы воспользуемся последовательностью $\{ w_i \}$.

Возможны следующие случаи.

Если $d \le в < d + y^*_n - r_n$, то $\forall\ i=\overline{1,n}$ $s^*_i = d$, $\pi(s^*) = d$. При этом элементам назначаются планы $x_i(s^*) = y^+_i + d$, и они выбирают действия $y^*_i(e) = \max\ (\ r_i,\ y^+_i + d - в\ )$, $i=\overline{1,n}$. Значит, в этом случае гарантированная эффективность равна $K^1_6 = H\ (\ y^1\ )$, где $y^1_i = \max\ (r_i,\ y^*_i + d - D)$, $i \in I$. Видно, что $K^1_6 \ge K_4$, причем если диапазон возможных значений состояния природы достаточно широк, то $K^1_6 = K_4$. Последнее утверждение имеет следующую содержательную интерпретацию. Величина v_i характеризует диапазон принципиальных (устанавливаемых ограничением механизма стимулирования $\{C_i\}$) возможностей центра по управлению i-м АЭ: $(-v_n)$ – "минимальные возможности", $(-v_1)$ - "максимальные". Если "разброс" состояний природы велик ($D - d \geq - v_1$), то стимулирование не имеет смысла.

Исследуем теперь случай, когда $\text{в} \geq d + y^+_n - r_n$. Фиксируем процедуру планирования $\pi(\cdot)$ и некоторое $\text{в} \in \Omega$. При известных функциях дохода элементов (параметрах $\{ v_i \}$) в соответствии с (2.4.9)-(2.4.10) определяется диктатор $q(\theta)$. Тогда действия, выбираемые АЗ, удовлетворяют

$$(2.4.11)\quad y^*_i = \begin{cases} y^+_i + v_q, & i \leq q(\theta) \\ r_i & , i \geq q(\theta) \end{cases}, \quad i \in I.$$

Гарантированная эффективность равна:

$$K^{\Gamma}(\pi) = \min_{\theta \geq d - v_n} H\ (y^+_1 + v_q,\ y^+_2 + v_q,\ y^+_{q-1} + v_q,\ y'_q,\ \dots,\ y'_n).$$

Так как каждому механизму планирования соответствует некоторая последовательность $\{ w_i \}$, то задача синтеза оптимального механизма планирования заключается в поиске (п-1) числа из отрезка $[d,D]$ таких, что $и_1 \geq и_2 \geq \quad \geq н_{n-1}$ и эффективность K^{Γ} максимальна.

Можно подметить, что чем больше номер диктатора, тем больше значение целевой функции центра. Если назначить диктатором п-й АЭ, то гарантированная эффективность равна:

$$K^2_6 = H\ (x^+_1 + v_n,\ x^*_2 + v_n,\ \dots, x''_{n-1} + v_n,\ y'_n).$$

При этом следует учитывать, что в соответствии с (2.4.10) диктатором может оказаться центр (при $w_{q-1} \leq r_q$). Очевидно, при этом эффективность оказывается меньше, чем K^2_6. Итак, мы доказали следующий результат.

<u>Утверждение</u> <u>2.4.4.</u> Если выполнены А.2.4.1 - А.2.4.3, то оптимальной стратегией центра является использование оценки состояния природы, сообщенной элементом с максимальным номером в упорядочении $\{ v_i \}$ по возрастанию. Эффективность механизма планирования при этом равна

$$K_6 = \min\ (K^1_6,\ K^2_6) < K_1 .$$

Таким образом, мы показали, что если целевая функция центра не убывает по всем своим переменным (действиям элементов), то процедура планирования (2.4.13) оптимальна (при этом (2.4.11) совпадает с (2.4.6)), то есть оценка K_6 неулучшаема.

Следует отметить, что в более общем случае, если все функции $Q_i(\cdot,\cdot)$ таковы, что $\forall\ \theta \in \Omega$ упорядочение $r_i = Q_i\ (v_i, \theta)$, $i = \overline{1,n}$ совпадает с упорядочением $\{v_i\}$, то полученный результат остается в силе.

Если целевая функция центра зависит от действий элементов более сложным образом, чем предполагалось выше, то необходимо использовать предложенный метод поиска оптимального разбиения.

До сих пор мы рассматривали, в основном, задачу планирования. В заключение настоящего раздела опишем один из возможных подходов к решению задачи стимулирования в исследуемой активной системе. Без потери эффективности ограничимся изучением систем стимулирования C-типа (см. главу 1), определяемых планом (точкой скачка) и ограничением механизма стимулирования - $\{\ C_i\ \}$ (амплитудой скачка).

Проанализируем задачу выбора оптимального набора $\{C_i\}$. Если возможные значения $\{C_i\}$ неотрицательны и ограничены сверху, то, очевидно, следует назначать максимальные значения C_i^* всем АЭ, кроме диктатора. Для диктатора же следует выбирать минимальное значение C_q - в принципе, его можно вообще не стимулировать, а использовать как источник информации (в силу гипотезы благожелательности он будет сообщать достоверную информацию, так как это его сообщение не влияет на его целевую функцию). Но, изменяя $\{C_i\}$, центр может изменить диктатора. Значит, возникает задача назначения диктатора.

Для того, чтобы определить кого из АЭ "назначать" дикатагором следует использовать следующий алгоритм: $\forall\ i \in I$ определить значение целевой функции центра $H^i(y^*)$ при условии, что $y_i^* = r_i$, $y_j^* = x_j^*(\ C_j^*\ )$, $j \neq i$, и назначить диктатором элемент с номером $q^* = \arg\max\limits_i H^i(y^*)$.

Если на совокупность $\{C_i\}$ наложены другие ограничения, то задача сводится к стимулированию в системе со слабо связанными элементами (см. главу 1).

Следует отметить, что в настоящем разделе достаточно эффективным оказалось использование результатов, полученных ранее при исследовании эквивалентных прямых механизмов (раздел 2.2), а построенный механизм можно рассматривать как частный случай многоканального.

Рассмотрим в рамках исследуемой модели механизм с платой за информацию. Потери центра, обусловленные незнанием состояния природы равны (K_1-K_6), где $K_1=H(y^*)$. Если используется механизм стимулирования с платой за информацию, то, предположим, что фонд стимулирования i-го АЭ уменьшается на ΔC_i, $i \in I$, причем $\sum_{i=1}^{n} \Delta C_i = \Delta C$. Эффективность стимулирования в этом случае определяется как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} K_7 (\Delta C_1, \Delta C_2, \dots, \Delta C_n) \to \max\limits_{\{\Delta C_i\}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta C_i = \Delta C, \end{cases},$$

где $K_7 = H (y_1^*(C_1-\Delta C_1), y_2^*(C_2-\Delta C_2), \dots, y_n^*(C_n-\Delta C_n))$. Величина платы за информацию является параметром решения полученной задачи условной оптимизации. Сравнивая K_6 и K_7, легко найти максимальную величину ΔC, при которой $K_7 \ge K_6$.

<u>Пример 2.4.1.</u> Предположим, что в АС имеются $n = 3$ АЭ с функциями дохода $h_i(z_i) = z_i - z_i^2/2r_i$, $z_i = y_i + \theta$, $i=\overline{1,3}$; $r_1= 5$, $r_2 = 6$, $r_3 = 7$; $\theta \in \Omega = [-4,4]$, $\hat{\theta} = 0$; $H(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Тогда: $y_i^* = r_i + \sqrt{2r_iC_i}$, $v_i = - \sqrt{2r_iC_i}$, $r_i(в) = в - \sqrt{2r_iC_i}$, $i=\overline{1,3}$. Доминантная стратегия i-го АЭ - сообщение $s_i^* = в - \sqrt{2r_iC_i}$ и выбор действия - $y_i^\bullet = y_i^* + v_k$, где $k = \arg\max_i v_i$.

Если ограничения механизма фиксированы, например - $C_i = 1$, то $y_1^* = 5 + \sqrt{10}$, $y_2^* = 6 + \sqrt{12}$, $y_3^* = 7 + \sqrt{14}$, $v_3 \le v_2 \le v_1$, то есть $k = 1$, $v_k = - \sqrt{10}$. Следовательно, $y_1^\bullet = 5$, $y_2^\bullet = 6+\sqrt{12}-\sqrt{10}$, $y_3^\bullet = 7 + \sqrt{14} - \sqrt{10}$. Если АЭ не взаимодействуют и центр использует механизм гибкого планирования для каждого из них в отдельности, то $s_1^\bullet = - \sqrt{10}$, $s_2^* = - \sqrt{12}$, $s_3^* = - \sqrt{14}$ и все АЭ выбирают действия, равные соответствующим r_i. При этом эффективность стимулирования равна $K_4 = H(r) = 18$.

Таким образом, взаимодействие АЭ дает возможность увеличить эффективность их управления до $K_5 = 18 + \sqrt{12} + \sqrt{14} - 2\sqrt{10} \ge K_4$. Прирост эффективности: $K_5 - K_4 = \sum_{i\ne k} (v_k - v_i) = \sqrt{12}+\sqrt{14}-2\sqrt{10}$.

Отметим, что в соответствии с приведенными выше общими положениями при фиксированных $\{ C_i \}$ мы правильно выбрали диктатора, назначив им первый АЭ ($k=1$). Однако, если при фиксированном бюджетном ограничении $\sum_{i=1}^{3} C_i = 3$ имеется возможность варьировать ограничения механизмов стимулирования различных АЭ, то эффективность стимулирования может быть повышена.

Выберем $C_1 = 0$, $C_2 = 18/13$, $C_3 = 21/13$ (второму и третьему АЭ - пропорционально r_i, так как они входят в целевую функцию центра симметрично - см. пример 1.6). Тогда $v_1 = 0$, $v_2 = -(12\ 18 / 13)^{1/2}$, $v_3 = -(14\ 21 / 13)^{1/2}$, то есть упорядочение $\{ v_i \}$ сохранится. Выбираемые АЭ действия: $y_1^* = r_1$, $y_2^* = y_2^+$, $y_3^* = y_3^+$, то есть центр за счет первого АЭ (в рамках ГБ) свел задачу к детерминированной, увеличив эффективность до $K_5' = 18+\sqrt{12}+\sqrt{14}$. Легко видеть, что в рамках введенных предположений оценка K_5' неулучшаема. о

Таким образом, мы показали, что в активной системе с наблюдаемым состоянием природы механизм гибкого планирования имеет эффективность не меньшую, чем соответствующий детерминированный. Для систем с ненаблюдаемым состоянием природы важной является возможность сообщения информации, иногда позволяющая повысить эффективность. Справедливы следующие оценки эффективности для различных случаев информированности:

$$K_3 = K_4 \le K_5^* \le K_5 \le K_2 = K_1, \quad K_4 \le K_6 < K_1.$$

Достаточно интересным представляется тот факт, что для многоэлементной активной системы (с независимыми АЭ) с асимметричной информированностью и сообщением информации эффективность механизма управления оказывается большей, чем в наборе одноэлементных АС с невзаимодействующими элементами, и строго меньшей, чем в соответствующей детерминированной активной системе.

Перспективным направлением дальнейших исследований данной базовой модели является допущение о возможности образования коалиций АЭ в условиях трансферабельности полезности.

ГЛАВА 3. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

В настоящей главе рассматриваются задачи анализа и синтеза механизмов стимулирования в активных системах с вероятностной внешней неопределенностью при симметричной и асимметричной информированности участников.

Опишем кратко модели М3 и М9, детальное исследование которых опускается в силу затруднительности их содержательных интерпретаций.

М3 – внутренняя вероятностная неопределенность и симметричная информированность.

В данной базовой модели: $A = A_0$, $z \equiv y$, $\Omega = \hat{\theta}$, $\hat{\Omega} = [\ d,\ D\ ]$, $p(r)$ – распределение внутреннего неопределенного параметра, $r \in \hat{\Omega}$, $I^{\cdot} = I' = \{\ \hat{в},\ p(r)\ \}$.

Целевая функция центра – $\Phi(y) = H(y)$, целевая функция активного элемента: $f\ (\ y,\ r\ ) = h\ (\ y,\ r\ ) - \chi\ (\ y\ )$. Ожидаемое значение целевой функции АЭ:

$$f(y) = E_r\ f(y,r) = \int_{\hat{\Omega}} h(y,r)\ p(r)\ dr - \chi\ (\ y\ ).$$

Множество решений игры и эффективность стимулирования определяются, соответственно, выражениями:

$$P(\chi) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \left\{ \int_{\hat{\Omega}} h(y,r)\ p(r)\ dr - \chi\ (\ y\ ) \right\}$$

и $K\ (\ \chi\ ) = \max\limits_{y \in P(\chi)} H\ (\ y\ )$.

Таким образом, задача полностью свелась к детерминированной. Для применимости известных результатов детерминированной ТАС (см., например, главу 1 настоящей работы) необходимо найти достаточные условия (ограничения на $h(y,r)$ и $p(r)$) для того, чтобы ожидаемый доход АЭ $h(y) = E_r\ h(y,r) = \int_{\hat{\Omega}} h(y,r)\ p(r)\ dr$ был квазиоднопиковой функцией.

М9 - внутренняя вероятностная неопределенность и асимметричная информированность.

В данной базовой модели: $A = A_0$, $z \equiv y$, $\Omega = \hat{\theta}$, $\hat{\Omega} = [\, d,\ D \,]$, $I = \{ \hat{в},\ \hat{r} \}$, $I' = \{ \hat{в},\ p(r) \}$.

Целевая функция центра - $\Phi(y) = H(y)$, целевая функция активного элемента: $f\ (\ y,\ \hat{r}\ ) = h\ (\ y,\ \hat{r}\ ) - \chi\ (\ y\ )$.

Множество решений игры и эффективность стимулирования определяются, соответственно, выражениями:

$$P\ (\ \chi,\ \hat{r}\ ) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A}\ \{\ h\ (\ y,\ \hat{r}\ ) - \chi\ (\ y\ )\ \}$$

и $K\ (\ \chi\ ) = \int\limits_{\hat{\Omega}} [\ \max\limits_{y \in P(\chi, \hat{r})} H(y)\ ]\ p(\hat{r})\ d\hat{r}$.

Для данной модели задача синтеза оптимальной функции стимулирования (поиска допустимой системы стимулирования, максимизирующей эффективность $K(\chi)$) может быть сведена к задаче оптимального управления [25].

3.1. Механизмы стимулирования в активных системах с внешней вероятностной неопределенностью и симметричной информированностью

В настоящем разделе рассматриваются задачи анализа и синтеза механизмов стимулирования в активной системе, в которой результат деятельности АЭ зависит как от его действий, так и от внешнего случайного фактора - состояния природы, относительно вероятностного распределения которого участники АС имеют симметричную информацию (М6).

Базовая модель вероятностной активной системы и методы учета вероятностной неопределенности

Рассмотрим активную систему, состоящую из центра и одного активного элемента. Пусть целевые функции центра и АЭ имеют вид: $\Phi\ (\ z\ ) = H\ (z)$, $f(\ x,\ z\ ) = h\ (z) - \chi\ (\ x,\ z\ )$, соответственно, то есть исследуем задачу стимулирования первого рода.

Результат деятельности активного элемента z, принадлежащий множеству возможных результатов A_0, зависит как от действий АЭ – y, выбираемых из множества возможных действий A, так и от случайных и неопределенных факторов – состояния природы e, принадлежащего допустимому множеству Ω.

В данной базовой модели (Мб): $\hat{\Omega} = \hat{r}$, $I = I' = \{ p(e), \ \hat{r} \}$, где $p(e)$ – вероятностное распределение.

Существуют два метода учета вероятностной неопределенности. Первый (модель I) заключается в том, что участникам АС известно вероятностное распределение $p(e)$, $e \in \Omega$ состояния природы и "технологическая" зависимость $z = z(y, в)$. Подставляя эту зависимость в свои целевые функции, зависящие от результата деятельности и усредняя по известному распределению, участники АС сводят к задачу к детерминированной:

$$(3.1.1)\quad f(x,y) = \int_{\Omega} [\ h(\ z(y,\theta)\ ) - \chi(\ x,\ z(y,\theta)\ )\ ]\ p(\theta)\ d\theta.$$

$$(3.1.2)\quad \Phi(x,y) = \int_{\Omega} H(\ z(y,\theta)\ )\ p(\theta)\ d\theta.$$

Второй способ учета вероятностной неопределенности (модель II), в котором состояние природы явно не присутствует, заключается в задании параметрического семейства распределений $p(z,y)$ результатов деятельности $z \in A_0$ при различных действиях $y \in A$. Усреднение по этому распределению также сводит задачу к детерминированной:

$$(3.1.3)\quad f(x,y) = \int_{A_0} [\ h(\ z\ ) - \chi(\ x,\ z\ )\ ]\ p(\ z,\ y\ )\ dz,$$

$$(3.1.4)\quad \Phi(x,y) = \int_{A_0} H(\ z\ )\ p(\ z,\ y\ )\ dz.$$

Центр имеет возможность оказывать влияние на действия АЭ путем выбора функции штрафов $\chi(x,z)$ из заданного множества допустимых функций штрафов M и управляющего параметра – плана x из множества X. Задача управления в активной системе заключается в выборе $\Sigma^* = \{ x^*, \chi^*(\cdot) \}$, удовлетворяющего условию

$$(3.1.5)\quad K(\Sigma^*) = \max_{\Sigma} K(\Sigma),$$

где $K(\Sigma) = \max\limits_{y \in P(x,\chi)} H(y)$, где $P(x,\chi) = \operatorname{Arg} \max\limits_{y \in A} f(x,y)$ – множество решений игры. То есть центр выбором механизма стимулирования стремится максимизировать ожидаемое значение своей целевой функции при условии, что выбираемое элементом действие максимизирует его ожидаемую полезность при заданной системе стимулирования. Если отказаться от гипотезы благожелательности, то центр будет ориентироваться на гарантированное значение эффективности стимулирования $K^{\Gamma}(\Sigma) = \min\limits_{y \in P(x,\chi)} H(y)$. Как будет видно из дальнейшего изложения, ε - оптимальные решения в обоих случаях одинаковы.

Исследуем взаимосвязь между моделью I и моделью II. Пусть множества допустимых действий и результатов конечны:

$$A = \{ y_1, y_2, \dots, y_n \}.$$

Пусть в может с вероятностью $p_j \geq 0$ принимать одно из конечного числа значений $в_j$, $j = \overline{1,m}$ ($\sum\limits_{j=1}^{m} p_j = 1$). Обозначим:

$$z_{ij} = z (y_i, в_j); \; \chi_{ij} = \chi (y_i, z_j); \; p_{ij} = p (y_i, z_j);$$

$$p_j = p (в_j); \; h_{ij} = h (y_i, z_j); \; H_{ij} = H (y_i, z_j).$$

Будем считать, что множество M задается системой неравенств:

$$d_{ij} \leq \chi_{ij} \leq D_{ij} \; , \; i,j = \overline{1,n}$$

а число возможных результатов деятельности АЭ, в общем случае, равно $|A^{0}_{I}| = m\,n$.

Дискретная задача стимулирования первого рода имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m} H_{i^*j}\, p_j \to \max_{\chi \in M},$$

где i^* определяется из условия: $\forall\, i \in I$

$$\sum_{j=1}^{m} [\, h_{i^*j} - \chi_{i^*j} \,]\, p_j \geq \sum_{j=1}^{m} [\, h_{ij} - \chi_{ij} \,]\, p_j .$$

При этом необходимо учитывать, что один и тот же результат z может быть получен при различных внутренних планах, то есть возможно

(3.1.6) $z_{ij} = z_{kl}$ при $i \neq k$, $j \neq l$.

Если выполнено (3.1.6), то χ_{ij} должно совпадать с χ_{kl}.

При числе попарно различных возможных результатов, совпадающем с числом допустимых действий, возможен другой способ решения дискретной задачи стимулирования. Обозначим:

$$(3.1.7)\quad \sum_{j=1}^{m} h_{ij}\, p_j = h_i,\quad \sum_{j=1}^{m} H_{ij}\, p_j = H_i,\quad \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij}\, p_j = \chi_i,\ i\in I.$$

Тогда задача стимулирования примет вид:

$$(3.1.8)\quad \begin{cases} H_{i^*} \to \max\limits_{\{\chi_i\}\in M'}, \\ i^* = \arg\max\limits_{i\in I} \{h_i - \chi_i\}, \end{cases}$$

где M' - образ множества M при отображении (3.1.7).

Пусть мы знаем решение χ_i^*, $i \in I$ задачи (3.1.8). Для нахождения χ_{ij} воспользуемся системой уравнений:

$$(3.1.9)\quad \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij}\, p_j = \chi_i^*,\ i \in I.$$

Рассмотрим дискретный аналог задачи стимулирования первого рода в рамках модели II. Стохастическая матрица переходов $P = \| p_{ij} \|_{i,j=\overline{1,n}}$ задает вероятности реализации результата z_j при действии y_i ($\forall\ i \in I\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$). В этом случае целевые функции центра и АЭ имеют вид:

$$(3.1.10)\quad \Phi_i = H_i = \sum_{j=1}^{n} H_j\, p_{ij},$$

$$(3.1.11)\quad f_i = \sum_{j=1}^{n} \{ h_j - \chi_j \}\, p_{ij},\ i \in I.$$

где χ_j - искомая функция стимулирования. Обозначим:

$$(3.1.12)\quad \sum_{j=1}^{m} h_j p_{ij} = h_i,\quad \sum_{j=1}^{m} H_j p_{ij} = H_i,\quad \sum_{j=1}^{m} \chi_j p_{ij} = \chi_i,\ i\in I.$$

В результате имеем: $\Phi_{i^*} \to \max\limits_{\{\chi_i\}\in M'}$, при $i^* = \arg\max\limits_{i\in I} f_i$, где M' - образ множества M при отображении (3.1.12).

Получив решение $\{\chi_i^*\}$, необходимо "восстановить" с помощью (3.1.12) решение исходной задачи. Имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$(3.1.13)\quad \sum_{j=1}^{m} \chi_j\, p_{ij} = \chi_i^*,\ i \in I.$$

относительно n чисел χ_j. Достаточное условие существовния решения задачи (3.1.13) дается следующим утверждением.

Лемма 3.1.1. Если $p_{ii} > \frac{1}{2}$, $i=\overline{1,n}$ то матрица P невырождена.➜

Содержательно условие леммы 3:1.1 означает, что результат деятельности АЭ совпадет с его действием с вероятностью большей, чем 1/2. При одномодальных распределениях это предположение довольно естественно, так как если АЭ знает распределение вероятностей P, то при наличии регулярного "сноса" (т.е.если $\exists$ j: $p_{ij} > 1/2$, $p_{ij} > p_{ii}$) он скорректирует свои действия.

Увеличение вероятности перехода из одной точки (действия АЭ) в какую-либо другую точку (или увеличение дисперсии для одномодальной функции распределения) приводит к уменьшению определителя стохастической матрицы. При этом задача может стать некорректной. В частности, это проявляется в появлении отрицательных решений при машинной реализации предложенного алгоритма. Аналогичные явления происходят при многомодальных функциях распределения и регулярном "сносе".

Для соответствующей непрерывной задачи переход к детерминированной модели осуществляется заменой:

$$\int_{A_0} \chi(z)\, p(z,y)\, dz = s(y), \qquad (3.1.14)$$

где $s(y) \in M'$ (M' - образ множества M при отображении (3.1.14)).

После получения решения $s^*(y)$ соответствующей детерминированной задачи необходимо произвести "восстановление" искомой функции стимулирования $\chi(z)$. (3.1.14) - линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Как известно, при его численном решении с ростом числа точек разбиения, согласно IV теореме Фредгольма, собственные числа интегрального оператора "сгущаются" к нулю (его спектр не отделен от нуля), то есть в каждом конкретном случае требуется дополнительное исследование корректности задачи, а при реализации алгоритмов - применение методов регуляризации.

Пример 3.1.1. Пусть $A = \{ y_1, y_2 \}$, $A_0 = \{ z_1, z_2 \}$, p=3/4, q=2/3, $c_1 = 1$, $c_2 = 5/4$, $H_1=1$, $H_2=4$, $P = \begin{Vmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{Vmatrix}$.

Тогда $H_1 = 7/4$, $H_2 = 3$. Исходя из

$$M = \{ (\sigma_1,\sigma_2) \mid 0 \le \sigma_1,\sigma_2 \le 1 \},$$

получим: $M' = \{ (s_1,s_2) \mid 0 \le 8s_1 - 3s_2 \le 5,\ 0 \le 9s_2 - 4s_1 \le 1 \}$.

Определяем: $s_1^* = 0.15$, $s_2^* = 0.4$, следовательно: $\sigma_1^* = 0$, $\sigma_2^* = 0.6$. ∘

Для решения задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в вероятностной активной системе может также быть использован следующий подход. Из детерминированной теории известно (см. главу 1), что в классе согласованных механизмов оптимален механизм с максимальной степенью централизации. Воспользуемся этим результатом и выделим из M класс M_* функций стимулирования, математическое ожидание которых является согласованной функцией стимулирования. Воспользуемся для этого достаточным условием согласованности - неравенством треугольника [12]:

$$(3.1.15)\quad M_* = \{ \tilde{\chi}(z) \in M \mid \int_{A_0} \chi(x,z)\, p(z,y)\, dz \le$$

$$\le \int_{A_0} \chi(x,z)\, p(z,t)\, dz + \int_{A_0} \chi(t,z)\, p(z,y)\, dz \quad \forall\ x,\ y,\ t \in A \ \}.$$

Оптимальной будет функция стимулирования $\chi^* \in M_*$ удовлетворяющая условию:

$$(3.1.16)\quad E\, \chi^*(x,y) \ge \max_{t \in A} \{ E\, \tilde{\chi}(t,y) - E\, \tilde{\chi}(t,x) \} \quad \forall\ \tilde{\chi} \in M,$$

где E - оператор математического ожидания. Легко видеть, что задача (3.1.16) эффективно решается в случае параметрического задания класса M. Получение же решения этим методом в общем случае сталкивается со значительными (как теоретическими - не всегда удается свести задачу к известной оптимизационной, так и практическими - высокая вычислительная сложность) трудностями.

Вернемся к рассмотрению связи между моделями с усреднением по реализациям внешних возмущений (модель первого типа) и по результатам деятельности активного элемента (модель второго типа). Будем считать, что число возможных действий АЭ в обеих моделях конечно и одинаково. В рамках введенных предположений связь между ними устанавливается следующим утверждением.

Утверждение 3.1.2. Для любой дискретной модели первого типа можно построить эквивалентную модель второго типа и наоборот. →

Пример 3.1.2. Пусть $A = \{ y_1, y_2, y_3 \}$, $\Omega = \{ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \}$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$, $z_{11} = z_{12} = z_{21}$, $z_{13} = z_{22} = z_{31}$, $z_{23} = z_{32} = z_{33}$, то есть существуют три попарно различных результата деятельности АЭ. Заметим, что матрица $\| z_{ij} \|$ упорядочивалась по прямым, параллельным второй главной диагонали.

В соответствии с утверждением 3.1.2: $p_{11}= 2/3$, $p_{12}= 1/3$, $p_{13}= 0$, $p_{21}= p_{22}= p_{13}= 1/3$, $p_{31}= 0$, $p_{33}= 2/3$, $p_{32}=1/3$. о

Для решения вероятностных задач стимулирования может быть использовано обобщение модели стимулирования в детерминированных АС с представлением интересов АЭ на языке сравнительных предпочтений.

Пусть A - конечное множество возможных действий АЭ, $A_0 = A$ - множество возможных результатов его деятельности. Предположим, что и центру, и АЭ на момент принятия решений о выборе стратегий известны следующие матрицы: $\Sigma = \| \sigma_{ij} \|$ - сравнительное предпочтение АЭ на множестве A_0 (см. главу 1) и $P = \| p_{ij} \|$ - стохастическая матрица, элементы которой - вероятности реализации результатов деятельности при определенных действиях. Определим сравнительное предпочтение, индуцируемое Σ и распределением P, следующим образом:

$$(3.1.17)\quad \tilde{\sigma}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, \sigma_{jk}.$$

Можно считать, что матрица $\tilde{\Sigma} = \| \tilde{\sigma}_{ij} \|$ отражает предпочтения АЭ (соответствующие ожидаемой полезности от последствий принимаемых решений) на множестве возможных действий. Наилучшее для АЭ действие при этом определяется как и в главе 1. Обозначим $Q = (q_1, q_2, \dots , q_n)$ - вектор весов элементов множества A_0, Q - вектор весов элементов множества A. Получаем, что вектор Q удовлетворяет матричному уравнению

$$(3.1.18)\quad Q = P\, Q.$$

Так как в вероятностных АС центр стимулирует АЭ за результаты его деятельности (изменяет матрицу Σ), а элемент выбирает действия, сравнивая их по $\tilde{\Sigma}$, то задача стимулирования в вероятностной активной системе может быть сформулирована как задача поиска системы стимулирования (последовательности операций типа ($j \to i$) над матрицей Σ), которая побудила бы АЭ выбрать по Σ наиболее выгодное для центра действие. Иными словами, прямая задача стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования, такой, чтобы порождаемый ей вектор весов действий побуждал АЭ выбрать наиболее благоприятное для центра действие. Обратная задача стимулирования решается еще проще: определяется соответствующий вектор Q. Затем ищется вектор $Q^{'}$, отличающийся от Q лишь тем, что вес вершины, которую надо реализовать максимален. Далее, из матричного уравнения

$$(3.1.19)\quad Q' = P^{-1} \quad Q'$$

находится вектор Q', задающий систему стимулирования, реализующую требуемое действие.

Вероятностная задача стимулирования первого рода

Сделаем ряд предположений относительно целевых функций и допустимых множеств, которых будем придерживаться, если не будет оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения материала настоящего раздела (функции, зависящие от результата деятельности оличаются от аналогичных функций, зависящих от действий АЭ, значком "~").

А.3.1.1. $A = A_0 = X$ - отрезки $\mathbb{R}^1$.

А.3.1.2. $\tilde{H}(z) \in SP$; $\tilde{h}(z) \in SP$, положительна, непрерывно дифференцируема, строго вогнута и финитна ($\mathrm{Supp}\ \tilde{h} = A_0$).

А.3.1.2'. $\tilde{H}(z) \in SP'$; $\tilde{h}(z) \in SP'$.

А.3.1.3. $\tilde{\chi}(x,z)$ удовлетворяет А.1.2.

А.3.1.4. $F(z, y) = \hat{F}(z - y)$ интегральная функция распределения; соответствующая ей плотность распределения вероятности $p(z,y)$ существует, дважды непрерывно дифференцируема почти всюду, унимодальна (максимум в точке y) и $E\ z = y$.

А.3.1.4'. Интегральная функция распределения $F(z, y)$ не возрастает по y; соответствующая ей плотность распределения вероятности $p(z,y)$ существует, унимодальна (максимум в точке y) и $E\ z = y$.

В дальнейшем нам потребуются следующие обозначения:

$$H(y)=\int_{A_0} \bar{H}(z)p(z,y)dz, \quad h(y)=\int_{A_0} \tilde{h}(z)p(z,y)dz, \quad \varkappa(y)=\int_{A_0} \tilde{\varkappa}(z)p(z,y)dz$$

$$y_1 = \arg\max_{y\in A} H(y); \quad y_2 = \arg\max_{y\in A} h(y);$$

$$h_2 = h(y_2); \quad y_3 = \max\{\, y \in A \mid h(y) \ge h_2 - C \,\};$$

$$y_4 = \max\{\, y \in A \mid |\tfrac{\partial h(y)}{\partial y}| \le C\, \hat{p}(0) \,\};$$

$$x_0 = \min\{\, y_3,\ y_4 \,\}; \quad y_5(x) = \min\{\, y \in \operatorname{Arg}\max_{t\in[y_2,x)} f(x,t) \,\}$$

$$y^*(x) = \min\{\, y \in \operatorname{Arg}\max_{t \ge x} f(x,t) \,\}$$

$$\dot{y}(x) = \max\{\, y \in A \mid \frac{h(y_5)+h(y^*)}{2} < h(y) \,\}.$$

Будем считать, что $y_1 > y_2$. Случай $y_1 < y_2$ описывается аналогично.

Существование и единственность величин y_i $(i=\overline{1,4})$ следует из свойств функций $H(\cdot)$ и $h(\cdot)$, устанавливаемых следующей леммой.

Лемма 3.1.3. Пусть выполнено А.3.1.2(2') и А.3.1.4(4'), тогда $H(\cdot)$ и $h(\cdot)$ удовлетворяют А.3.1.2(2').

Лемма 3.1.3 доказывается применением известной теоремы анализа о дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра, и заменой переменных $t = z - y$ [17,26].

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства функции распределения, устанавливаемые следующей леммой.

Лемма 3.1.4. Если $F(z,y)$ удовлетворяет А.3.1.4, то она не возрастает по y. ➜

Отметим, что свойство функции распределения, установленное в лемме 3.1.4 имеет простую содержательную интерпретацию: для достижения бо́льших результатов требуется предпринимать большие действия, а результат деятельности АЭ может быть представлен как $z = y + \xi$, где ξ – случайная величина с нулевым средним, имеющая распределение $F_\xi(\cdot)$.

Из детерминированной теории (см. следствие 1.7 и [12]) известен следующий результат: на множестве согласованных функций стимулирования оптимален механизм с максимальной степенью централизации. Поэтому представляет интерес, насколько это утверждение остается справедливым для активной системы с вероятностной неопределенностью. Рассмотрим следующие функции стимулирования C-типа:

$$\tilde{\chi}_c^+(x,z) = \begin{cases} 0; & z \le x \\ C; & z > x \end{cases}, \qquad \tilde{\chi}_c^-(x,z) = \begin{cases} 0; & z \ge x \\ C; & z < x \end{cases}.$$

Определим $M_x = \{ \chi_c^{\pm}(x,z),\ x \in X \} \subseteq M$. В дальнейшем изложении будем анализировать $\tilde{\chi}_c^- \in M_x$, для краткости используя обозначение χ_c, что соответствует случаю $y_1 > y_2$.

Лемма 3.1.5. Если выполнено А.3.1.1–А.3.1.4, то необходимым и достаточным условием того, что система стимулирования $\chi_c(x^*,z) \in M_x$ реализует действие y^*, является:

$$(3.1.20)\quad F(x^*,y_s(x^*)) - F(x^*,y^*) \ge \frac{1}{C}\,[\, h(y_s(x^*)) - h(y^*) \,]. \bullet$$

Лемма 3.1.6. Для $\tilde{\chi}_c(x,z)$ справедливо:

$$(3.1.21)\quad \chi_c(\, x,\ y\,) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_c(x\ ,z)\ p(z,y)\ dz = C\ F(x,y).$$

Доказательство очевидно.

Для решения задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в классе M_x достаточно решить следующую параметрическую оптимизационную задачу: для каждого $x \in [y_2, x_g]$ определить величину: $y^*(x) = \arg\max\limits_{y \in A} f(x,y)$, а затем выбрать x^*, соответствующее максимальному $y^*(x) \le y_1$.

Лемма 3.1.7. Если выполнено А.3.1.1–А.3.1.4, то достаточным условием оптимальности пары $(x^*, y^*(x^*))$ является выполнение:

$$(3.1.22)\quad h(y^*(x^*)) - CF(x^*,y^*(x^*)) = h(y_s(x^*)) - CF(x^*,y_s(x^*)). \bullet$$

Итак, мы привели условия оптимальности определенных систем стимулирования (планов) в классе M_x. Теперь можно определить классы активных систем, в которых оптимальны функции стимулирования из M_x.

Утверждение 3.1.8. Если выполнены предположения А.3.1.1 – А.3.1.4, и следующее условие:

$$(3.1.23)\ F(x^*,y_5) - F(x^*,\hat{y}) \geq 2\ F\ \left(\frac{x_0-\hat{y}}{2}\right) - 1,$$

а распределение $p(\cdot)$ симметрично, то функция штрафов $\chi_c(x,z)$ оптимальна в классе M. ➔

Величина x_0, введенная выше, является вероятностным аналогом максимальной правой границы множества согласованных планов. Интуитивно ясно, что множество достижимости в вероятностном случае не должно быть шире, чем в детерминированном.

Утверждение 3.1.9. Если выполнены предположения А.3.1.1 – А.3.1.4, и $y^* = x_0$, то $\chi_c \in M_x$ оптимальна в M. ➔

Несколько более частный, чем описанный в утверждении 3.1.9, но достаточно важный для возможных приложений, результат по характеризации классов оптимальности систем стимулирования из M_x дается следующим утверждением.

Утверждение 3.1.10. Если выполнены предположения А.3.1.1–А.3.1.4, $p(\cdot)$ – финитное в Δ – окрестности точки у распределение, $y_3 \geq y_2 + 2a$ и $\forall\ y \in [y_3-2\Delta, y_3]$ выполнено:

$$(3.1.24)\ p(z,y) \geq \frac{1}{c}\left|\frac{\partial h\ (y)}{\partial y}\right|,$$

то функция штрафов $\chi_1 \in M_x$ оптимальна в M и $x^* = y_3 - \Delta$. ➔

Приведенный выше результат имеет следующую качественную содержательную интерпретацию. Если известно, что результат деятельности АЭ лежит в а-окрестности его действия и вероятность того, что результат окажется на границе этого интервала достаточно (см. условия утверждения 3.1.10) велика, то следует использовать систему стимулирования из M_x. Частным случаем утверждений 3.1.9–3.1.10 является первый результат по исследованию рассматриваемого класса вероятностных АС, полученный в ТАС: система стимулирования С-типа оптимальна в АС с равномерным распределением [7].

Отметим, что если имеет место $y_1 = y_2$ (случай, не рассмотренный выше), т.е. интересы центра и АЭ полностью совпадают, то очевидно, оптимальна функция штрафов тождественно равная нулю.

Приведенные выше утверждения являются достаточными условиями оптимальности скачкообразных решений и, по-видимому, не охватывают все возможные случаи. Известные на сегодняшний день необходимые условия оптимальности, фактически совпадающие с определением оптимальности решения, в настоящей работе не приводятся в силу их громоздкости и неконструктивности.

Полученные результаты позволяют рассматривать величины y_2, y_5, y^*, x_0 как некоторые характеристики эффективности используемых механизмов. В соответствии с утверждением 3.1.9, если $y^* = x_0$, то система стимулирования χ_c оптимальна. Таким образом, величина x_0 может рассмативаться как абсолютная оценка сверху максимального действия АЭ, которое может быть реализовано в данной вероятностной активной системе. Отметим, что это именно абсолютная оценка, так как она не всегда достижима оптимальной системой стимулирования. Тем не менее, величина ($x_0 - y^*$) может рассматриваться как степень отклонения от оптимума. Следовательно, при монотоно возрастающей по действиям АЭ целевой функции центра естественно ввести следующий критерий эффективности механизма стимулирования из класса M_*:

$$(3.1.25)\quad K_*(\chi) = \frac{y^* - y_2}{x_0 - y_2}.$$

Очевидно $0 \le K_* \le 1$, причем $K_* = 1$ тогда и только тогда, когда $y^* = x_0$; $K_* = 0$ при $y^* = y_2$ по определению.

Для иллюстрации возможностей синтеза оптимальных функций стимулирования с использованием приведенных выше результатов рассмотрим следующий пример:

<u>Пример</u> <u>3.1.3.</u> Пусть функция дохода АЭ имеет вид:

$$(3.1.26)\quad h(y) = -\frac{1}{512}y^2 + 1.25\,y,$$

а интегральная функция распределения:

$$(3.1.27)\quad F(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\alpha(y-x).$$

Тогда, приравнивая нулю производную по y целевой функции АЭ, получим кубическое уравнение, которое при определенном значении параметров задачи имеет три корня: $y_5(x) \le y_6(x) \le y^*(x)$, где $y_6(x)$ соответствует минимуму целевой функции. Оптимальные значения величин (вычисленные с точностью ± 1 при $\alpha = 0.05$ и $C = 50$): $y^* = 442$; $x^* = 426$; $y_5 = 329$; $K_* = 0.75$.

При использованных значениях параметров системы вычисленные величины не удовлетворяют ни одному из достаточнх условий оптимальности, то есть об оптимальности "скачка" сказать ничего нельзя.

Если же $C = 50$, $\alpha = 0.0218$, то условия утверждения 3.1.8 выполнены и $y^* = 409$. При $C = 14$, $\alpha = 0.05$ выполнены условия утверждения 3.1.9, то есть $y^* = x_0$ и $K_* = 1$. о

Свойства оптимального решения вероятностной задачи стимулирования первого рода

Простая структура скачкообразного решения, а также приведенные выше содержательные интерпретации подсказывают, что это решение должно обладать рядом естественных свойств, присущих реальным системам стимулирования, используемым на практике. Ниже устанавливаются и обосновываются некоторые такие свойства.

Лемма 3.1.11. Если выполнены предположения А.3.1.1-А.3.1.4, то существуют окрестности точек x^* и y^*, в которых x и y являются непрерывно дифференцируемыми функциями параметра C.

Лемма 3.1.11 доказывается рассмотрением свойств якобиана системы уравнений, входящих в условия оптимальности [17,26].

Свойства зависимости $y = y(C)$ представляют интерес как с содержательной точки зрения, так и для анализа многоэлементных вероятностных активных систем. Поэтому приведем результат, характеризующий полезные свойства решения.

Лемма 3.1.12. Если выполнены предположения А.3.1.1-А.3.1.4, то величина максимального реализуемого действия АЗ является неубывающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра C. $\bullet$

Результат леммы 3.1.12 имеет простую содержательную интерпретацию, соответствующую практическому опыту, а именно - с ростом фонда заработной платы (ФЗП) максимальное реализуемое действие АЗ не уменьшается, а множество достижимости не сужается.

Непрерывная зависимость максимального действия, реализуемого системой стимулирования из класса M_*, от ограничений механизма стимулирования позволяет решить обратную задачу стимулирования первого рода: определить минимальную величину C, необходимую для того, чтобы реализовать заданное действие.

Структура множества реализуемых действий S для исследуемой вероятностной активной системы устанавливается следующей леммой.

Лемма 3.1.13. Если выполонены предположения А.3.1.1-А.3.1.4, то существует $\tilde{x}_{max} \in A$, $\tilde{x}_{max} > 0$: $S = [\ 0,\ \tilde{x}_{max}\ ]$. →

Следствие. Если $y_1 \le y^*$, то система стимулирования из $\mathfrak{M}_x$ оптимальна в $\mathfrak{M}$.

Это утверждение, вытекающее из связности множества S, представляется достаточно естественным: если интересы центра и АЭ не сильно рассогласованы, то скачкообразная система стимулирования оптимальна.

Предположения А.3.1.1-А.3.1.4 являются более сильными, чем А.3.1.1'-А.3.1.4'. Приведенные выше результаты, в частности - достаточные условия оптимальности систем стимулирования С-типа, в основном, использовали более сильную версию этих предположений. При дальнейшем изложении материала этого раздела мы попытаемся ослабить предположения, используя их "штрихованную" версию.

Рассмотрим задачи стимулирования второго рода в вероятностной АС, в которой интересы АЗ представлены в виде "стимулирование минус затраты", а ожидаемая полезность АЭ имеет вид:

$$(3.1.28)\quad f(\ y,\ \sigma(\cdot)\ ) = \int_{A_0} \sigma(z)\ p(z,y)\ dz - c(y).$$

Предположим, что функция затрат АЭ удовлетворяет предположению А.1.4. Тогда минимальные затраты на стимулирование (затраты центра на реализацию произвольного действия $x \in A$) для детерминированной задачи (FB-случай) равны $C_{FB}(x) = c(x)$, $x \in S$, а для $x \notin S$ положим $C_{FB}(x) = +\infty$. Очевидно, что если C достаточно велико ($y^*(C) \ge A^*$), то реализуемо любое допустимое действие. Если центр не использует стимулирования, то АЭ выбирает LCA, которое в рассматриваемой модели равно нулю.

Если наложено дополнительное ограничение $f(x) \ge \bar{U}$ (RWC - Reservation Wage Constraint - ограничение пособия по безработице, гарантирующее АЭ как минимум некоторый фиксированный уровень полезности), то правая граница множества согласованных планов определяется $y^* = \max\ \{\ x \in A \mid c(x) \le C - \bar{U}\ \}$. Понятно, что если целевая функция центра монотонно возрастает по действию АЭ, то в равновесии ограничение RWC существенно.

Обозначим $C_{SB}(x)$ затраты на стимулирование – затраты на реализацию действия $x \in S$, равные

$$(3.1.29)\ C_{SB}(x) = \int_{A_0} \sigma(z)\ p(z,x)\ dz.$$

Справедлива следующая

<u>Лемма</u> <u>3.1.14.</u> Если выполнены предположения А.3.1.1'-А.3.1.4', то для любой системы стимулирования из класса M и для любого $x \in P(\sigma)$ $C_{SB}(x) \geq C_{FB}(x)$. Более того, если, вдобавок, функция стимулирования не равна тождественно нулю и имеет место

$$(3.1.30)\ \forall\ y \in A,\ z \in A_0\quad p(z,y) > 0,$$

то $C_{SB}(x) > C_{FB}(x)$. ➜

Лемма 3.1.14, фактически, утверждает, что если выполнено условие (3.1.30), то затраты центра на реализацию любого действия в вероятностной модели строго больше, чем в детерминированной.

Решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в активной системе с простым активным элементом

Выше был приведен ряд результатов, описывающих классы активных систем, в которых система стимулирования из M_x оптимальна. Эти классы достаточно широки, поэтому возникает вопрос о том не оптимальны ли "скачкообразные" функции стимулирования в любых вероятностных активных системах? Как показывает расматриваемая ниже модель, это не так.

Рассмотрим задачу синтеза оптимальной системы стимулирования в активной системе с простым активным элементом. Простым АЭ [19] называется АЭ с следующей функцией распределения:

$$(3.1.31)\ F(z,y) = \begin{cases} F(z), & z \leq y \\ 1, & z > y \end{cases}.$$

Пусть введенные выше предположения о функциях дохода допустимых множествах остаются в силе и выполнено

А.3.1.5. $A = A_0 = \mathbb{R}^+_1$, $F(0) = 0$, $F(z) < 1\ \forall\ z < A^+$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.1.15. Если выполнены предположения А.3.1.1-А.3.1.3 и А.1.3.5, то функция стимулирования К-типа:

$$(3.1.32)\ \tilde{\chi}_к(z) = \begin{cases} C,\ z \le y_2 \\ \bar{h}(z) - \bar{h}(\tilde{y}_3),\ z \in [y_2, \tilde{y}_3], \\ 0,\ z \ge y_3 \end{cases}$$

где $\tilde{y}_3$ таково, что выполнено

$$(3.1.33)\quad \bar{h}(\tilde{y}_3) = \bar{h}(y_2) - C,\ \tilde{y}_3 \ge y_2,$$

оптимальна в классе **M** для простого АЭ. ➜

Таким образом, утверждение 3.1.15 дает решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования для АС с простым АЭ. При доказательстве утверждения 3.1.15 установлено, что компенсаторная система стимулирования реализует действие $\tilde{y}_3$ и никакая система стимулирования из класса **M** не может реализовать большего действия. Представляет интерес, оптимальна ли в системе с простым АЭ функция стимулирования из $M_к$, т.е. существует ли такой план x, что $y^*(x) = \tilde{y}_3$. Ответ на этот вопрос дает

Утверждение 3.1.16. Если выполнены предположения А.3.1.1-А.1.3.5, то функция стимулирования из класса $M_к$ не оптимальна в активной системе с простым АЭ. ➜

Итак, мы показали, что в АС с простым АЭ системы стимулирования К-типа оптимальны, а С-типа - нет. Для полноты картины осталось выяснить оптимальны ли системы стимулирования К-типа в базовой модели. Поэтому покажем, что системы стимулирования К-типа не оптимальны в активных системах типа модели теории контрактов (с распределением, удовлетворяющим А.3.1.4). Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.1.4. Пусть функция дохода АЭ: $\bar{h}(z) = A\text{-}kz$, $z \in A_0 = \mathbb{R}^1$, $A = \mathbb{R}^1_+$, $P(\cdot)$ - равномерное распределение с носителем 2Δ, а ограничение механизма стимулирования: $C = 2\ k\ \Delta$.

Тогда ожидаемая функция дохода АЭ равна $h(y) = A - k\ y$, а ожидаемая полезность АЭ при использовании оптимальной системы стимулирования С-типа $\tilde{\chi}_c(x^*, z)$, где $x^* = \Delta$, равна:

$$f(y) = \begin{cases} A - C,\ y \in [0, 2\Delta] \\ A - k\ y,\ y \ge 2\Delta \end{cases}.$$

Содержательно, в настоящем примере при использовании оптимальной функции стимулирования С-типа ожидаемая полезность АЭ выглядит так, как если бы в модели простого АЭ использовались компенсаторные штрафы.

В силу гипотезы благожелательности АЭ предпочтет выбрать действие $y_c^* = 2\Delta$ (y_c^* - максимальное действие АЭ, реализуемое при данных ограничениях механизма стимулирования).

Теперь рассмотрим компенсаторную систему штрафов, удовлетворяющую тем же ограничениям механизма стимулирования при той же функции дохода АЭ. Целевая функция АЭ имеет вид

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} A - C, & z \le 2\Delta \\ A - k\,z, & z \ge 2\Delta \end{cases}$$

Легко видеть, что множество максимумов ожидаемой полезности АЭ при этом равно $[0,\Delta]$. В силу гипотезы благожелательности, АЭ выберет действие $y_k^* = \Delta$.

Таким образом, $y_k^* < y_c^*$, то есть эффективность компенсаторной системы стимулирования строго ниже, чем эффективность скачкообразной системы стимулирования. Значит для АС типа ТК $K(\chi_k) \le K(\chi_c)$ (см. также леммы, приводимые ниже), прячем для некоторых вероятностных АС этого типа $K(\chi_k) < K(\chi_c)$. о

Проведенный анализ подсказывает, что достаточные условия оптимальности систем стимулирования С-типа в базовой модели являются слишком сильными. Поэтому докажем оптимальность систем стимулирования С-типа при следующем предположении:

А.3.1.6. Плотность распределения удовлетворяет следующим условиям: $\forall\ y_1,\ y_2 \in A$: $y_1 < y_2$

$\forall\ z \le y_1 \quad p(z, y_1) > p(z, y_2)$,

$\forall\ z \ge y_2 \quad p(z, y_1) < p(z, y_2)$,

причем $\mathrm{Supp}\ P = A_0$.

Нам потребуются два "технических" утверждения, детерминированными аналогами которых являются леммы 1.5 и 1.6.

Лемма 3.1.17. Пусть выполнены А.3.1.1'-А.3.1.4', А.3.1.6 и некоторая система стимулирования $\chi_1 \in M$ реализует действие $\hat{y}$ и

$\chi_1(z) \equiv 0$ при $z > \hat{y}$. Тогда система стимулирования

$$(3.1.34)\ \chi_2(z) = \begin{cases} \chi_1(z), & z < \hat{y} \\ 0, & z \geq \hat{y} \end{cases}$$

реализует действие, не меньшее, чем $\hat{y}$. ➧

Таким образом, система стимулирования χ_2 реализует не меньшее действие, чем χ_1, а, значит, в силу введенных предположений, имеет не меньшую эффективность, то есть

$$(3.1.35)\ K(\chi_2) \geq K(\chi_1).$$

Отметим, во-первых, что лемма 3.1.17 не исключает возможности реализации системой стимулирования χ_2 действия строго большего, чем $\hat{y}$, и, во вторых, что при $\chi_1(z) \equiv 0$ лемма 3.1.17 вырождается.

<u>Лемма 3.1.18.</u> Пусть выполнены А.3.1.1'–А.3.1.4', А.3.1.6. Тогда для любого $x \in X$ если $P(\chi_c(x,z)) \ni y^*(x) \geq x$, то любая функция штрафов $\chi \in M$, не равная тождественно χ_c и удовлетворяющая

$$(3.1.36)\ \chi(z) = \begin{cases} \leq \chi_c(x,z), & z < x \\ 0, & z \geq x \end{cases},$$

не может реализовать действия, строго большего, чем $y^*(x)$. ➧

<u>Утверждение 3.1.19.</u> Если выполнены А.3.1.1'–А.3.1.4' и А.3.1.6, то для любой функции стимулирования из класса **M** найдется система стимулирования С-типа не меньшей эффективности. ➧

Отметим, что квазиоднопиковость функции дохода АЭ оказалась существенной только для связности множества действий, реализуемых скачкообразными системами стимулирования. Условие А.3.1.6 оказалось чрезвычайно существенным и неоднократно использовалось при доказательствах. Казалось бы, это условие достаточно безобидно и ему просто придать содержательную интерпретацию (монотонность взаимосвязи действия и результата деятельности и т.д.). На самом деле, это было бы так, если бы в А.3.1.6 фигурировали нестрогие неравенства. Наличие строгих неравенств эквивалентно однопиковости плотностей, более того, отметим, что из А.3.1.6 следует, что носитель распределения при любом действии АЭ совпадает со всем множеством A_0 допустимых результатов деятельности.

Легко видеть, что если ослабить А.3.1.6 (отказаться от строгости неравенств), то результаты лемм 3.1.17 и 3.1.18, а следовательно и утверждения 3.1.19, не будут иметь места. В то же время, полученный результат позволяет исследовать эффективность систем стимулирования С-типа в модели теории контрактов. Поясним последнее утверждение. Пусть в активной системе $\mathfrak{M}$ функция дохода АЭ однопикова, распределения финитны и удовлетворяют предположениям А.3.1.3 - однопиковые функции при $z \in \mathrm{Supp}\ p(\cdot, y)$. Фиксируем $\delta \geq 0$ и определим следующие величины:

(3.1.37) $q^{\pm}_{\delta}(y) = \max(\min)\{ z \in A_0 \mid p(z, y) \geq \delta \}$.

Очевидно, $\forall\, y \in A$ $q^-_{\delta}(y) \leq q^+_{\delta}(y)$, $q^{\pm}_{\delta}(y)$ - не убывает по y.

Предположим, что $-\infty < A^-_0 < A^+_0 < +\infty$. Определим

$$\tilde{p}_{\delta}(z, y) = \begin{cases} (z - A^-_0)\dfrac{\delta}{(q^-_{\delta}(y) - A^-_0)}, & z \in [A^-_0, q^-_{\delta}(y)] \\ p(z,y), & z \in [q^-_{\delta}(y), q^+_{\delta}(y)]. \\ (A^+_0 - z)\dfrac{\delta}{(A^+_0 - q^+_{\delta}(y))}, & z \in [q^+_{\delta}(y), A^+_0] \end{cases}$$

Рассмотрим АС $\mathfrak{M}_{\delta}$, отличающуюся от АС $\mathfrak{M}$ лишь распределением вероятностей $\tilde{p}_{\delta}(z,y)$ вместо $p(z,y)$, полученным следующим образом (приведенное выше преобразование плотности распределения нарушает условие нормировки):

(3.1.38) $\tilde{p}_{\delta}(z,y) \rightarrow \tilde{p}_{\delta}(z,y) \Big/ \int_{A_0} \tilde{p}_{\delta}(z,y)\, dz$, $\quad z \in A_0$, $y \in A$.

Распределение вероятностей в АС $\mathfrak{M}_{\delta}$ при любом $\delta > 0$ удовлетворяет А.3.1.6. Значит применимы полученные выше результаты. Причем, в предельном случае $\delta = 0$ $\tilde{p}_0(z,y) \equiv p(z,y)$. Обозначим $K(\mathfrak{M})$ - максимальную эффективность стимулирования в исходной АС, $K(\mathfrak{M}_{\delta})$ максимальную эффективность стимулирования в АС $\mathfrak{M}_{\delta}$. Очевидно, $K(\mathfrak{M}_{\delta=0}) = K(\mathfrak{M})$. Более того, $K(\mathfrak{M}_{\delta})$ является непрерывной невозрастающей функцией параметра δ, так как для любого $\varepsilon \geq 0$ из условий реализуемости можно получить оценку величины δ, гарантированно обеспечивающей выполнение

(3.1.39) $K(\mathfrak{M}_{\delta}) \geq K(\mathfrak{M}) - \varepsilon$.

Отметим, что приведенная выше "модификация" плотностей распределения, производимая для удовлетворения требований предположения А.3.1.6, не является единственно возможной – например, величина δ может зависеть от действия АЭ, причем таким образом, чтобы при изменении $p(z,y)$ и $y \in A$ условие нормировки выполнялось автоматически, и т.д. Таким образом, можно выдвинуть гипотезу о том, что в рамках предположений А.3.1.1'– А.3.1.4' системы стимулирования С-типа оптимальны.

Задачи стимулирования второго рода в вероятностных АС (задача теории контрактов)

Рассмотрим модель вероятностной АС, в которой целевая функция АЭ представляет собой разность между стимулированием и затратами (все введенные выше предположения остаются в силе). Скачкообразная система стимулирования имеет вид:

$$(3.1.40)\quad \sigma_c (x, z) = \begin{cases} 0, & z < x \\ C, & z \ge x \end{cases} .$$

Максимальное действие, реализуемое системами стимулирования С-типа, как и выше, обозначим y_+^*. Ожидаемые затраты на стимулирование по реализации действия $y \in [0, y_+^*]$ (при $y \notin [0, y_+^*]$ $\mathfrak{C}_{sB} (y) = + \infty$) равны: $\mathfrak{C}_{ss}(y) = C [1 - F (x, y)]$.

Легко видеть, что если функция затрат линейна, то точка $y_s(x)$ совпадает с LCA, тождествено равным нулю. При этом достаточно подставить: $C^k(1) = \frac{c_k}{F_{11} - F_{k1}}$, а не проверять выполнение условий реализуемости. То же самое справедливо и в случае финитных распределений при $y_k \ge 2\Delta$.

Для модели простого активного элемента можно предложить аналогичный способ решения задачи стимулирования второго рода в классе компенсаторных систем стимулирования.

Обозначим ожидаемые затраты на стимулирование по реализации действия $y \in [z^-, z^+]$:

$$\mathfrak{C}_{sB} (y) = \int_0^y \sigma (z) p (z) dz + [1 - F (y)] \sigma(y).$$

Очевидно, что для того, чтобы реализовать действие y нет смысла устанавливать положительное стимулирование при $z > y$. Действительно, система стимулирования $\sigma_k(y, z) = \begin{cases} c(z), & z \le y \\ 0, & z > y \end{cases}$,

где $c(\cdot)$ - функция затрат, зависящая от результата деятельности АЭ, реализует действие y и является "компенсаторной". Подставляя эту функцию штрафов в выражение для $\mathbf{c}_{SB}(\cdot)$, для решения задачи стимулирования остается выполнить второй этап двушагового алгоритма - найти y^*:

$$y^* = \arg\max_{y \in [z^-, z^*]} \{ H(y) - \int_0^y c(z)\, p(z)\, dz + [1 - F(y)]\, c(y) \}.$$

Вероятностная неопределенность и эффективность стимулирования

Следующее утверждение устанавливает соотношение между максимальными множествами реализуемых действий в вероятностной (S) и соответствующей ей детерминированной (Q^*) активных системах при представлении целевой функции АЭ в виде "стимулировние минус затраты".

<u>Утверждение</u> <u>3.1.20.</u> Если выполнены А.3.1.1'-А.3.1.4' и А.3.1.6, то $S \subseteq Q^*$. Если, вдобавок, имеет место (3.1.30), то S - собственное подмножество Q^*. ➜

Итак мы исследовали соотношение между эффективностями стимулирования в вероятностных и детерминированных активных системах. Перейдем к изучению влияния величины вероятностной неопределенности на эффективность механизмов стимулирования в активных системах.

Основной характеристикой неопределенности в рассматриваемых моделях является семейство вероятностных распределений $F(z,y)$, $y \in A$. Будем рассматривать энтропию

$$(3.1.41)\quad H(y) = - \int_{A_0} p(z,y) \ln p(z,y)\, dz, \quad y \in A$$

как меру неопределенности результата деятельности АЭ при выборе им действия $y \in A$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1.21. Если выполнено А.3.1.4, то неопределенность результатов деятельности АЭ одинакова для любого допустимого действия.

Результат леммы 3.1.21 доказывается рассмотрением неопределенностей при выборе двух произвольных действий и подстановкой в (3.1.41) $p(z,y) = \hat{p}(z-y)$. В общем случае, неопределенности результатов деятельности могут быть различны и зависеть от выбираемых активным элементом действий (см., например, модель простого АЭ).

Рассмотрим две вероятностные активные системы, различающиеся только интегральными функциями распределения $F_1(z,y)$ и $F_2(z,y)$, удовлетворяющими А.3.1.4'. Доопределим интегральные функции распределения, непрерывно продолжив их с $\Delta_0 \times A$ на $\mathbb{R}^1 \times A$, следующим образом: $\forall\ y \in A$ если $z \le 0$, то $F(z,y) = 0$, если $z \ge A^+$, то $F(z,y) = 1$. Будем говорить, что первая АС характеризуется большей неопределенностью и обозначать $F_1 \triangleright F_2$, если выполнено следующее условие на интегральные функции распределения:

$$(3.1.42)\ \forall\ y\in\Delta,\ \forall\ \Delta\ge 0\ \mathrm{Prob}\ \{\ z \in U_\Delta(y)\ \}_1 \le \mathrm{Prob}\ \{\ z \in U_\Delta(y)\ \}_2,$$

или, что тоже самое:

$$(3.1.43)\ \forall\ y\in A,\ \forall\ \Delta\ge 0\ F_1(y+\Delta,y)-F_1(y-\Delta,y) \le F_2(y+\Delta,y)-F_2(y-\Delta,y).$$

Содержательно, если для любой Δ-окрестности действия АЭ результат его деятельности оказывается в этой окрестности в первой АС с большей вероятностью, чем во второй АС, то считается, что первая АС характеризуется меньшей неопределенностью.

Для симметричных распределений, удовлетворяющих А.3.1.4, (3.1.43) эквивалентно

$$(3.1.44)\ \forall\ \Delta \ge 0 \quad \hat{F}_1(\Delta) \ge \hat{F}_2(\Delta).$$

Для несимметричных распределений достаточным для $F_2 \triangleright F_1$ является одновременное выполнение двух следующих условий: $\forall\ y \in A$

$$(3.1.45)\ \forall\ z \ge y \quad F_1(z,y) \ge F_2(z,y),$$

$$(3.1.46)\ \forall\ z \le y \quad F_1(z,y) \le F_2(z,y).$$

Очевидно, что если первая активная система является детерминированной, а вторая - вероятностной, то $\forall\ F_2 \quad F_2 \triangleright F_1$.

Исследуем, насколько критерий сравнения неопределенностей (3.1.44) согласован с энтропийным определением неопределенности результатов деятельности активного элемента (3.1.41). Достаточность согласованности устанавливается следущей леммой.

Лемма 3.1.22. Пусть выполнено А.1.4 и (3.1.45) - (3.1.46). Тогда

$$\forall y \in A \quad H_1(y) \le H_2(y). \Rightarrow$$

Пусть S_1 и S_2 - два максимальных множества реализуемых действий, соответствующие двум вероятностным активным системам, различающимся, единственно, функциями распределения F_1 и F_2. Исследуем, какую роль играет величина вероятностной неопределенности для эффективности механизма стимулирования в активной системе. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.1.23. Если выполнены А.3.1.1'-А.3.1.4', $\sigma(\cdot)$ - неубывающая функция и $F_2 \triangleright F_1$, то $S_2 \subseteq S_1$. $\Rightarrow$

Таким образом, мы показали, что в зависимости от распределения результатов деятельности АЭ оптимальными являются либо скачкообразные, либо компенсаторные системы стимулирования, причем эффективность стимулирования в вероятностных АС с внешней неопределенностью и симметричной информированностью не выше, чем в соответствующих детерминированных АС и не возрастает с ростом неопределенности.

Механизмы стимулирования с платой за информацию в вероятностных активных системах

В рассматриваемой модели неинформированность центра заключалась во-первых, в ненаблюдаемости действий АЭ, и, во-вторых, в неизвестности будущего состояния природы, причем было показано, что если действие АЭ наблюдаемо, то эффективность стимулирования совпадает с эффективностью стимулирования в соответствующей детерминированной АС. Поэтому рассмотрим механизм, в котором центр имеет возможность за дополнительную плату получить информацию о том действии, которое выбрал АЭ.

Предположим, что центр, заплатив некоторую величину ΔC (АЭ или третьей стороне), наблюдает действия АЭ. В этом случае он будет решать, фактически, детерминированную задачу синтеза оптимальной функции стимулирования, но имея в своем распоряжении фонд не C, а (C-ΔC). Ответ на вопрос выгодно ли центру платить за информацию дает следующее утверждение: если $h \in SP$ и выполнено: $y^*(C)$ не превосходит $h^{-1}(h_2 - C + \Delta C)$, где h^{-1} – функция, обратная функции дохода АЭ при $y \geq y_2$, то плата за информацию выгодна для центра.

Ожидаемое действие элемента в первом случае может быть определено из необходимых и достаточных условий оптимальности и алгоритмов нахождения решения соответствующей задачи, то есть будем считать, что зависимость $y^*(C)$ нам известна. Во втором случае решается следующая детерминированная задача:

$$\begin{cases} H(y) \to \max\limits_{\chi(y) \in M(C-AC)} \\ h(y) - \chi(y) \to \max\limits_{y \in A} , \end{cases}$$

где $M(C-\Delta C) = \{ \chi(y) : 0 \leq \chi(y) \leq C-\Delta C \}$, которая, как известно из детерминированной теории (см. главу 1), имеет решение:

$$\chi(y) = \begin{cases} C - AC, & y < y_7 \\ 0, & y \geq y_7 \end{cases},$$

где y_7 – таково, что $h_2 - C + AC = h(y_7)$ – аналог величины x_0, введенной выше в вероятностной модели. В силу принципа благожелательности АЭ выберет y_7. Очевидно, что плата за информацию выгодна для АЭ если выполнено $y_7 \geq y^*(C)$. o

Пример 3.1.5. Пусть функция затрат АЭ имеет вид: $c(y) = \alpha y^2$, P– равномерное распределение с носителем Δ. Вычисляем: $y_3 = \sqrt{C/\alpha}$, $y_4 = C / 4\alpha\Delta$, $y^* = x_0 = \min \{ y_3, y_4 \}$ (см. утверждения 3.1.9, 3.1.10). Если $2\Delta \leq x_0$, то из результатов главы 1 следует, что $K_L \leq K_c$.

Основное уравнение для соответствующего механизма с платой за информацию (при заданной зависимости $\Delta = \tilde{\Delta}(\Delta C)$) имеет вид:

$$y^*(\Delta C) = \min \{ \sqrt{(C-\Delta C)/\alpha},\ (C-\Delta C) / 4\alpha\tilde{\Delta}(\Delta C) \}. \text{ o}$$

Пример 3.1.6. Пусть $A = \mathbb{R}^+_1$, $h(y) = A - ky$, где $A, y \geq 0$ – некоторые константы. Пусть P – равномерное распределение с носителем Δ. Тогда $y_3 = C/k$, $y_4 = \max \{ 0, y_3 \text{ Sign } (C/2\Delta - k) \}$ (см. утверждения 3.1.9, 3.1.10). То есть, если $C \geq 2 \Delta k$, то реализуемо действие y_3, равное максимальному действию, реализуемому в соответствующей детерминированной модели, иначе АЭ выбирает LCA.

В данном примере задача определения оптимальной величины платы за информацию несколько вырождена: имеет смысл найти ΔC^*, такое, что условие $C \geq 2\,\Delta\,k$ выполняется как равенство (в рамках ГБ), то есть основное уравнение имеет вид: $(C-\Delta C) / 2\tilde{\Delta}(\Delta C) = k$. о

Пример 3.1.7. Пусть $h(y) = y - y^2/2r$, тогда: $y_3 = r + \sqrt{2rC}$, $y_4 = r\ (\ 1 + C\ /\ 2\Delta\ )$. Если P- равномерное в Δ-окрестности действия $\Delta Э$ распределение, где $\Delta \geq \sqrt{rC/2}$, то максимальное реализуемое действие y^* удовлетворяет следующему основному уравнению:

$$y^*(\Delta C) \leq \min\ \{\ r + \sqrt{2r(C-\Delta C)},\ r\ (\ 1 + (C-\Delta C)\ /\ 2\tilde{\Delta}(\Delta C)\ )\ \}.$$

При $\tilde{\Delta}(\Delta C) = \sqrt{rC/2}\ (\ 1 - \Delta C/C\ )$ оказывается, что оптимальная величина платы за информацию равна $\Delta C^* = 3/4\ C$. Интересно, что при этом, несмотря на уменьшение неопределенности, эффективность стимулирования такова же, как и при $\Delta C = 0$, то есть "прирост эффективности", обусловленный увеличением информированности центра, в точности компенсируется потерями фонда заработной платы на величину платы за информацию. о

Пример 3.1.8. Пусть функция $h(y)$ имеет вид $h(y) = \alpha\ (1-y^2)$, а функции $\dot{p}(t)$ и $\dot{F}(t)$ равны:

$$\dot{p}(t)=\begin{cases} \frac{3}{4\Delta}\ (1 - \frac{t^2}{\Delta^2}), & t\in[-\Delta,\Delta] \\ 0, & t\notin[-a,a] \end{cases};\quad \dot{F}(t)=\begin{cases} 0, & t \leq -\Delta \\ -\frac{t^3}{4\Delta^3} + \frac{3t}{4\Delta} + \frac{1}{2}, & t\in[-\Delta,\Delta] \\ 1, & t \geq a \end{cases}.$$

соответственно. Подставляя эти выражения в условия оптимальности и выбирая решения удовлетворяющие условиям $y^* \geq x^*$ и $y^* \leq \frac{3C}{8\alpha\Delta}$ (или, что тоже самое, $x^* \leq y_4$) получим:

$$y^* = \Delta \left\{ \left(\frac{48\alpha^2\Delta^4}{C^2} + 9 \right)^{1/2} - \frac{8\Delta^2\alpha}{C} \right\},\quad x^* = y^* - \Delta\ (1-\frac{8\alpha\Delta}{3C}y^*)^{1/2}.$$

Если, к примеру, $\alpha=1$, $\Delta=0.2$, $C=0.5$, то $y \approx 0.48$, $x \approx 0.34$.

В данном примере: $y_7 = (\ \frac{1}{\alpha}\ (\ C - \Delta C\ )\ )^{1/2}$. Для того, чтобы плата за информацию была выгодна для центра величина Δc должна удовлетворять условию: $\Delta C \leq 0.38$. Если бы центр имел в своем распоряжении $C = 0.5$, то в детерминированном случае он достигал бы: $y^*_{det} = 0.71$. о

3.2. Механизмы стимулирования в активных системах с внешней вероятностной неопределенностью и асимметричной информированностью

В настоящем разделе с использованием результатов, полученных в разделе 3.1, решаются задачи анализа и синтеза механизмов стимулирования в АС с внешней вероятностной неопределенностью и асимметричной информированностью участников (М12).

Рассмотрим модель одноэлементной вероятностной активной системы, отличающейся от исследованной в разделе 3.1 лишь тем, что на момент выбора стратегии активный элемент достоверно знает реализовавшееся значение состояния природы $\hat{\theta} \in \Omega$, а центр имеет только информацию о вероятностном распределении p(e), то есть в данной базовой модели (М12): $\hat{\Omega}=\hat{\Gamma}$, $I^{*} = \{ p(e), \hat{\Gamma} \}$, $I = \{ \hat{\Gamma}, \hat{\theta} \}$.

Примем следующий порядок функционирования и информированности игроков: центр, зная распределение вероятностей состояний природы выбирает функцию стимулирования (штрафов) из класса М и сообщает ее АЭ; реализуется состояние природы $\hat{\theta}$, которое наблюдается АЭ, но не наблюдается центром; при известной функции стимулирования и реализации внешнего параметра активный элемент выбирает из множества А действие, максимизирующее значение его целевой функции; центр наблюдает результат деятельности АЭ $z = z(y, \hat{\theta})$ (но не наблюдает выбранного АЭ действия); определяются значения целевых функций.

Множество решений игры оказывается зависящим как от используемой центром системы стимулирования, так и от состояния природы:

$$(3.2.1)\quad P(\chi, \theta) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \{ h(y) - \chi(z(y,\theta)) \}.$$

Если выполнена гипотеза благожелательности, то целевая функция центра имеет вид:

$$(3.2.2)\quad \Phi(\chi, \theta) = \max_{y \in P(\chi, e)} H(y),$$

где H (y) – функция дохода центра. Так как (3.2.2) зависит от неопределенного (с точки зрения центра) параметра, то для определения рационального выбора центра и эффективности механизма стимулирования необходимо ввести предположение об используемых им методах устранения неопределенности. Так как на момент выбора стратегии центру известно вероятностное распределение, предположим, что эффективность механизма стимулирования равна ожидаемому значению целевой функции (3.2.2), то есть:

$$(3.2.3)\quad K(\chi) = \int_{\Omega} \{ \max_{y \in P(\chi,\theta)} H(y) \} \, p(e) \, d\theta .$$

Таким образом, задача стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования, которая максимизирует эффективность (3.2.3) при условии, что АЭ выбирает действия из множества решений игры, определяемого выражением (3.2.1) при $e=\hat{\theta}$.

Относительно распределения $p(\cdot)$ будем считать, что оно удовлетворяет предположениям, введенным в разделе 3.1. Введем дополнительно следующее предположение (по сути, аналогичное предположению А.2.3.1):

А.3.2.1. $\forall\, y \in A,\ e \in \Omega$ $\quad z(y,\theta)$ – непрерывная монотонно возрастающая функция своих переменных и для любых $\tilde{z} \in A_0$ и $\tilde{\theta} \in \Omega$ найдется единственное действие $y^* = y^*(\tilde{z},\tilde{\theta}) \in A$, такое, что

$$z(y^*(\tilde{z},\tilde{\theta}),\tilde{\theta}) = \tilde{z}.$$

Предположим, что центр использует скачкообразную функцию штрафов $\chi_c(x,z)$, $x \in [z^-, z^+]$, $z \in A_0$ (из результатов предшествующего изложения следует, что назначать планы, не принадлежащие максимальному множеству реализуемых результатов деятельности АЭ $[z^-, z^+]$, не имеет смысла). Если выполнена гипотеза благожелательности, то при плане x АЭ выберет такое действие, чтобы при известном ему значении состояния природы результат деятельности совпал с планом, то есть $y^* = y^*(x, \hat{\theta})$. Эффективность стимулирования, определяемая ожидаемым значением целевой функции центра на множестве решений игры, равна:

$$(3.2.4)\quad K(x) = \int_{\Omega} H(y^*(x, e)) \; p(e) \, d\theta .$$

Таким образом, задача стимулирования свелась к задаче оптимального согласованного планирования:

$$(3.2.5)\quad K(x) \to \max_{x \in [z^-,z^+]} .$$

Однако, в общем случае, система стимулирования С-типа оказывается не оптимальной в рассматриваемом классе АС. Решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования дается следующим утверждением (см. для сравнения аналогичный результат в разделе 2.3).

Утверждение 3.2.1. Если выполнено предположение А.3.2.1 и ГБ, то компенсаторная система стимулирования оптимальна в активной системе с внешней вероятностной неопределенностью и асимметричной информированностью. ➜

Следует отметить, что система стимулирования К-типа является оптимальной не только в АС с внешней вероятностной неопределенностью, но и в АС с внешней интервальной неопределенностью и асимметричной информированностью (ср. доказательства утверждений 3.2.1 и 2.3.1 и используемые в них предположения).

Если выполнена гипотеза благожелательности, то можно считать, что при известном $\hat{\theta}$, АЗ выберет действие

$$\hat{y}(\hat{\theta}) \in \operatorname*{Arg\,max}_{y \in A} H(y),$$

где $\hat{P}(\hat{B}) = \{ y \in A \mid z(y, \hat{B}) \in [z^-, z^+] \}$. Выражение

$$(3.2.6)\quad K(\chi_k) = \int_\Omega H(\hat{y}(\theta))\, p(\theta)\, d\theta$$

дает оценку сверху (достижимую при использовании систем стимулирования К-типа) эффективности стимулирования в рассматриваемой модели активной системы. Для того, чтобы, например, скачкообразная или слабо компенсаторная системы стимулирования обеспечивали бы такую же эффективность, что и компенсаторная, требуется введения дополнительных предположений. В частности, как будет видно из дальнейшего изложения, достаточным оказывается введения следующего предположения (содержательно свидетельствующего о возможности достаточно полного согласования интересов центра и АЗ):

А.3.2.2. $\hat{P} \cap \hat{H} \neq \emptyset$, где $\hat{P} = \bigcap_{\theta \in \Omega} \hat{P}(\theta)$, $\hat{H} = \operatorname*{Arg\,max}_{y \in [z^-, z^+]} H(y)$.

Действительно, с одной стороны, для любого допустимого значения е выбор $\hat{y} \in \hat{P}$ при использовании компенсаторной системы стимулирования обеспечивает максимум целевой функции центра, а, с другой стороны, при использовании скачнообразной системы стимулирования назначение плана $x = \hat{y} \in \hat{P}$, в силу А.3.2.2, приводит к тому же значению целевой функции центра. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 3.2.2. Если выполнены предположения А.3.2.1 и А.3.2.2, то скачкообразная система стимулирования оптимальна в активной системе с внешней вероятностной неопределенностью и асимметричной информированностью.

При предельном переходе к детерминированной активной системе: $\Omega \equiv \hat{\theta}$, $z \equiv y$ результаты утверждений 3.2.1 и 3.2.2 переходят в соответствующие результаты главы 1.

Перейдем теперь к исследованию роли неопределенности и ее влияния на эффективность стимулирования в рассматриваемой модели АС. Рассмотрим две активные системы с внешней вероятностной неопределенностью и асимметричной информированностью, отличающиеся лишь распределениями вероятностей состояния природы, причем предположим, как и в разделе 3.1, что математическое ожидание состояния природы таково, что $E\, z \equiv y$. Обозначим, $\tilde{\theta} \in \Omega$ – такое значение внешнего фактора, при котором результат деятельности АЭ совпадает с его действием ($\forall\, y \in A\ z\,(y,\tilde{\theta}) \equiv y$), $p_1(\theta)$ и $p_2(\theta)$ – распределения вероятностей, соответственно, в первой и второй АС и, предположив, что $F_1(\tilde{\theta}) = F_2(\tilde{\theta})$ и непрерывно продолжив интегральные функции распределения с Ω на всю числовую прямую как это делалось в разделе 3.1, используем следующий критерий сравнения вероятностных неопределенностей: $F_2 \triangleright F_1$, если

$$(3.2.7)\quad F_1(\ \tilde{\theta} + \Delta\ ) \geq F_2(\ \tilde{\theta} + \Delta\ ),\qquad F_1(\ \tilde{\theta} - \Delta\ ) \leq F_2(\ \tilde{\theta} - \Delta\ ).$$

Сравним максимальную эффективность стимулирования в рассматриваемой вероятностной АС с внешней неопределенностью и асимметричной информированностью с максимальной эффективностью стимулирования в соответствующей детерминированной АС (в которой центр, как и АЭ, на момент выбора стратегии достоверно знает реализовавшееся значение состояния природы).

Утверждение 3.2.3.

а) Если выполнено предположение А.3.2.2 и ГБ, то эффективность стимулирования в рассматриваемой вероятностной АС равна эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной АС.

б) Если выполнено предположение А.3.2.1 и ГБ, то эффективность стимулирования в рассматриваемой вероятностной АС может оказаться как выше, так и ниже, чем в соответствующей детерминированной АС. ➜

Напомним, что все предшествующее изложение материала настоящего раздела велось в рамках гипотезы благожелательного отношения АЭ к центру. Если отказаться от этой гипотезы и использовать при определении эффективности стимулирования максимальный гарантированный результат по множеству решений игры, то результат, аналогичный утверждению 3.2.3 будет более определенным: если гипотеза благожелательности не выполнена, то в рассматриваемой вероятностной АС эффективность стимулирования не выше, чем в соответствующей детерминированной и снижается с ростом неопределенности. Доказательство этого факта следует доказательству утверждений 2.3.2-2.3.3 и опускается. Содержательно, в силу (3.2.7), с ростом неопределенности множества, по которым берется минимум в МГР, не сужаются.

Так как в рассматриваемой модели участники активной системы информированы асимметрично, в ряде случаев целесообразно использование механимзов с сообщением информации активным элементом центру. В одноэлементной АС даже в случае выгодности для АЭ манипулирования информацией, для любого механизма найдется эквивалентный прямой механизм (механизм открытого управления) [10,14,68]. При решении соответствующих задач стимулирования в многоэлементных системах могут быть использованы результаты анализа манипулируемости и эффективности механизмов с сообщением информации, приведенные в разделе 2.4. В динамических активных системах с вероятностной неопределенностью и асимметричной информированностью, если механим функционирования допускает сообщение информации, то имеет смысл использование адаптационных механизмов, позволяющих центру накапливать со временам информацию о неопределенном параметре (см. более подробно, например, обзор [44], [60] и др.).

<u>Пример</u> <u>3.2.1.</u> Пусть $h(z) = z - z^2/2r$, $z = y + e$, $C=1$, $r=9/2$, $e \in \Omega = [-1,1]$, $\hat{\theta}=1/2$, $P(e)$ - равномерное распределение, $H(y) = y$.

Тогда $z^- = 3/2$, $z^* = 15/2$, $y^*(\tilde{z},\tilde{\theta}) = \tilde{z} - \tilde{\theta}$, $\hat{P}(\hat{\theta}) = [1,7]$.

Максимум целевой функции центра при фиксиованном $\hat{\theta}$ достигается при следующем выборе АЭ: $\hat{y}(\hat{\theta}) = 15/2 - \hat{\theta}$. Из (3.2.6) определяем, что $K(\chi_k) = 15/2$. Отметим, во-первых, что "симметричность" неопределенности привела к тому, что в рассматриваемом примере оэидаемая эффективность стимулирования в точности равна эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной модели. Во-вторых, в данном примере $\hat{P} = [5/2, 13/2]$, $\hat{A} = 15/2$, то есть $\hat{P} \cap \hat{A} = \varnothing$. Если бы целевая функция центра достигала максимума на отрезке $\hat{P}$, то существовала бы оптимальная система стимулирования C-типа. Полученная оценка ождаемой эффективности оказалась завышенной – если $\hat{B} = 1/2$, то $\tilde{y} = 7$ и $K(\chi_k) = 7 < 15/2$. o

Таким образом, в АС с внешней вероятностной неопределенностью и асимметричной информированностью участников оптимальной является система стимулирования K-типа, гарантированная эффективность которой не выше, чем в соответствующей детерминированной АС и не возрастает с ростом неопределенности.

ГЛАВА 4. МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С НЕЧЕТКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

В настоящей главе рассматриваются задачи анализа и синтеза механизмов стимулирования в активных системах с нечеткой внешней и внутренней неопределенностью при симметричной и асимметричной информированности участников.

4.1. Механизмы стимулирования в активных системах с внутренней нечеткой неопределенностью и симметричной информированностью

В настоящем разделе рассматриваются механизмы стимулирования в активных системах с симметричной информированностью (М4) участников о существующей внутренней неопределенности – либо относительно (нечетких) отношений предпочтения АЭ, либо относительно его (нечеткой) функции дохода. В данной базовой модели: $\Omega = \hat{\theta}$, $z \equiv y$, $A_0 \equiv A$, $I = I' = \{ \hat{B}, \underset{\sim}{I} \}$, где $\underset{\sim}{I}$ – нечеткая информация о предпочтениях (нечетком отношении предпочтения или нечеткой функции дохода) АЭ.

Нечеткие отношения предпочтения активных элементов и определение рационального выбора

Предположим, что центру известно бинарное нечеткое отношение предпочтения (НОП) $\underset{\sim}{R}_h$ АЭ на множестве допустимых действий А. Это НОП определяется функцией принадлежности $\mu_{\underset{\sim}{R}_h} : A \times A \to [0,1]$. Содержательно $\mu_{\underset{\sim}{R}_h}(x,y)$ означает степень с которой x и y находятся в отношении $\underset{\sim}{R}_h$.

Так как для НОП не существует однозначных и общепринятых условий рефлексивности, транзитивности, линейности и т.д. (как для "обычных" отношений предпочтения [58,86]), то приведем ряд определений, которые будут использоваться в дальнейшем изложении:

$\forall\ x,\ y,\ z \in A$

<u>Рефлексивность:</u> P1. $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x) = 1$; P2. $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x) = 0.5$.

<u>Антирефлексивность</u> (для рефлексивности P1): $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x) = 0$.

Симметричность: $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$.

Антисимметричность: $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) > 0 \rightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x) = 0$.

Линейность (полнота):

Л1. $\max [\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)\ ] > \lambda$, где $\lambda \in [\ 0,\ 1\ )$.

Если $\max [\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y),\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)\ ] = 1$, то НОП называется сильно линейным, при $\lambda = 0$ - слабо линейным.

Л2. $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$.

Дополнение (отрицание) НОП $\underset{\sim}{R}'$ и обратное НОП $\underset{\sim}{R}^{-1}$ определяются "обычным" образом: $\mu_{\underset{\sim}{R}'}(x,y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$ и $\mu_{\underset{\sim}{R}^{-1}}(x,y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$.

Композиция отношений (произведение):

- максминное: $\mu_{\underset{\sim}{R1}\cdot\underset{\sim}{R2}}(x,y) = \sup\limits_{z\in A} \min [\ \mu_{\underset{\sim}{R1}}(x,z),\ \mu_{\underset{\sim}{R2}}(z,y)\ ]$.

- минмаксное: $\mu_{\underset{\sim}{R1}\cdot\underset{\sim}{R2}}(x,y) = \inf\limits_{z\in A} \max [\ \mu_{\underset{\sim}{R1}}(x,z),\ \mu_{\underset{\sim}{R2}}(z,y)\ ]$.

- максмультипликативное: $\mu_{\underset{\sim}{R1}\cdot\underset{\sim}{R2}}(x,y)=\sup\limits_{z\in A} (\mu_{\underset{\sim}{R1}}(x,z)\mu_{\underset{\sim}{R2}}(z,y))$.

Транзитивность: $\underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{R} \le \underset{\sim}{R}$. Соответственно трем типам композиций НОП, определяются максминная транзитивность (Т1), минмаксная транзитивность (Т2) и максмультипликативная транзитивность (Т3). Очевидно Т2 $\rightarrow$ Т1 $\rightarrow$ Т3. Нам потребуется еще один вид транзитивности:

Т4. Аддитивная транзитивность:

$$[\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) - 0.5\ ] = [\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z) - 0.5\ ] + [\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(z,y) - 0.5\ ].$$

Если не оговорено особо, ниже будет считаться, что выполнены Р1, Л1 и Т1.

Следуя подходу, предложенному С.А.Орловским в [55], определим, что мы будем понимать под множеством выбора при заданном НОП $\underset{\sim}{R}$. Нечеткое отношение строгого предпочтения (НОСП), соответствующее НОП $\underset{\sim}{R}$, задается функцией принадлежности:

$$\mu_{\underset{\sim}{P}}(x,y) = \max [\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) - \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x),\ 0\ ].$$

Функция принадлежности нечеткого подмножества недоминируемых альтернатив имеет вид:

(4.1.1) $\mu_{\underset{\sim}{R}}^{НД}(x) = 1 - \sup\limits_{y\in A} \mu_{\underset{\sim}{P}}(y,x)$.

Величину $\mu^{НД}_{\tilde{R}}(x)$ можно рассматривать как степень недоминируемости альтернативы $x \in A$, поэтому рациональным будем считать выбор элементом действий, имеющих по возможности бо́льшую степень принадлежности нечеткому множеству недоминируемых альтернатив, то есть действий, для которых значение функции $\mu^{НД}_{\tilde{R}}(x)$ по возможности наиболее близко к

$$\sup_{x \in A} \mu^{НД}_{\tilde{R}}(x) = 1 - \inf_{x \in A} \sup_{y \in A} \mu_{\tilde{P}}(y,x).$$

Альтернативы из множества

$$(4.1.2)\ A^{НД}(\tilde{R}) = \{ x \in A \mid \mu^{НД}_{\tilde{R}}(x) = \sup_{z \in A} \mu^{НД}_{\tilde{R}}(z) \}$$

называются максимально недоминируемыми альтернативами множества A при НОП $\tilde{R}$ [55].

Альтернативы, степень недоминируемости которых равна единице получили название четко недоминируемых альтернатив (ЧНД). Множество четко недоминируемых альтернатив (множество Орловского) определяется следующим образом:

$$(4.1.3)\ A^{ЧНД}(\tilde{R}) = \{ x \in A \mid \mu^{НД}_{\tilde{R}}(x) = 1 \},$$

причем в случае сильно линейного НОП все ЧНД альтернативы четко эквивалентны с точки зрения АЭ. Необходимым и достаточным условием того, что $x_o \in A^{ЧНД}$ является то, что пара (x_o, x_o) является седловой точкой (максимум по x, минимум по y) функции: $\mu_{\tilde{R}}(x,y) - \mu_{\tilde{R}}(y,x)$; в частном случае - если множество A конечно, а НОП $\tilde{R}$ транзитивно (T1), то множество Орловского непусто [55].

Будем считать, что выбор активного элемента при НОП $\tilde{R}$ на множестве допустимых действий A определяется следующим образом:

$$(4.1.4)\ C(\tilde{R}) = A^{НД}(\tilde{R}).$$

Множество $\{ x \in A \mid \mu^{НД}_{\tilde{R}}(x) \geq \alpha \}$, где $\alpha \in (0,1]$, при фиксрованном НОП $\tilde{R}$, будем называть множеством α-недоминируемых действий и обозначать $A^{НД}(\alpha)$.

Сформулируем теперь в общем виде задачу стимулирования в активной системе с нечеткой информацией о предпочтениях активных элементов.

Будем считать, что допустимое множество A - четкое. Центру известно рефлексивное и транзитивное (тип рефлексивности и транзитивности конкретизируется ниже при рассмотрении частных случаев) НОП $\underset{\sim}{R}_h$ активного элемента на множестве А без учета стимулирования. Предпочтения центра заданы четко и определяются его целевой функцией. Выбором системы стимулирования центр имеет возможность влиять на предпочтения АЭ, которые, с учетом стимулирования, мы обозначим $\underset{\sim}{R}_\varepsilon(\chi)$.

Задача центра заключается в поиске системы стимулирования, побуждающей элемент выбрать наиболее выгодное для него действие из множества реализуемых действий. Более конкретно, если выполнена гипотеза благожелательности (при заданной системе стимулирования АЭ выбирает из множества максимально недоминируемых альтернатив $A^{НД}(\underset{\sim}{R})$ действие, наиболее выгодное для центра), то эффективность механизма стимулирования $\chi \in M$ равна $K(\chi) = \max\limits_{y \in C(\underset{\sim}{R}_\varepsilon(\chi))} \Phi(y)$, где $C(\underset{\sim}{R}_\varepsilon(\chi))$ определяется в соответствии с (4.1.4). Если гипотеза благожелательности не выполнена, то, как и в детерминированном случае, центр рассчитывает на гарантированный результат по множеству решений игры. Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

(4.1.5) $K(\chi) \to \max\limits_{\chi \in M}$.

Отметим, что, формально, детерминированная (см. главу 1) и нечеткая задачи отличаются лишь способом определения множества выбора. При этом, если НОП является четким, то множество максимально недоминируемых альтернатив (множество) Орловского есть не что иное, как множество решений игры.

Синтез оптимальной функции стимулирования в активной системе с нечеткими предпочтениями элементов

В отличие от детерминированной задачи, при решении которой в рамках предположений А.1.1-А.1.4 достаточно найти множество реализуемых действий, в задаче стимулирования в АС с нечеткой неопределенностью, по крайней мере в том виде, в котором она сформулирована выше, пока отсутствует явный вид функции дохода, функции штрафов и ограничений на $\underset{\sim}{R}_\varepsilon$, порождаемых условием $\chi \in M$.

Существуют несколько путей конкретизации задачи (4.1.5). Первый путь предполагает введение предположения о том, что центр использует "классические" функции штрафов χ: $A \to [0,C]$. При этом необходимо на основании сравнения "силы" предпочтений $\underset{\sim}{R}_h$ и χ конструктивно определить $\underset{\sim}{R}_r$ и множество допустимых преобразований $\underset{\sim}{R}_h \xrightarrow{\chi} \underset{\sim}{R}_r$, что, как будет видно из дальнейшего изложения, потребует достаточно жестких ограничений на допустимые множества и НОП. Второй путь связан с введением нового понятия штрафов, более соответствующего с нашей точки зрения рассматриваемой модели.

Пусть для НОП АЭ выполнено одно из следующих условий

(4.1.6) Р2, Л2, Т4

или

(4.1.7) Р1, сильная линейность и

$$\{ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z) = 1,\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(z,y) = 1 \} \to \{ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = 1 \text{ и } \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z) + \mu_{\underset{\sim}{R}}(z,x) - 1 \}.$$

Определим класс U функций полезности АЭ:

(4.1.8) $\forall\ x,y \in A \quad | u(x) - u(y) | \le 1.$

Условие (4.1.6) имеет место тогда и только тогда, когда существует единственная с точностью до аддитивной константы функция полезности из класса U, такая, что выполнено [94]:

(4.1.9) $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \frac{1}{2} [\ u(x) - u(y) + 1\ ].$

Условие (4.1.7) имеет место тогда и только тогда, когда существует единственная с точностью до аддитивной константы функция полезности из класса U, такая, что выполнено [94]:

(4.1.10) $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = \min [\ u(x) - u(y) + 1,\ 1\ ].$

Эти выводы позволяют рассмотреть два класса нечетких активных систем, определив для них конструктивные методы решения задачи стимулирования.

Пусть известно НОП АЭ $\underset{\sim}{R}_h$. Если $\underset{\sim}{R}_h$ удовлетворяет (4.1.6), то фиксируем произвольное $x_0 \in A$ и определим

(4.1.11) $u_h(y) = 2\ \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(y,x_0).$

Легко видеть, что $\forall\ x_o \in A$ функция $u_h(y)$ единственна с точностью до аддитивной константы в силу Т4 [66,94].

Если $\underset{\sim}{R}_h$ удовлетворяет (4.1.7), то определим

$$(4.1.12)\quad \bar{\mu}_{\underset{\sim}{R}_h}(x,y) = \begin{cases} \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(x,y) \ /\ 2, \text{ если } \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(x,y) < 1, \\ \frac{1}{2}\ [\ 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(y,x)\ ], \text{ если } \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(x,y)=1, \end{cases}$$

после чего функция полезности строится по $\bar{\mu}_{\underset{\sim}{R}_h}(x,y)$ в соответствии с (4.1.11). Целевая функция АЭ может быть записана в виде

$$(4.1.13)\quad \bar{f}(y) = u_h(y) - \bar{\chi}(y),$$

где $\bar{\chi}(y) = \chi(y)\ /\ h$, $h = [\ \max\limits_{y \in A} h(y) - \min\limits_{y \in A} h(y)\ ]$. При фиксированном $\chi \in M$ (4.1.13) порождает в соответствии с (4.1.9)-(4.1.10) НОП $\underset{\sim}{R}_f$. Множество выбора АЭ при известном НОП определено выше.

Назовем НОП $\underset{\sim}{R}_h$ квазиоднопиковым, если:

1) $\exists\ r^-,\ r^+ \in A$, такие, что $\forall\ r \in [\ r^-,\ r^+\ ]$

$$\forall\ y \in A \qquad \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(\ r,\ y\ ) = \sup_{z \in A} \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(\ z,\ y\ );$$

2) $\forall\ r \in [\ r^-,\ r^+\ ]$ имеет место

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_h}(r,\ r) = \begin{cases} 1, \text{ если НОП } \underset{\sim}{R}_h \text{ удовлетворяет P1}, \\ 1/2, \text{ если НОП } \underset{\sim}{R}_h \text{ удовлетворяет P2}; \end{cases}$$

3) $\forall\ y_1,\ y_2 \in A \quad y_1 \le y_2 \le r^- \quad \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(y_1,y_2) \le \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(y_2,y_1)$.

4) $\forall\ y_1,\ y_2 \in A \quad r_1^+ \le y_2 \le y_1 \quad \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(y_1,y_2) \le \mu_{\underset{\sim}{R}_h}(y_2,y_1)$.

А.4.1.1. НОП АЭ является квазиоднопиковым.

Квазиоднопиковое НОП в соответствии с (4.1.11), (4.1.12) при $x_o = r$ порождает квазиоднопиковую функцию $u_h(y)$. Из результатов главы 1 и (4.1.11) следует справедливость следующего утверждения.

<u>Утверждение</u> <u>4.1.1.</u> Если выполнено (4.1.6) или (4.1.7) и А.4.1.1, то $\forall\ \chi \in M \ \ \exists\ \tilde{\chi} \in M_x$, такое, что $K(\chi) = K(\tilde{\chi})$.

Значит при квазиоднопиковых НОП АЭ можно без потери эффективности ограничиться рассмотрением систем стимулирования С-типа.

Отметим, что при предельном переходе от рассматриваемой модели к детерминированной, описанный выше алгоритм не переходит в алгоритм решения детерминированной задачи. Для этого факта можно привести следующее объяснение. Во-первых, при четком отношении предпочтения на множестве A в соответствующей матрице R_h не заложена информация о "сравнительной силе предпочтений" в отсутствии стимулирования, а эта информация необходима для решения задачи стимулирования. При НОП можно условно считать, что информация о "силе предпочтения" заложена в матрице $\underset{\sim}{R}_h$. Во-вторых, к сожалению, четкое отношение предпочтения на множестве A не удовлетворяет условиям (4.1.6), (4.1.7).

Второй путь решения задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в активных системах с НОП АЭ связан с введением нового определения допустимых штрафов и обобщением подходов, описанных в конце главы 1 настоящей работы. Мы ограничимся качественным обсуждением [45].

Рассмотрим в качестве примера АС со следующими ограничениями: пусть множество допустимых действий конечно и пусть известна матрица R_Δ, элементы которой принимают неотрицательные значения. Ограничения механизма стимулирования определим следующим образом: если $\underset{\sim}{R}_h$ матрица, соответствующая НОП АЭ $\underset{\sim}{R}_h$ в отсутствии стимулирования, $\underset{\sim}{R}_r$ – матрица, соответствующая НОП АЭ $\underset{\sim}{R}_r$ с учетом стимулирования со стороны центра, то все элементы матрицы $\underset{\sim}{R}_r$ должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$(4.1.14)\quad r^r_{ij} \in [\ \max\{\, r^h_{ij} - r^\Delta_{ij},\ 0\,\},\ \min\{\, r^h_{ij} + r^\Delta_{ij},\ 1\}\ ].$$

Возможен и другой подход: определим n-вершинный полный граф $\underset{\sim}{G}_\sigma$, вершины которого соответсвуют действиям АЭ, а веса дуг определяются НОП, то есть вес дуги (i,j) равен $\mu_{ij} = \mu_{\underset{\sim}{R}}(y_i, y_j)$.

Легко видеть, что для того, чтобы действие y_i был недоминируемым необходимо и достаточно, чтобы:

$$(4.1.15)\quad \mu_{ij} \geq 1/2,\quad \forall\ j = \overline{1,n}.$$

Последнее утверждение позволяет предложить методы решения задачи стимулирования в активной системе с НОП элементов. Предположим, что центру известны: НОП $||\mu_{ij}||$ активного элемента в отсутствии стимулирования и зависимости $\mu_{ij}(\sigma_{ij})$ $(\mu_{ij}(0) = \mu_{ij})$ функций принадлежности от стимулирования со стороны центра или задана матрица $\Sigma = \| \sigma_{ij} \|$, элементы которой соответствуют затратам на единичное изменение соответствующей функции принадлежности. Обозначая y_k – действие, выбираемое АЭ в отсутствии стимулирования, находим затраты на реализацию действия $y_l \in A$: $\tilde{\sigma}_{kl} = \min \{ \sigma \mid \mu_{kl}(\sigma) = 1/2 \}$, или: $\tilde{\sigma}_{kl} = \sigma_{kl} (0.5 - \mu_{jl})$.

Проведенный выше анализ модели с нечетким бинарным отношением предпочтения АЭ на множестве допустимых действий свидетельствует, что в этом случае несмотря на перспективность интерпретации стимулирования как управления сравнительными предпочтениями при решении задачи стимулирования исследователь сталкивается со значительными как методологическими, так и вычислительными трудностями. Альтернативой, в некотором смысле, модели с бинарным НОП АЭ является рассматриваемая ниже модель нечеткой АС, в которой центру известна нечеткая функция дохода активного элемента.

Задача стимулирования в активной системе с нечеткой функцией дохода активного элемента

Пусть функция дохода АЭ нечеткая, то есть $\underset{\sim}{h}: A \times \mathbb{R}^1 \to [0,1]$. Величина $\underset{\sim}{h}(y,u)$ при фиксированном действии $y \in A$ может интерпретироваться как функция принадлежности нечеткого дохода $u \in \mathbb{R}^1$ от выбора действия y. Если следовать общей постановке задачи стимулирования, то переход к рассматриваемой модели АС с нечеткой функцией дохода осуществляется следующим образом. Пусть $h = h(y,r)$, где $r \in \Omega$ и $I = I' = \{ \hat{\theta}, \underset{\sim}{I} \}$, где $\underset{\sim}{I}(r)$ – функция принадлежности (нечеткая информация о внутреннем параметре). Тогда, применяя принцип обобщения [4], по $h(y,r)$ и $\underset{\sim}{I}(r)$ определяем нечеткую функцию дохода $\underset{\sim}{h}(y,u)$.

При введении четких штрафов $\chi(y)$ нечеткая целевая функция АЭ, в соответствии с принципом обобщения [4], примет вид [55]:

$$(4.1.16)\quad \underset{\sim}{f}(\, y,\, u,\, \chi(y)\,) = \underset{\sim}{h}\, (\, y,\, u + \chi(y)\,).$$

Величину $\underset{\sim}{f}(\, y,\, u,\, \chi(y)\,)$ при фиксированном $y \in A$ можно рассматривать как функцию принадлежности нечеткого значения целевой функции АЭ (как результат выбора конкретного действия).

Тогда сравнивать два допустимых действия y_1 и y_2 можно по следующему НОП:

$$(4.1.17)\quad \mu_{\underset{\sim}{R}_r}(y_1,y_2) = \sup_{t\geq z} \min \{\, \underset{\sim}{h}(y_1,t+\chi(y_1)),\ \underset{\sim}{h}(y_2,z+\chi(y_2)).$$

Степень недоминируемости действия $x \in A$ при этом определяется выражением:

$$(4.1.18)\quad \mu^{НД}_{\underset{\sim}{R}_r}(x) = 1 - \sup_{y\in A} [\ \sup_{t\geq z} \min \{\underset{\sim}{h}(y,t+\chi(y)),\underset{\sim}{h}(x,z+\chi(x))\}$$

$$- \sup_{z\geq t} \min \{\ \underset{\sim}{h}(x,z+\chi(x)),\ \underset{\sim}{h}(y,t+\chi(y))\ \}.$$

Рациональным, как и ранее, будем считать выбор элементом действия, принадлежащего множеству максимально недоминируемых действий.

Более общим является понятие β-рационального выбора, при котором АЭ выбирает действия, принадлежащие множеству β-недоминируемых действий. Если априори неизвестно, пусто или нет множество Орловского, то множество выбора можно определить и следующим образом: $C(\ \underset{\sim}{R}\ ) = \bigcap_{\beta\in(0,1]} Q^{НД}(\ \beta\ )$, где

$$Q^{НД}(\ \beta\ ) = \begin{cases} A^{НД}(\ \beta\ ), & \text{если } A^{НД}(\ \beta\ ) \neq \varnothing \\ A, & \text{если } A^{НД}(\ \beta\ ) = \varnothing \end{cases}$$

Пусть $\forall\ y \in A\ \ \underset{\sim}{h}(y,u)$ – нормальные функции [55]. Тогда справедливо следующее утверждение.

<u>Утверждение</u> <u>4.1.2.</u> Если пара (y_0,u_0) – решение следующей задачи:

$$(4.1.19)\quad \begin{cases} u \to \max \\ \underset{\sim}{h}(y,u+\chi(y)\ ) = 1, \\ u \in \mathbb{R}^1,\ y \in A \end{cases}$$

то y_0 – четко недоминируемое действие.

Утверждение 4.1.2 является частным случаем приводимого и доказываемого ниже в разделе 4.3 утверждения 4.3.1 и его доказательство не приводится.

Следует отметить, что (4.1.19) исчерпывает все ЧНД действия: легко видеть, что если функция дохода АЭ квазиоднопиковая, а $\underset{\sim}{h}$ – 1-нормальна, то не существует ЧНД действий АЭ, не являющихся решением соответствующей задачи четкого математического программирования.

Утверждение 4.1.2 позволяет конструктивно определять множество выбора АЭ при известной функции штрафов. Отметим, что при предельном переходе к соответствующей детерминированной АС определенное выше множество Орловского переходит в множество решений игры.

Пусть $h(y)$ – четкая функция дохода АЭ. Будем говорить, что нечеткая функция дохода АЭ $\tilde{h}(y,u)$ согласована с четкой функцией дохода $h(y)$, если $\forall\ y \in A$ выполнено:

1) $\tilde{h}\ (\ y,\ h(y)\ ) = 1$;

2) $\forall\ u_1,\ u_2\colon u_1 \le u_2 \le h(y)\quad \tilde{h}(y,u_1) \le \tilde{h}(y,u_2)$;

3) $\forall\ u_1,\ u_2\colon h(y) \le u_1 \le u_2\quad \tilde{h}(y,u_1) \ge \tilde{h}(y,u_2)$.

Нечеткую функцию дохода, согласованную с квазиоднопиковой четкой функцией дохода назовем тоже квазиоднопиковой.

А.4.1.2. Нечеткая функция дохода АЭ – квазиоднопиковая.

Введем следующие функции:

$$h_{min}(y) = \min \{\ u \mid \tilde{h}(y,u) = 1\ \},$$

$$h_{max}(y) = \max \{\ u \mid \tilde{h}(y,u) = 1\ \}.$$

Нечеткую функцию дохода АЭ назовем сильно квазиоднопиковой, если она квазиоднопиковая и $\exists\ \Delta \ge 0\colon\ \forall\ y \in A\quad h_{max}(y) - h_{min}(y) = \Delta$. Очевидно, четкая квазиоднопиковая функция дохода АЭ является нечеткой сильно квазиоднопиковой с $\Delta = 0$.

А.4.1.3. Нечеткая функция дохода АЭ – сильно квазиоднопиковая.

Из утверждения 4.1.2 и результатов главы 1 следует, что для любого действия и для любой системы стимулирования из класса M, реализующей это действие, найдется система стимулирования С-типа, реализующая то же действие. То есть справедливо следующее

<u>Утверждение</u> <u>4.1.3.</u> Если выполнены ГБ и А.4.1.3, то система стимулирования К-типа оптимальна. Если ГБ не выполнена, то оптимальна система стимулирования С-типа. ➞

Если выполнена ГБ, то множество достижимости равно: $Q = \bigcup_{x \in P} Q(x)$, то есть $Q \supseteq P$.

Утверждение 4.1.4. Если выполнено А.4.1.3, то:

а) гарантированная эффективность стимулирования в АС с нечеткой квазиоднопиковой функцией дохода АЭ не выше, чем эффективность стимулирования в соответствующей детерминированной АС;

б) если выполнена гипотеза благожелательности, то эффективность стимулирования в АС с нечеткой квазиоднопиковой функцией дохода АЭ не ниже, чем эффективность стимулирования в соответствующей детерминированной АС;

Следствие 4.1.5. Если $\underset{\sim}{h}(y,u)$ такова, что $\forall\ y \in A\ \underset{\sim}{h}(y,u) = 1$ тогда и только тогда, когда $u = h(y)$ и $\underset{\sim}{h}(y,u)$ согласована с квазиоднопиковой функцией дохода $h(y)$, то эффективность стимулирования в нечеткой АС равна эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной АС.

Пример 4.1.1. Пусть $h(y) = y - y^2/2r$ - некоторая детерминированная функция дохода, а согласованная с ней сильно квазиоднопиковая функция дохода имеет вид:

$$\underset{\sim}{h}(y,u) = \begin{cases} 1, & u \in U_\Delta(h(y)) \\ 0, & u \notin U_\Delta(h(y)) \end{cases},$$

где $U_\Delta(t)$ - Δ-окрестность точки t. При использовании центром системыв стимулирования К-типа: $\chi_k(y) = \max\ [0,\ h(y) - r/2 + C]$ множество решений задачи (4.1.19) составляет

$$[\ y^-,\ y^+\ ] = [\ r - \sqrt{2rC},\ r + \sqrt{2rC}\ ],$$

что совпадает с решением соответствующей детерминированной задачи стимулирования и максимизирует эффективность в рамках ГБ. о

Утверждение 4.1.4 позволяет сравнивать эффективности стимулирования в детерминированных и нечетких АС. Введем критерий сравнения эффективностей стимулирования в двух нечетких АС, различающихся величинами неопределенности.

Пусть $\underset{\sim}{h}_1(y,u)$ и $\underset{\sim}{h}_2(y,u)$ - две нечеткие функции дохода, согласованные с одной и той же квазиоднопиковой четкой функцией $h(y)$. Будем говорить, что первая АС обладает меньшей неопределенностью, если

(4.1.20) $\forall\ y \in A,\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1 \quad \underset{\sim}{h}_1(y,u) \le \underset{\sim}{h}_2(y,u)$.

В силу определений множеств $Q(x)$ (см. выше) с увеличением неопределенности эти множества не сужаются. Значит не сужается и множество Q. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

<u>Утверждение</u> <u>4.1.6.</u> Если выполнено А.4.1.3, то:

а) с ростом неопределенности гарантированная эффективность стимулирования в АС с нечеткой квазиоднопиковой функцией дохода АЭ не увеличивается;

б) если выполнена гипотеза благожелательности, то с ростом неопределенности эффективность стимулирования в АС с нечеткой квазиоднопиковой функцией дохода АЭ не уменьшается.

Для решения задачи стимулирования второго рода в АС с нечеткой функцией дохода АЭ достаточно использования методов, аналогичных изложенным в главе 1 для решения подобной задачи в детерминированных активных системах.

Если отказаться от А.4.1.3, то результаты утверждений 4.1.3 - 4.1.6 в общем случае (как показывает приводимый ниже пример), даже в рамках А.4.1.2 не имеют места.

<u>Пример</u> <u>4.1.2.</u> В условиях примера 4.1.1 положим:

$$\underset{\sim}{h}(y,u) = \begin{cases} 1, & u = h(y) \text{ или } y \in U_\delta(r) \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases},$$

где δ - положительная константа. Тогда при любых $\delta > 0$ и при использовании центром системы стимулирования К-типа АЭ выберет действие $y^* = r$. ◦

Рассмотренный пример подсказывает, что в рамках А.4.1.2 следует решать задачу синтеза и строить множество реализуемых действий не по четкой функции дохода $h(y)$, а по $\tilde{h}_{max}(y)$.

Интересно отметить, что при этом с ростом неопределенности эффективность стимулирования может как возрастать, так и уменьшаться. Проиллюстрируем это утверждение следующим примером.

<u>Пример</u> <u>4.1.3.</u> Пусть функции дохода в первой и второй АС связаны следующим образом:

$$(4.1.21)\quad h^2_{max}(y) = \begin{cases} h^1_{max}(y), & y \neq r \\ h^1_{max}(y) + \varepsilon, & y = r \end{cases},$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда имеет место $K_2 \le K_1$ - эффективность стимулирования уменьшилась, так как множество уровня $(\tilde{h}_{max} - C)$ у функции $h^2_{max}(y)$ будет уже, чем у функций $\tilde{h}^1_{max}(y)$.

Наоборот, если, например, положить:

$$(4.1.22)\ \hbar^2_{max}(y) = \begin{cases} \hbar^1_{max}(y) + \varepsilon,\ y > y'' \\ \hbar^1_{max}(y'),\ y \in [y', y''], \\ \hbar^1_{max}(y),\ y \le y' \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$, а $y'=y'(\varepsilon)$ и $y''=y''(\varepsilon)$ таковы, что $r < y'(\varepsilon) < y''(\varepsilon)$ и $\hbar(y'') + \varepsilon = \hbar(y')$, то с ростом неопределенности эффективность стимулирования увеличится ($\forall\ y \in A\ \hbar^2_{max}(y) \ge \hbar^1_{max}(y)$), несмотря на то, что преобразования (4.1.21) и (4.1.22) сохраняют квазиоднопиковость. o

В заключение настоящего раздела отметим, что рассмотренная выше модель активной системы с нечеткой функцией дохода АЭ более "удобна" для анализа, нежели чем модель АС с НОП АЭ. Объяснение этого явления таково: функция $\tilde{\hbar}$ порождает НОП (4.1.17) на множестве А (и в этом случае использование результатов детерминированной теории или их неосредственных "аналогов", совместно с утверждением 4.1.2, дает мощный инструмент для анализа нечетких АС), а при заданном НОП однозначное восстановление функции дохода возможно не всегда.

Таким образом, в зависимости от того, выполнена гипотеза благожелательности или нет, оптимальными в АС с нечеткой внутренней неопределенностью и симметричной информированностью являются системы стимулирования К- или С-типа. Гарантированная эффективность стимулирования в этом классе АС не выше, чем в соответствующей детерминированной и не возрастает с ростом неопределенности.

4.2. Механизмы стимулирования в активных системах с внутренней нечеткой неопределенностью и асимметричной информированностью

При рассмотрении задач стимулирования в АС с НОП активного элемента и в АС с нечеткой функцией дохода АЭ в разделе 4.1 предполагалось, что и центр, и активный элемент обладают одинаковой информацией о предпочтениях элемента, то есть имела место симметричная информированность. Можно возразить, что этот случай соответствует не задаче с неопределенностью, а альтернативному по сравнению с детерминированным способу описания АС, и именно симметричная информированность служит объяснением роста эффективности с увеличением неопределенности в случае справедливости ГБ. Все это, отчасти, действительно, так. Поэтому для получения полной картины рассмотрим нечеткие АС с внутренней неопределенностью и асимметричной информированностью (М10). Как обычно, будем предполагать, что АЭ информирован лучше, чем центр, то есть в данной базовой модели: $\Omega = \hat{\theta}$, $z \equiv y$, $A_0 \equiv A$, $I' = \{ \hat{\theta}, \underset{\sim}{I} \}$, $I = \{ \hat{\theta}, \hat{r} \}$.

Возможны несколько путей обобщения полученных выше в разделе 4.1 результатов на случай асимметричной информированности.

Активный элемент может иметь четкое бинарное отношение предпочтения R_h на конечном множестве A, а центр может иметь информацию о НОП $\underset{\sim}{R}_h$, согласованном в том или ином смысле с "истинным" предпочтением АЭ. Рассмотрение этой модели выходит за рамки настоящей работы. Ниже исследуется следующая модель. Пусть АЭ известна его квазиоднопиковая функция дохода $h(y)$, а центр имеет информацию о $\underset{\sim}{h}(y,u)$ – нечеткой функции дохода, согласованной с $h(y)$.

А.4.2.1. Нечеткая и четкая функции дохода АЭ согласованы.

В случае асимметричной информированности оказывается, что с ростом неопределенности (в смысле (4.1.20)) эффективность стимулирования уменьшается. Действительно, если выполнены условия следствия 4.1.5, то эффективность стимулирования в нечеткой АС с асимметричной информированностью равна эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной АС. Содержательно, этот факт можно объяснить следующим образом.

Ограничение задачи (4.1.19) выполнено в единственной точке – при $u = \hbar(y)$. Следовательно, если функция штрафов такова, что максимум целевой функции АЭ достигается в некоторой точке $x \in P$, то $(x, f(x))$ – решение задачи (4.1.19), и, следовательно, x – ЧНД действие. То есть в этом случае центр может без потери общности (и, что более важно – эффективности) "забыть" про неопределенность и по информации о $\underset{\sim}{h}(y,u)$ однозначно восстановить $\hbar(y)$ из условия $\underset{\sim}{h}(y,u) = 1 \leftrightarrow \hbar(y) = u$.

Ситуация меняется, если для некоторого $y \in A$ существуют u_1 и u_2, $u_1 \ne u_2$, такие, что $\underset{\sim}{h}(y,u_1) = \underset{\sim}{h}(y,u_2) = 1$. В этом случае центр не знает, какое из значений u_1 или u_2 (или какое-либо еще) соответствует "истинной" функции дохода АЭ.

Определим следующие функции

$$(4.2.1)\quad h_{min}(y,\alpha) = \min \{ u \mid \underset{\sim}{h}(y,u) \ge \alpha \},\quad y \in A,$$

$$h_{max}(y,\alpha) = \max \{ u \mid \underset{\sim}{h}(y,u) \ge \alpha \},\quad y \in A,$$

где $\alpha \in (0,1]$. Обозначим $h_{min}(y)=h_{min}(y,1)$, $h_{max}(y) = h_{max}(y,1)$.

Из согласованности функций $\underset{\sim}{h}$ и $\hbar$ следует, что для любого $y \in A$ $h_{min}(y) \le h_{max}(y)$, но функции $h_{min}(y)$ и $h_{max}(y)$ могут оказаться не квазиоднопиковыми. В силу согласованности, центр знает, что "истинная" функция дохода АЭ удовлетворяет:

$$(4.2.2)\quad \forall\, y \in A \quad h_{min}(y) \le \hbar(y) \le h_{max}(y).$$

Неравенство (4.2.2) демонстрирует, что требование согласованности является достаточно сильным. В то же время, если оно нарушено, то центр может решать задачу стимулирования не для "той" АС. Если выполнено (4.2.2), то применимы результаты раздела 2.2 настоящей работы.

Обозначим V – множество квазиоднопиковых функций, удовлетворяющих (4.2.2), $v(\cdot)$ – элемент множества V. Тогда множество решений игры определяется следующим образом:

$$(4.2.3)\quad P(v, \chi) = \operatorname*{Arg\,max}_{y \in A} \{ v(y) - \chi(y) \}.$$

Гарантированная эффективность стимулирования:

$$(4.2.4)\quad K^{\Gamma}(\chi) = \min_{v \in V} \min_{y \in P(v,\chi)} \Phi(y).$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования формулируется, как и ранее, как задача поиска функции стимулирования $\chi^* \in M$, максимизирующей гарантированную эффективность (4.2.4):

$$(4.2.5)\quad K(\chi) \to \max_{\chi \in M}.$$

Видно, что задача (4.2.5) гораздо сложнее соответствующей детерминированной задачи (добавился гарантированный результат по множеству V). Исследуем влияние неопределенности на эффективность стимулирования.

<u>Утверждение</u> <u>4.2.1.</u> С увеличением неопределенности в нечетких АС с внутренней неопределенностью и асимметричной информированностью гарантированная эффективность стимулирования не возрастает.

Справедливость утверждения 4.2.1 следует из того, что с ростом неопределенности (4.1.20) множество V не сужается и, следовательно, не увеличивается эффективность (4.2.4).

Рассмотрим практически важный частный случай.

А.4.2.2. $h_{min}(y)$ - квазиоднопиковая функция и выполнено:

$$(4.2.6)\quad \forall\, y \in A \quad h_{max}(y) - h_{min}(y) = \Delta > 0.$$

То есть "диапазон неопределенности" относительно функции дохода не зависит от выбранного АЭ действия. Из введенных предположений следует, что $h_{max}(y)$ - квазиоднопиковая функция с точками пика $r^{\pm} \in [\, r^-,\, r^+]$.

<u>Утверждение</u> <u>4.2.2.</u> Пусть выполнено (4.2.6). Тогда:

а) если $\Delta \ge C$, то $\chi^* \equiv 0$;

б) если $\Delta < C$, то правая граница гарантированного множества достижимости определяется как: $\max \{\, x \in A \mid h_{max}(x) \ge h_{max}(r^{\pm}) - C + \Delta \}$.

Доказательство очевидно. Результат утверждения 4.2.2 находится в соответствии с утверждением 4.2.1 - с ростом неопределенности (увеличением Δ) эффективность стимулирования уменьшается, а при предельном переходе к соответствующей детерминированной активной системе совпадает.

В данной модели в рамках (4.2.6) левая граница множества достижимости определяется следующим образом (при $\Delta \le C$):

$$y^-_{\Delta} = \min \{\, x \in A \mid h_{max}(x) \ge h(\, r\,) - C + \Delta \,\}.$$

Эффективность стимулирования при этом равна: $K^* = \max\limits_{x \in [y_\Delta^-, y_\Delta^+]} H(x)$

Предположим для простоты, что функция дохода центра монотонно возрастает. Тогда $K^* = H(y_\Delta^+)$, а для y_Δ^+, в случае непрерывной функции дохода АЭ (при $y \ge r^*$) справедливо:

$$y_\Delta^+ = h^{-1}(h(r^\pm) - C + \Delta).$$

Переходя к рассмотрению механизма с платой за информацию, получаем, что из анализа рассмотренной выше модели следует, что, заплатив за информацию и решая детерминированную задачу, центр обеспечивает эффективность, соответствующую реализации следующего действия: $y^* = h^{-1}(h(r^\pm) - C + \Delta C)$.

Сравнивая y_Δ^+ и y^* получаем, что плата за информацию по полному устранению неопределенности выгодна центру, если ее величина удовлетворяет: $\Delta C \le \Delta$ (содержательные интерпретации последнего неравенства очевидны).

Проанализируем теперь общий случай.

<u>Лемма</u> <u>4.2.3.</u> Множество α-достижимости в АС с внутренней нечеткой неопределенностью и асимметричной информированностью равно:

(4.2.7) $Q(\alpha) = \{ y \in A \mid \forall t \in A \;\; h_{min}(y,\alpha) \ge h_{max}(t,\alpha) \}$. $\rightarrow$

Сделав небольшое отступление, отметим, что в настоящей работе функции стимулирования являются обычными четкими функциями, интерпретируемыми, например, как зарплата, выплачиваемая центром активному элементу в зависимости от результатов его деятельности. Возможными обобщениями и расширениями такого понимания стимулирования является рассмотрение следующих конструкций.

Стимулированием может, например, считаться лотерея на множестве возможных функций стимулирования M. При этом центр, решая задачу синтеза, будет искать не оптимальный элемент класса M, а оптимальное распределение вероятностей на этом классе.

Пусть P_M – класс всевозможных вероятностных распределений на M. Тогда задача стимулирования будет заключаться в поиске $p^*(\chi) \in P_M$, максимизирующего целевую функцию центра при условии, что выбираемое АЭ действие максимизирует его ожидаемую (с учетом лотереи по зарплате) полезность: $\int\limits_{\mathfrak{P}_M} f(y, z)\, d\mathfrak{p}(\chi)$, где $\mathfrak{p}(\cdot)$ – некоторая мера, обладающая заранее оговоренными свойствами.

Стимулирование в нечеткой (да и в некоторых четких) АС может интерпретироваться и как нечеткое подмножество в М. Например, в рассматриваемой выше модели можно считать, что оптимальная система стимулирования, побуждающая АЭ выбрать одно из α-реализуемых действий, имеет значение функции принадлежности нечеткому решению задачи синтеза со степенью α и т.д.

В большинстве случаев (за исключением, быть может, конечного множества М) решение задачи стимулирования при таких экзотических формулировках, несомненно, сложнее, чем в классической, используемой в настоящей работе. Более того, иногда затруднительны содержательные интерпретации нечеткого или случайного стимулирования.

Так как в рассматриваемой модели имеет место асимметричная информированность, то, если это допускается порядком функционирования, быть может имеет смысл использовать сообщение информации от АЭ центру. Сообщаемая элементам информация должна быть согласована с имеющейся у центра информацией о нечеткой функции дохода. В одноэлементной системе АЭ имеет возможность манипулировать в диапазоне, рамки которого определяются принятым центром определением согласования. С этой точки зрения целесообразно выбирать $\alpha = 1$, оставляя АЭ как можно меньший "простор" для манипулирования. В многоэлементной АС, если предпочтения элементов сепарабельны, то возможно использование результатов, приведенных в разделе 2.2 настоящей работы. Если АЭ имеют информацию друг о друге, или, например, если их функции дохода параметрически зависят от одного и того же фактора, то целесообразно применение результатов раздела 2.4 или подходов теории реализуемости [25,84,89].

Таким образом, при исследовании механизмов стимулирования в АС с нечеткой внутренней неопределенностью и асимметричной информированностью существенно используются результаты анализа аналогичной модели с симметричной информированностью. Гарантированная эффективность стимулирования в этом классе АС не выше, чем в соответствующей детерминированной АС и убывает с ростом неопределенности.

4.3. Механизмы стимулирования в активных системах с внешней нечеткой неопределенностью и симметричной информированностью

В настоящем разделе рассматривается модель одноэлементной статической активной системы с нечеткой информацией о внешнем параметре - состоянии природы и симметричной информированностью участников (М7), то есть в данной базовой модели имеет место: $\hat{\Omega} = \hat{r}$, $I = I' = \{ \hat{r}, \underset{\sim}{P} \}$, где $\underset{\sim}{P}$ - нечеткая информация о состоянии природы. Следует отметить, что описываемая ниже модель качественно близка к соответствующей модели вероятностной активной системы (раздел 3.1).

Определение индуцированного НОП на множестве возможных действий АЭ

Рассмотрим активную систему, состоящую из центра и одного активного элемента. Стратегией элемента является выбор действия $y \in A$. Выбираемое АЭ действие, совместно с реализацией состояния природы $\theta \in \Omega$, приводит к некоторому результату деятельности $z \in A_0$, $z = z(y,\theta)$ (см. раздел 3.1). Предположим, что целевая функция АЭ представляет собой разность между доходом и штрафами, причем и доход, и штрафы зависят от результата деятельности. Действие АЭ известно только ему самому и не наблюдается центром. Целевая функция центра определяется доходом, зависящим от действия АЭ.

Предположим, что на момент выбора стратегий участниками АС значение состояния природы им не известно, следовательно их целевые функции оказываются зависящими от неопределенного параметра θ. Для определения рационального выбора стратегий необходимо задать процедуру устранения неопределенности. Будем считать, что и центр, и активный элемент имеют одинаковую нечеткую информацию о состоянии природы. Необходимо определить, что понимать под рациональным выбором с учетом этой информации и найти равновесные стратегии.

В отличие от рассматриваемой в разделе 4.1 модели, исходные отношения предпочтения заданы на множестве возможных результатов деятельности АЭ, а не на множестве возможных действий. Так как результат деятельности зависит и от действия АЭ, и от состояния природы, то для определения рационального выбора АЭ на множестве A необходимо с учетом имеющейся у АЭ информации о состоянии природы, определить, какое НОП индуцируется на множестве возможных действий нечетким отношением предпочтения $\underset{\sim}{R}_r$, определенным на множестве A_o. Для решения этой задачи мы используется подход, предложенный в [55].

Предположим, что и центр, и активный элемент имеют следующую нечеткую информацию о состоянии природы, точнее о влиянии состояния природы на результат деятельности АЭ (см. для сравнения различные методы учета вероятностной неопределенности в разделе 3.1): известна нечеткая функция $\underset{\sim}{P} : A_o \times A \to [0,1]$. Если $y \in A$ – некоторое фиксированное действие, то определенная на A_o функция $\underset{\sim}{P}(z,y)$ есть функция принадлежности соответствующего результата деятельности z. Поставленная выше задача может быть сформулирована как задача поиска НОП на множестве A, индуцированного нечетким отношением предпочтения $\underset{\sim}{R}_r$ (или четкой целевой функцией АЭ), заданным на множестве A_o, и нечеткой функцией $\underset{\sim}{P}$.

Нечеткое отношение предпочтения $\underset{\sim}{R}$ ($\underset{\sim}{R}_h$ или $\underset{\sim}{R}_r$) можно интерпретировать как нечеткое отображение множества A_o в класс всех его нечетких подмножеств. Функция $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)$ описывает нечеткое множество элементов $z \in A_o$, связанных с x отношением $\underset{\sim}{R}$, то есть $[z \in A_o \mid x \underset{\sim}{R} z]$ – нижний срез НОП $\underset{\sim}{R}$. Зафиксируем $y \in A$, тогда $\underset{\sim}{P}(z,y)$ определяет нечеткое подмножество в A_o, которое мы обозначим $\underset{\sim}{P}(z)$ (ниже иногда мы будем в целях удобства обозначений идентифицировать нечеткое множество с его функцией принадлежности). Тогда, согласно принципу обобщения [4], образом $\underset{\sim}{P}(z)$ при нечетком отображении $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)$ является нечеткое подмножество множества A_o с функцией принадлежности:

$$\gamma(\underset{\sim}{P}, z) = \sup_{x \in A_o} \min [\underset{\sim}{P}(x), \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)].$$

Величина $\gamma(\underset{\sim}{P}, z)$ есть степень, с которой нечеткое множество $\underset{\sim}{P}$ предпочтительнее элемента z. Применяя опять принцип обобщения, получим, что $\beta(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{P}') = \sup_{z \in A_o} \min [\underset{\sim}{P}'(z), \gamma(\underset{\sim}{P}, z)]$ есть степень предпочтительности нечеткого результата деятельности АЭ $\underset{\sim}{P}$ по сравнению с нечетким результатом $\underset{\sim}{P}'$

Комбинируя последние два выражения, получим, что

$$(4.3.1)\ в(\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{P}') = \sup_{z,x \in A_0} \min [\underset{\sim}{P}(x), \underset{\sim}{P}'(z), \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)].$$

Выражение (4.3.1) позволяет сравнивать различные результаты деятельности АЭ. Вспомним, что $\underset{\sim}{P}(x)$ - нечеткая функция при фиксированном действии. Значит, подставив в (4.3.1) $\underset{\sim}{P}(x,y_1)$ вместо $\underset{\sim}{P}(x)$ и $\underset{\sim}{P}(z,y_2)$ вместо $\underset{\sim}{P}'(z)$, получим НОП $\underset{\sim}{R}_A$ на множестве возможных действий:

$$(4.3.2)\ \mu_{\underset{\sim}{R}_A}(y_1, y_2) = \sup_{z,x \in A_0} \min [\underset{\sim}{P}(x,y_1), \underset{\sim}{P}(z,y_2), \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)].$$

Нечеткое множество $\underset{\sim}{P}(z,y)$ нормально, если

$$(4.3.3)\ \forall y \in A \quad \sup_{z \in A_0} \underset{\sim}{P}(z,y) = 1.$$

Будем говорить, что нечеткое множество $\underset{\sim}{P}(z,y)$ α-нормально, если $\forall y \in A \ \sup_{z \in A_0} \underset{\sim}{P}(z,y) = \alpha$ и

$$(4.3.4)\ \forall z \in A_0 \ \exists y \in A: \ \underset{\sim}{P}(z,y) = \alpha.$$

А.4.3.1. $\underset{\sim}{P}$ - α-нормально.

Класс α-нормальных множеств достаточно широк. Ему, например, принадлежат нормальные нечеткие множества, функция принадлежности которых достигает макисмума при $z = y$ и зависит от модуля разности z и y. Исследуем свойства индуцированного НОП.

Если нечеткое множество $\underset{\sim}{P}$ 1-нормально, то НОП $\mu_{\underset{\sim}{R}_A}(y_1,y_2)$ рефлексивно (в смысле Р1). Справедливость этого утверждения доказывается рассмотрением $\mu_{\underset{\sim}{R}_A}(y,y)$ с учетом (4.3.3). Если нечеткое множество $\underset{\sim}{P}$ 1-нормально и НОП $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)$ сильно линейно, то и НОП $\mu_{\underset{\sim}{R}_A}(y_1,y_2)$ также сильно линейно.

Частным случаем рассмотреной выше модели является активная система, в которой НОП АЭ $\mu_{\underset{\sim}{R}}$ на множестве A_0 является обычным отношением предпочтения R, порожденным, например, функцией дохода АЭ или его целевой функцией. Тогда (4.3.2) примет вид:

$$(4.3.5)\ \mu_{\underset{\sim}{R}_A}(y_1,y_2) = \sup_{\substack{z,x \in A_0 \\ zRx}} \min [\underset{\sim}{P}(z,y_1), \underset{\sim}{P}(x,y_2)].$$

Обычное линейное отношение является сильно линейным в смысле Л1. Поэтому индуцируемое им на множестве $A = A_0 = \mathbb{R}^1$ НОП (4.3.5) также является сильно линейным.

Имея заданное на множестве возможных действий НОП $\mu_{\underset{\sim}{R}_A}$ (4.3.2), определим, как это делалось в разделе 4.1, в A нечеткое подмножество недоминируемых действий:

$$(4.3.6)\quad \mu^{НД}_{\underset{\sim}{R}_A}(x) = 1 - \sup_{y \in A} [\, \mu_{\underset{\sim}{R}_A}(y,x) - \mu_{\underset{\sim}{R}_A}(x,y) \,].$$

Из (4.3.2) и (4.3.6) получаем

$$(4.3.7)\quad \mu^{НД}_{\underset{\sim}{R}_A}(x) = 1 - \sup_{y \in A} [\, \sup_{z,t \in A_0} \min \{\underset{\sim}{P}(z,y), \underset{\sim}{P}(t,x), \mu_{\underset{\sim}{R}}(z,t)\} -$$

$$- \sup_{z,t \in A_0} \min \{\, \underset{\sim}{P}(t,x),\ \underset{\sim}{P}(z,y),\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(t,z) \,\} \,].$$

Рациональным будет выбор активным элементом действий, для которых функция (4.3.7) принимает возможно большие значения, то есть действия из множества максимально недоминируемых действий (или просто недоминируемых действий).

Если предположить, что множество допустимых действий описано нечетко - задана функция принадлежности $\mu_A(x)$, то при определении рационального выбора АЭ следует учитывать оба отношения предпочтения - индуцированного НОП $\mu^{НД}_{\underset{\sim}{R}_A}(x)$ и отношения предпочтения, отражающего степени допустимости тех или иных действий АЭ. В этом случае рациональным можно считать, например, выбор действий из множества $\mathrm{Arg}\max_{x \in A} \min [\, \mu^{НД}_{\underset{\sim}{R}_A}(x),\ \mu_A(x) \,]$.

На основании (4.3.7) и определенного выше множества недоминируемых действий, множество выбора в активной системе с нечеткой информацией относительно состояния природы определяется следующим выражением:

$$(4.3.8)\quad C\,(\, \underset{\sim}{R},\ \underset{\sim}{P} \,) = A^{НД}.$$

Синтез оптимальной функции стимулирования в активной системе с нечеткой информацией о состоянии природы

Понятно, что множество недоминируемых альтернатив зависит как от НОП активного элемента на множестве результатов деятельности, так и от нечеткой функции $\underset{\sim}{P}$, отражающей влияние неопределенного параметра на результат функционирования активной системы. Если предпочтения АЭ на множестве A_0 (в присутствии стимулирования) зависят от выбранной центром системы стимулирования, то, естественно, от стимулирования зависит и выбор элементом действия, то есть можно записать: $C = C(\underset{\sim}{R}(\chi), \underset{\sim}{P})$.

В предположении благожелательного отношения активного элемента к центру, эффективность механизма стимулирования определим как:

$$(4.3.9)\quad K(\chi) = \max_{y \in C(\underset{\sim}{R}(\chi), \underset{\sim}{P})} \Phi(y),$$

где множество выбора определяется (4.3.2) - (4.3.7) - (4.3.8).

Если гипотеза благожелательности не выполнена, то эффективность механизма стимулирования определяется как гарантированное значение целевой функции центра на соответствующем множестве выбора (решений игры), то есть:

$$(4.3.10)\quad K(\chi) = \min_{y \in C(\underset{\sim}{R}(\chi), \underset{\sim}{P})} \Phi(y).$$

Возможно определение множества выбора, альтернативное (4.3.8): АЭ выбирает наиболее благоприятное для центра β-недоминируемое действие (см. ниже).

Рассмотрим следующий практически важный случай. Если отношение предпочтения АЭ R_f на множестве A_0 четкое (индуцированное четкой функцией $f(z)$), то воспользовавшись (4.3.4), получим, что R_f индуцирует на множестве возможных действий следующее НОП:

$$(4.3.11)\quad \mu_{\underset{\sim}{R}_A}(y_1, y_2) = \sup_{\substack{z, x \in A_0 \\ f(z) \geq f(x)}} \min [\underset{\sim}{P}(z, y_1), \underset{\sim}{P}(x, y_2)].$$

Если выполнено предположение (4.3.3), то множество недоминируемых альтернатив (4.3.7) принимает вид

$$(4.3.12)\quad \mu^{НД}_{\underset{\sim}{R}_A}(x) = 1 - \sup_{y \in A} [\sup_{\substack{z, t \in A_0 \\ f(z) \geq f(t)}} \min \{\underset{\sim}{P}(z, y), \underset{\sim}{P}(t, x)\} -$$
$$- \sup_{\substack{z, t \in A_0 \\ f(t) \geq f(z)}} \min \{\underset{\sim}{P}(t, x), \underset{\sim}{P}(z, y)\}].$$

Если для некоторого действия $x \in A$ выполнено $\mu^{НД}_{\underset{\sim}{R}_A}(x) \geq \alpha$, где $\alpha \in (0,1]$, то в множестве A не существует действия, доминирующего действие x со степенью, большей $(1-\alpha)$. Введем в рассмотрение задачу четкого математического программирования:

$$(4.3.13)\quad \begin{cases} f(z) \to \max \\ \underset{\sim}{P}(z,y) \geq \alpha \\ y \in A,\ z \in A_0. \end{cases}$$

<u>Утверждение</u> <u>4.3.1.</u> Пусть выполнено

$$(4.3.14)\quad \forall\, y \in A \quad \sup_{z \in A_0} \underset{\sim}{P}(z,y) \geq \alpha$$

и НОП $\mu_{\underset{\sim}{R}_A}(x)$ индуцировано на A отношением предпочтения R_f и нечеткой функцией $\underset{\sim}{P}(z,y)$. Если (z_0, y_0) – решение задачи (4.3.14), то

$$(4.3.15)\quad \mu^{НД}_{\underset{\sim}{R}_A}(y_0) \geq \alpha. \ \blacktriangleright$$

Таким образом, задача исследования достаточных условий непустоты множества α-недоминируемых действий (4.3.12) свелась к исследованию условий существования решения стандартной задачи математического программирования (4.3.13).

Следующая лемма дает ряд достаточных условий существования решения задачи (4.3.13) для широкого класса практически важных случаев.

<u>Лемма</u> <u>4.3.2.</u> Если выполнено одно из следующих условий:

- (4.3.14) и множества A и A_0 конечны;

- (4.3.14) и множества A и A_0 компактны, а функции f и $\underset{\sim}{P}$ полунепрерывны сверху;

- множества A, A_0 компактны, функция f полунепрерывна сверху, а $\underset{\sim}{P}$ – α-нормально,

то задача (4.3.13) имеет решение.

Доказательство леммы 4.3.2 очевидно. Понятно, что перечень достаточных условий, приведенных выше, далеко не полон, хотя и соответствует наиболее часто используемым при формулировке задачи стимулирования предположениям.

Следствие 4.3.3.

а) Если выполнены условия утверждения 4.3.1 и леммы 4.3.2, то множество α-недоминируемых действий непусто (то есть существует хотя бы одно действие $y_0 \in A$, удовлетворяющее (4.3.15)).

б) Если выполнено условие (4.3.14) с $\alpha = 1$, множества A и A_0 компактны, а функции f и $\underset{\sim}{P}$ полунепрерывны сверху, то множество Орловского непусто, причем любое решение задачи (4.3.13) принадлежит этому множеству.

Результат утверждения 4.3.1 гласит, что решения задачи (4.3.13) принадлежат множеству α - недоминируемых действий. Однако, в общем случае, не исключена ситуация, когда может найтись α-недоминируемое действие, не являющееся решением соответствующей задачи математического программирования. Следующее утверждение определяет класс АС, в котором такая возможность исключается.

Утверждение 4.3.4. Если выполнены А.4.3.1 и условия леммы 4.3.2, то любое α-недоминируемое действие принадлежит множеству решений задачи (4.3.13). ➔

Отметим, что результаты утверждений 4.3.1, 4.3.4 и леммы 4.3.2 формулировались для достаточно общего случая (произвольных значений $\alpha \in (0, 1]$). На практике в большинстве случаев предполагается, что $\underset{\sim}{P}$ - 1-нормальны.

Итак, комбинируя результаты утверждений 4.3.1, 4.3.4 и леммы 4.3.2, можно утверждать, что в случае α-нормальных информационных функций множество α-недоминруемых действий совпадает с множеством решений задачи (4.3.13). Этот факт дает эффективный инструмент для решения задачи стимулирования и позволяет в достаточно широком классе нечетких активных систем вместо анализа множества недоминируемых действий решать задачу математического программирования. Рассмотрим более детально, как можно конструктивно использовать приведенные результаты для решения задачи стимулирования в активной системе с нечеткой информацией о состоянии природы. Целевая функция АЭ

$$(4.3.16)\quad f(z) = h(z) - \chi(z)$$

представляет собой разность между доходом и штрафами. Если функция дохода АЭ квазиоднопиковая, а функция штрафов ограничена, то в соответствии с результатами главы 1 множество точек максимума целевой функции АЭ при $\chi \in M$ ограничено и представляет собой отрезок $P = [z^-, z^+] \subseteq A_0$, где

$$(4.3.17)\ z^- = \min \{ z \in A_0 \mid h(z) \geq h(r^\pm) - C \},$$

$$(4.3.18)\ z^+ = \max \{ z \in A_0 \mid h(z) \geq h(r^\pm) - C \},$$

где $r^\pm \in [\, r^-, r^+ \,]$ произвольная точка пика (плато) функции дохода $h(z)$.

Более того, в главе 1 было показано, что множество P достижимо, а гарантированно достижимо множество

$$(4.3.19)\ P_\delta = [\, z^- + \delta,\ z^+ - \delta \,],\ \delta > 0,$$

при использовании только систем стимулирования C-типа, то есть при $\chi \in M_\varkappa \subseteq M$. Поэтому предположим, что центр использует систему стимулирования C-типа.

Максимум целевой функции АЭ (4.3.17) достигается в точке $x \in P$ (назначать планы $x \notin P$ не имеет смысла). Фиксируем $\chi \in M_\varkappa$, или, что то же самое $\tilde{x} \in P$, и обозначим

$$(4.3.20)\ Q(\tilde{x},\alpha) = \{ y \in A \mid \underset{\sim}{P}(\tilde{x},y) \geq \alpha \}.$$

<u>Лемма</u> <u>4.3.5.</u> Если выполнено A.4.3.1, то для $\forall\ x \in P$ и $\forall y \in Q(x,\alpha)$ найдется система стимулирования $\chi \in M_\varkappa$ (а именно, $\chi_c(\tilde{x},z)$), такая, что действие y будет принадлежать множеству α-недоминируемых действий. ⇒

Назовем в рассматриваемой нечеткой модели, как и в детерминированной теории, множеством достижимости подмножество таких допустимых действий активного элемента, которые центр может побудить его выбрать, используя штрафы, удовлетворяющие ограничениям механизма стимулирования. В детерминированном аналоге рассматриваемой задачи множество достижимости совпадает с отрезком P. Обозначим

$$P\ (\ \chi,\ \alpha\ ) = \{\ y \in A \mid y \in A^{НД}(R_\Gamma(\chi),\alpha)\ \}$$

и определим множество α-достижимости $S(\alpha) = \bigcup\limits_{\chi \in M} P\ (\ \chi,\ \alpha\ )$.

На основании леммы 4.3.5 получаем следующий результат.

Лемма 4.3.6. Если выполнены А.4.3.1 и ГБ, то множество α-достижимости в рассматриваемой модели нечеткой активной системы определяется

$$(4.3.21)\quad S(\alpha) = \bigcup_{x \in P} Q(x,\alpha).$$

Справедливость утверждения леммы 4.3.6 следует из того, что любое α-недоминируемое действие принадлежит одному из множеств Q.

Произведем теперь "корректировку" понятия рационального выбора АЭ. Выше мы предполагали, что выбираемое элементом действие принадлежит множеству максимально недоминируемых альтернатив. Считалось, что в АС, удовлетворяющей (4.3.14) с $\alpha=1$, АЭ выберет одно из действий, принадлежащее множеству Орловского. Можно ослабить требования, налагаемые на "рациональный" выбор АЭ. Например, предположим, что если АС удовлетворяет (4.3.14) с некоторым $\alpha \in (0,1]$, то рациональным будет выбор из множества β-недоминируемых альтернатив, где $\beta \in (0,1]$, $\beta \le \alpha$. При таком определении множество выбора расширяется. Понятно, что если $\beta \le \alpha$, то $A^{НД}(R_f, \beta) \supseteq A^{НД}(R_f, \alpha)$. Выбор элементом β-недоминируемого действия будем называть β-рациональным. При $\beta=\alpha$ определение β-рационального выбора совпадает с определением рационального выбора, введенным выше.

Теперь мы имеем возможность конструктивно определить решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования. Назовем β-решением такую допустимую систему стимулирования, при которой АЭ выбирает наиболее благоприятное для центра β-рациональное действие.

Задача стимулирования (4.3.9)-(4.3.10), с учетом результата леммы 4.3.6 может быть сформулирована в следующем виде (этот очевидный факт приведен в виде отдельного утверждения в силу его чрезвычайной важности).

Утверждение 4.3.7. Если выполнены А.4.3.1 и ГБ, то:

а) для любого $\beta \in (0, \alpha]$ β-решение задачи стимулирования совпадает с одним из решений следующей задачи: $\Phi(x) \to \max_{x \in S(\beta)}$, где оптимальный план $x^* \in P$ и $S(\beta)$ определяются из (4.3.20) (4.3.21);

б) для любой системы стимулирования $\chi \in M$ существует система стимулирования С-типа не меньшей эффективности, то есть при поиске оптимального механизма стимулирования в нечеткой АС достаточно ограничиться классом M_x.

Если отказаться от гипотезы благожелательности, то эффективность системы стимулирования С-типа следует определить следующим образом: $K(x) = \min_{y \in Q(x,\alpha)} \Phi(y)$ и решать задачу оптимального согласованного планирования: $K(x) \to \max_{x \in P}$.

При этом оптимальность системы стимулирования С-типа обосновывается следующим образом. Фиксируем произвольное $\chi \in M$. Обозначим $P(\chi) = \bigcup_{x \in P(\chi)} Q(x, \alpha)$. Эффективность стимулирования $K(\chi) = \min_{y \in P(\chi)} \Phi(y)$. С одной стороны, множество точек максимума целевой функции АЭ при использовании скачкообразных штрафов не шире, чем при использовании любой другой системы стимулирования из класса М, а с другой стороны - в силу α-нормальности функции $\tilde{P}$ $\forall\ \hat{y} \in P(\chi)\ \exists\ \chi_c \in M_x: \hat{y} \in P(\chi_c)$.

Легко видеть, что в предельном случае - при отсутствии неопределенности (когда $z \equiv y$, то есть $\tilde{P}(z,y) = 1$ при $z = y$ и $\tilde{P}(z,y) = 0$ при $z \neq y$, $\alpha = 1$) (4.3.20) превращается в $Q(x,\alpha) = x$, $\tilde{P}(\chi,\alpha)$ тождественно равно x при $\chi = \chi(x,z)$, а множество достижимости совпадает с множеством согласованных планов P. Задача стимулирования при этом переходит в задачу оптимального согласованного планирования: $\Phi(x) \to \max_{x \in P}$.

Свойства оптимального решения задачи стимулирования

Основными вопросами, возникающими при исследовании свойств оптимального решения задачи стимулирования в АС с неопределенностью являются: соотношение между эффективностью стимулирования в изучаемой АС и в соответствующей детерминированной АС, а также влияние "величины" неопределенности на эффективность стимулирования.

Сравним эффективности β-решений при различных β и эффективность соответствующего детерминированного механизма стимулирования.

Обозначим эффективность соответствующего детерминированного механизма K_0, $K(\beta)$ – эффективность оптимального β-решения, $K^\Gamma(\beta)$ – гарантированная эффективность. Следующее утверждение устанавливает зависимость между эффективностью механизма стимулирования и величиной β при фиксированной нечеткой информации $\underset{\sim}{P}$ о состоянии природы.

<u>Утверждение</u> <u>4.3.8.</u> Для любого $\alpha \in (0,1]$, если выполнено А.4.3.1, то $K^\Gamma(\alpha) \le K_0^\Gamma$, $K(\alpha) \ge K_0$ и $\forall\ \beta_1,\ \beta_2 \in (0,\alpha]$, $\beta_1 \le \beta_2$ выполнено $K^\Gamma(\beta_1) \le K^\Gamma(\beta_2)$; $K(\beta_1) \ge K(\beta_2)$.

Справедливость утверждения следует из того, что с уменьшением β множества (4.3.20) и (4.3.21) не сужаются. Следовательно если выполнена гипотеза благожелательности, то максимум в выражении (4.3.9) ищется по бóльшему множеству, если же гипотеза благожелательности не выполнена, то в (4.3.10) минимум ищется, опять-же, по большему множеству.

<u>Следствие</u> <u>4.3.9.</u> Если A и A_0 – компакты, функция дохода АЗ квазиоднопиковая, $\underset{\sim}{P}(z,y)$ – 1-нормальная квазиоднопиковая функция и $\forall\ y \in A$ $\arg\max\limits_{z \in A_0} \underset{\sim}{P}(z,y) = y$; $\underset{\sim}{P}(z,y) < 1\ \ \forall\ z \ne y$, то множество 1-достижимости (множество четко недоминируемых реализуемых действий) совпадает со множеством согласованных планов Р соответствующей детерминированной задачи.

Результат пункта б) утверждения 4.3.8 представляется достаточно нетривиальным (см. также результаты третьего раздела настоящей работы). Действительно, если выполнена гипотеза благожелательности, то эффективность стимулирования в активной системе с нечеткой неопределенностью оказывается не меньше, чем в соответствующей детерминированной активной системе. При этом даже четко оптимальное решение (при α=1 и выборе элемента из множества Орловского) может оказаться более эффективным, чем детерминированное – например, если в условиях следствия 4.3.9 для любого $y \in A$ множество $\{\ z \in A_0 \mid \underset{\sim}{P}(z,y) = 1\ \}$ состоит более чем из одной точки.

Содержательно этот эффект можно объяснить следующим образом. Множество выбора АЭ в нечеткой АС было определено таким образом (см. использование принципа соответствия и определение множества недоминируемых альтернатив), что АЭ "одинаково устраивали" как максимально недоминируемые действия, так и "не очень оптимальные" (если выполнена гипотеза β-рациональности; при этом, правда, предельный переход к детерминированной задаче необходимо производить достаточно осторожно). Поэтому при использовании множества Орловского, если четко недоминируемых альтернатив несколько и все они с точки зрения АЭ эквивалентны, то соответствующее множество достижимости не уже, чем в детерминированном случае (см. (4.3.20), (4.3.22)). Если центр будет использовать при определении эффективности механизма стимулирования максимальный гарантированный результат (4.3.10), то множество 1-достижимости может оказаться собственным подмножеством множества P (ср. с результатами утверждений разделов 4.1 и 4.2). Поэтому результат пункта а) утверждения 4.3.8 вполне соответствует интуитивному представлению о том, что чем менее "требователен" АЗ (чем меньше β), тем ниже эффективность стимулирования - с уменьшением β действенность одних и тех же штрафов уменьшается.

Полученный результат кажется достаточно парадоксальным и с другой точки зрения. В начале настоящего раздела подчеркивалось, что рассматриваемая модель нечеткой АС является в некотором смысле аналогом вероятностной АС. В то же время известно, что эффективность стимулирования в вероятностной АС не превосходит эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной (см. раздел 3.1). На самом деле, аналогии между нечеткими и вероятностными АС достаточно условны - в частности, множества выбора в них определяются совершенно по-разному.

В качестве отступления перекинем "мостик" между нечеткими и вероятностными активными системами с внешней неопределенностью. Пусть A и A_0 компактны, а $\tilde{P}(z,y)$ непрерывна по обеим переменным и является нормальной. Можно попытаться "перевести" нечеткую информацию о состоянии природы в распределение вероятностей. Например, зависимость

$$(4.3.23a)\quad p(z,y) = \frac{\tilde{P}(z,y)}{\int_{A_0} \tilde{P}(t,y)\, dt}, \quad y \in A,\ z \in A_0$$

может рассматриваться как плотность распределения вероятности результата z при действии y, в некотором смысле "согласованная" с нечеткой информацией о состоянии природы. Если в полученной с использованием (4.3.23) вероятностной задаче множество выбора АЗ определить как множество допустимых действий, максимизирующих ожидаемую полезность АЭ, то для любого $y \in A$, такого, что $\mathrm{Supp}\ \underset{\sim}{P}(\cdot, y) = A_0$ получим, что эффективность стимулирования в "сконструированной" вероятностной активной системе строго меньше, чем в соответствующей детерминированной. В то же время, если выполнена ГБ, то в исходной нечеткой системе она может оказаться и строго больше.

Обратно, если $p(z,y)$ - вероятность результата $z \in A_0$ при действии $y \in A$, то нормальную функцию принадлежности нечеткого результата можно определить следующим образом:

$$(4.3.23б)\quad \underset{\sim}{P}(z,y) = \frac{p(z,y)}{\sup\limits_{t \in A_0} p(t,y)},\quad y \in A,\ z \in A_0.$$

Различие между эффективностями в этом случае интутивно можно объяснить тем, что при усреднении по (4.3.23а) АЭ "учитывает" все, в том числе и "плохие" результаты, а при выборе по НОП, индуцированному (4.3.23б), рассматривается только множество эквивалентных между собой β-недоминируемых действий.

Приведенные рассуждения вовсе не свидетельствуют о том, что в одном из двух (или в обеих) рассмотренных выше случаях задача была сформулирована "неправильно". С нашей точки зрения имеют право на существования оба подхода, которые в свою очередь не исключают возможности использования других альтернативных не менее "правильных" подходов. Просто при решении задачи стимулирования в каждом конкретном случае (в каждой реальной АС) необходимо исследовать адекватность модели. Например, при использовании (4.3.23а), (4.3.23б) следует представлять себе содержательный смысл того или иного преобразования.

Исследуем влияние неопределенности на эффективность стимулирования. Рассмотрим две нечеткие активные системы, отличающиеся лишь тем, что центр и активный элемент обладают нечеткой информацией $\underset{\sim}{P}_1(z,y)$-в первой АС и $\underset{\sim}{P}_2(z,y)$-во второй АС.

Будем говорить, что в первой АС участники обладают большей информацией, если выполнено

$$(4.3.24)\quad \forall\ y \in A,\ z \in A_0\quad \underset{\sim}{P}_1(z,y) \le \underset{\sim}{P}_2(z,y)$$

и обозначим K_1 и K_2 – эффективности стимулирования в первой и второй АС, соответственно.

Утверждение 4.3.10. Если выполнено А.4.3.1, то

$$\forall\ \beta \le \alpha \quad K_1^{\Gamma}(\beta) \ge K_2^{\Gamma}(\beta),\ K_1(\beta) \le K_2(\beta).$$

Справедливость утверждения следует из того, что для любого $y \in A$ множества в-уровня нечеткой функции $\underset{\sim}{P}_1(z,y)$, в силу (4.3.24), включают множества β-уровня нечеткой функции $\underset{\sim}{P}_2(z,y)$ (см. (4.3.9) и (4.3.10)).

В заключение настоящего раздела рассмотрим задачу стимулирования второго рода в активной системе с нечеткой информацией о состоянии природы и симметричной информированностью участников.

Если целевая функция центра имеет вид

$$(4.3.25)\quad \Phi\ (\ y\ ) = H\ (\ y\ ) + \chi\ (\ y\ ),$$

то максимальные затраты на стимулирование по реализации действия $\tilde{y} \in P$ равны

$$(4.3.26)\quad c_{FB}(\tilde{y}) = h\ (\ \tilde{y}\ ) - h\ (\ r^{\pm}\ ) + C.$$

Оптимальным решением является, например, квазикомпенсаторная система стимулирования вида:

$$(4.3.27)\quad \chi^{Qk}\ (\ \tilde{y},\ y\ ) = \begin{cases} c_{FB}(\tilde{y}),\ y = \tilde{y} \\ C,\ y \ne \tilde{y} \end{cases},$$

а оптимальным планом является точка

$$(4.3.28)\quad x^* = \operatorname*{Arg\,max}_{y \in P}\ \{\ H\ (\ y\ ) + h\ (\ y\ )\ \}.$$

Попытаемся провести прямую аналогию с нечеткой АС. В случае наличия нечеткой неопределенности о состоянии природы максимальные затраты на стимулирование по реализации действия $y \in Q\ (\ \tilde{y},\ \alpha\ )$, $\tilde{y} \in [\ z^-,\ z^+\ ]$ определяются (4.3.26). Система стимулирования (4.3.27), где $h = h(z)$ является максимальной, доставляющей максимум целевой функции АЭ в точке $\tilde{y}$. Оптимальной точкой плана в случае выполнения ГБ будет

$$x^* = \operatorname*{Arg\,max}_{\tilde{y} \in P}\ \max_{y \in Q(\tilde{y},\alpha)}\ \{\ H(y) + h(y)\ \}.$$

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий использование полученных выше результатов.

<u>Пример</u> <u>4.3.1</u> Пусть $A = A_0 = \mathbb{R}^1$; $h(z) = z - z^2/ 20$; $\Phi(y) = y$; $\underset{\sim}{P}(z,y) = e^{-\gamma(z-y)^2}$, где $\gamma > 0$, $C = 1.8$.

Тогда множество согласованных планов $P = [4;16]$, множество $S(1) = P$.

Фиксируем $\beta \in (0;1]$. Множество уровня β нечеткой функции $\underset{\sim}{P}(z,y)$ равно $[\ y - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln (1/\beta)}\ ;\ y + \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln (1/\beta)}\ ]$. Тогда

$$S(\beta) = [\ 4 - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln (1/\beta)}\ ;\ 16 + \frac{1}{\gamma} \sqrt{\ln (1/\beta)}\ ].$$

С уменьшением β множество достижимости расширяется (см. утверждение 4.3.10). С увеличением информации, содержащейся в нечетком сигнале $\underset{\sim}{P}(z,y)$, то есть с увеличением γ, множество достижимости сужается (см. утверждение 4.3.8).

Предположим теперь, что в рассматриваемом примере

$$\underset{\sim}{P}(z,y) = \begin{cases} 1, & z \in [y-1,y+1] \\ 0, & z \notin [y-1,y+1] \end{cases}, \quad y \in A.$$

Тогда, если центр использует систему стимулирования С-типа с $x^* = z^* = 16$, то, если выполнена гипотеза благожелательности, то центр может расчитывать на то, что АЭ выберет действие $y_1^* = 17$. При этом эффективность стимулирования равна $K_1 = \Phi(y_1^*) = 17$. В соответствующей детерминированной АС эффективность стимулирования равна $K_0 = \Phi(x^*) = 16$. Если гипотеза благожелательности не выполнена, то центр вынужден предполагать, что АЭ выберет действие $y_2^* = 15$; при этом эффективность стимулирования равна $K_2 = \Phi(\ y_2^*\ ) = 15$, то есть в рассматриваемом примере имеет место: $K_2 < K_0 < K_1$. ◦

Возможность использования механизмов с платой за информацию в рассматриваемой базовой модели проиллюстрируем следующим примером.

<u>Пример</u> <u>4.3.2.</u> Предположим, что за плату АС центр получает в рамках модели примера 4.3.1 возможность наблюдать действия АЭ, то есть полностью устраняет неопределенность.

Пусть $A = A_0 = \mathbb{R}^1$; $h(z) = z - z^2/20$; $H(y) = y$; $C = 1.8$.

Тогда, если центр использует систему стимулирования C-типа с планом $x^* = z^* = 16$, то, если гипотеза благожелательности не выполнена, то центр вынужден предполагать, что АЭ выберет действие $y^*_2 = 15$. При этом эффективность $K_2 = H (y^*_2) = 15$. В соответствующей детерминированной АС эффективность стимулирования равна $K_0 = H (x^*) = 16$.

Заплатив АС за наблюдение действий АЭ, центр может побудить АЭ выбрать действие $y^* = 10 \left(1 + \sqrt{\frac{1.8 - \Delta C}{5}} \right)$. Из условия $y^* \geq y^*_2$ получаем, что $\Delta C \leq 0.55$. о

Таким образом, в АС с нечеткой внешней неопределенностью и симметричной информированностью оптимальными являются системы стимулирования C- и K-типа, гарантированная эффективность которых не выше, чем в соответствующих детерминированных АС и убывает с ростом неопределенности.

4.4. Механизмы стимулирования в активных системах с внешней нечеткой неопределенностью и асимметричной информированностью

В отличие от моделей, рассмотренных в разделе 4.3, ниже предполагается, что АЭ знает реализовавшееся значение состояния природы, а центр на момент принятия решений имеет о нем только нечеткую информацию (М13), то есть в данной базовой модели: $\hat{\Omega} = \hat{r}$, $I = \{ \hat{r}, \hat{в} \}$, $I' = \{ \hat{r}, \tilde{P} \}$.

Из технологической зависимости $z = z (y, в)$ (см. раздел 3.1) АЭ может определить при известном состоянии природы $в \in \Omega$ зависимость результата своей деятельности от выбираемого действия: $z = z (y)$. Будем считать, что имеющаяся у центра нечеткая информация согласована с истинным значением внешнего фактора в следующем смысле:

А.4.4.1. $\forall\, y \in A\ z(y) \in \operatorname{Arg} \max\limits_{z \in A_0} \tilde{P}(z,y)$, а функция $\tilde{P}(z,y)$ 1-нормальна.

Пусть центр назначает систему штрафов $\chi \in M$. Обозначим

$$(4.4.1)\ P_z(\chi) = \operatorname{Arg}\max_{z \in A_0} \{ h(z) - \chi(z) \} \subseteq A_0$$

множество точек максимума целевой функции АЭ при использовании центром штрафов χ.

В силу гипотезы рационального поведения при выборе действия АЭ будет стремиться максимизировать свою целевую функцию, то есть выбирать действия из множества $P(\chi) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} f\ (\ z(y)\ ) \subseteq A$. Но, к сожалению, в силу асимметричной информированности этот выбор АЭ неизвестен центру. Определим, что может предсказать центр о выборе АЭ на основании нечеткой информации и ее согласованности.

Обозначим $Q(\chi) = \{ y \in A \mid \exists\ x \in P_z(\chi),\ x \in \operatorname{Arg}\max_{z \in A_0} \underset{\sim}{P}(z,y) \}$ – множество тех действий АЭ, которые при использовании центром системы штрафов χ могут (с учетом нечеткой информации) привести к результату деятельности, одновременно максимизирующему целевую функцию АЭ и информационную функцию. Понятно, что $\forall\ \chi \in M$ справедливо вложение $P(\chi) \subseteq Q(\chi)$, причем если при любых действиях АЭ $\underset{\sim}{P}$ имеет единственную точку глобального максимума, то центр может однозначно восстановить зависимость $z(y)$ и задача, фактически, сводится к детерминированной (см. раздел 4.2).

Таким образом, $Q(\chi)$ – подмножество множества A, которому заведомо принадлежит выбор АЭ. В рамках заданной информированности центр не может сузить это множество, поэтому эффективность стимулирования определим следующим образом:

$$(4.4.2)\ K\ (\ \chi\ ) = \min_{y \in Q(\chi)} H\ (\ y\ ),$$

а задача синтеза будет заключаться в выборе допустимой системы стимулирования, максимизирующей эффективность (4.4.2).

Исследуем свойства множеств $P\ (\chi)$ и $Q(\chi)$. Для любых полунепрерывных снизу допустимых штрафов множество $P_z(\chi)$ не пусто (h-квазиоднопиковая функция, A и A_0 – компакты, а χ ограничена и полунепрерывна снизу). Поэтому в силу 1-нормальности информационной функции непусто и множество $Q(\chi)$. Более того, если, например, состояние природы является аддитивной помехой (см. раздел 3.1), то множество $Q(\chi)$ связно и замкнуто.

Из определения эффективности (4.4.2) следует, что чем меньше "лишних" точек максимума будет иметь целевая функция АЭ, тем выше эффективность стимулирования. Сформулируем это утверждение корректно.

Рассмотрим две функции штрафов χ_1 и χ_2 из класса M, такие, что $P_z(\chi_1) \subseteq P_z(\chi_2)$, и две информационные функции $\underline{P}_1$ и $\underline{P}_2$, такие, что $\forall\ y \in A,\ z \in A_0\ \underline{P}_1(z,y) \le \underline{P}_2(z,y)$.

Лемма 4.4.1. Если выполнено А.4.4.1, то $K(\chi_1) \ge K(\chi_2)$.

Справедливость утверждения леммы следует из определений и свойств: эффективности стимулирования, множеств $Q(\chi)$ и $P_z(\chi)$.

Отметим, что лемма 4.4.1 справедлива в предположении включения $P_z(\chi_1) \subseteq P_z(\chi_2)$. Если отказаться от этого условия, то может оказаться, что приведенный результат не имеет места. Несмотря на, казалось-бы, тривиальный характер леммы 4.4.1, она дает мощный инструмент для анализа задачи стимулирования. В частности, справедливы следующие утверждения.

Утверждение 4.4.2. Если выполнено А.4.4.1, то:

а) система стимулирования С-типа оптимальна в активной системе с внешней нечеткой неопределенностью и асимметричной информированностью;

б) система стимулирования К-типа не оптимальна в активной системе с внешней нечеткой неопределенностью и асимметричной информированностью. ➜

Пример 4.4.1. Пусть целевая функция центра строго монотонна по действию АЭ, а $z = y + в$, причем z с равной возможностью принимает значения в Δ-окрестности действия АЭ. Тогда при использовании системы стимулирования К-типа эффективность равна $K_k = H(z^- - \Delta)$, а при использовании ε-оптимальной системы стимулирования С-типа эффективность равна $K_c = H(z^+ - \Delta - a)$, где δ-малое положительное число. Очевидно, при $z^+ > z^-$, найдется $\delta > 0$, такое, что $K_k < K_c$. о

Следующий результат позволяет выявить влияние неопределенности на эффективность стимулирования.

Утверждение 4.4.3. Если выполнено А.4.4.1, то в активной системе с внешней нечеткой неопределенностью и асимметричной информированностью с ростом неопределенности эффективность стимулирования не увеличивается.

Результат утверждения 4.4.3 обосновывается рассмотрением эффективностей стимулирования (4.4.2) с учетом того, что $\forall\ y \in A$, $z \in A_0$ $\underset{\sim}{P}_1(z,y) \le \underset{\sim}{P}_2(z,y)$.

<u>Следствие</u> <u>4.4.4.</u> Если выполнено А.4.4.1, то в активной системе с внешней нечеткой неопределенностью и асимметричной информированностью эффективность стимулирования не выше, чем в соответствующей детерминированной АС.

Отметим, что при предельном переходе к детерминированному случаю все приведенные выше результаты переходят в соответствующие результаты детерминированной теории (см.главу 1).

<u>Пример</u> <u>4.4.2.</u> В условиях примера 4.4.1 положим:

$$h(z) = z - z^2/2r,\ H(y) = y,\ \underset{\sim}{P}(z,y) = \begin{cases} 1,\ z \in U_\Delta(y) \\ 0,\ z \in U_\Delta(y) \end{cases},\ z = y + в,$$

$\theta \in [-\Delta,\Delta]$, $\Delta < \sqrt{2rC}$, $\hat{в} = \Delta/2$. Тогда $z(y) = y + \Delta/2$.

При использовании системы стимулирования К-типа

$$Q(\chi_k) = [\ r - \sqrt{2rC} - \Delta,\ r + \sqrt{2rC} + \Delta\ ],$$

$$K(\chi_k) = \min_{y \in Q(\chi_k)} H(y) = r - \sqrt{2rC} - \Delta.$$

При использовании гарантированно оптимальной системы стимулирования С-типа с точкой скачка $x^* = z^+ - \delta$, где $\delta > 0$, получаем:

$$Q(\chi_c) = [\ r + \sqrt{2rC} - \Delta - \delta,\ r + \sqrt{2rC} + \Delta - \delta\ ],$$

$$K^\Gamma(\chi_c) = \min_{y \in Q(\chi_c)} H(y) = r + \sqrt{2rC} - \Delta - \delta.$$

Очевидно, $\exists\ \delta > 0$, такая, что $K(\chi_k) < K^\Gamma(\chi_c)$, причем с ростом неопределенности (увеличением Δ) эффективности $K(\chi_k)$ и $K^\Gamma(\chi_c)$ уменьшаются, а при предельном переходе $A \to 0$ $K^\Gamma(\chi_c)$ переходит в гарантированную эффективность стимулирования в соответствующей детерминированной АС.

Основное уравнение платы за информацию для данного примера имеет вид: $y^*(\Delta C) = r + \sqrt{2r(C-\Delta C)} - \Delta(\Delta C) - \delta \to \max\limits_{\Delta C \in [0,C]}$. o

В заключение настоящего раздела исследуем возможность использования в рассматриваемом классе АС с неопределенностью механизмов с сообщением информации.

Предположим, что АЭ сообщает центру информацию о состоянии природы - оценку $s \in \Omega$. Центр, используя эту оценку, может найти функцию штрафов, которая "побуждала" бы АЭ выбирать наиболее благоприятное для центра действие: $K(\chi) = \min_{y \in Q(s)} H(y)$, где $Q(s) = \mathrm{Arg} \max_{y \in A} \{ h (z(y,s)) - \chi (z(y,s)) \}$. Однако, очевидно, что такой механизм манипулируем.

Отметим, что рассматриваемая модель близка к рассмотренной в разделе 2.4, с тем лишь исключением, что центр имеет дополнительную нечеткую информацию. Понятно, что сообщение АЭ s должно быть согласовано с этой информацией, а именно:

$$\forall\ y \in A\ z(y,s) \in \mathrm{Arg} \max_{z \in A_0} \underset{\sim}{P} (z, y).$$

В противном случае центр имеет возможность непосредственно уличить АЭ в искажении информации. Понятно, что наличие дополнительной информации у центра уменьшает возможности АЭ по манипулированию и эффективность стимулирования при этом не ниже, чем в соответствующей модели раздела 2.4.

Следует признать, что введенное определение согласованности информации является не единственно возможным. Например, в более общем случае центр может считать, что сообщение АЭ согласовано с имеющейся у него нечеткой информацией, если выполнено: $\forall\ y \in A$ $\underset{\sim}{P} (z(y,s), y) \geq \alpha$, где α некоторое число из $(0,1]$.

Если имеются несколько АЭ, функционирующих в одинаковых условиях и центр имеет нечеткую информацию $\underset{\sim}{P}_i(z, y)$ о каждом из них, $i \in I$, то он, во-первых, имеет возможность объективно уменьшить существующую неопределенность, вычислив "обобщенную" информационную функцию: $\forall\ y \in A,\ z \in A_0$ $\underset{\sim}{P} (z, y) = \min_{i \in I} \underset{\sim}{P}_i(z, y)$, что само по себе может позволить увеличить эффективность. Во-вторых, целесообразно попросить АЭ сообщить информацию о состоянии природы, проверить ее на соответствие обобщенной информационной функции и затем использовать механизм, сконструированный в разделе 2.4.

Таким образом, в активных системах с нечеткой внешней неопределеностью и асимметричной информированностью оптимальными являются системы стимулирования С-типа (компенсаторные штрафы при этом не оптимальны), гарантированная эффективность которых не выше, чем в соответствующих детерминированных АС и не возрастает с ростом неопределенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует признать, что основной акцент в настоящей работе был сделан на теоретическое исследование аналитических методов решения базовых задач стимулирования, что в условиях ограниченного объема привело к "ущемлению" обзорной и прикладной части. Первое упущение отчасти компенсируется подробными ссылками на достаточно полные обзоры, второе - приводимыми ниже ссылками на работы, содержащие описание успешного прикладного использования теоретических результатов. Наряду с этим в заключении кратко формулируются итоги исследования базовых моделей, обсуждается проблема адекватности построенных математических моделей реальным системам и, естественно, проводится анализ перспективных направлений дальнейших исследований теоретико-игровых моделей стимулирования в социально-экономических системах.

Основные результаты и выводы

1. Теоретико-игровое моделирование механизмов стимулирования в социально-экономических системах является на сегодняшний день одним из наиболее эффективных и конструктивных методов их исследования.

2. Единый методологический подход к разработке и исследованию базовых математических моделей механизмов стимулирования в активных системах заключается в общности их описания, технологии и техники исследования и использует при решении задач анализа и синтеза свойства зависимости множеств реализуемых действий (и/или минимальных затрат на стимулирование) от параметров модели активной системы.

3. Общая формулировка задачи стимулирования в активных системах (включающая известные постановки ТАС, ИТИС, ТК и ТР) возможна при понимании стимулирования как комплексного целенаправленного внешнего воздействия на компоненты деятельности управляемой системы и процессы их формирования.

4. Система классификаций задач стимулирования по основаниям: структура АС, число периодов функционирования, порядок функционирования, число АЭ, информированность участников АС, тип

неопределенности и вид неопределенности позволяет выделить нласс базовых задач (одноэлементных, статических, со стандартным порядком функционирования) стимулирования, результаты исследования которых являются основой решения задач анализа и синтеза механизмов стимулирования в сложных активных системах.

5. Результаты решения базовых задач стимулирования (оптимальные системы стимулирования и соответствующие предположения) в детерминированных активных системах и системах с интервальной, вероятностной и нечеткой неопределенностью приведены в таблице 3.

6. Имеют место следующие свойства оптимальных решений задач стимулирования:

- связность множества реализуемых действий;

- монотонность эффективности стимулирования по ограничениям механизма;

- в активных системах, функционирующих в условиях неопределенности, независимо от ее типа и вида, гарантированная эффективность стимулирования не выше, чем в соответствующих детерминированных системах, причем с ростом неопределенности гарантированная эффективность стимулирования не возрастает.

7. Возможным способом повышения эффективности стимулирования в условиях неопределенности является использование механизмов с сообщением информации и платой за информацию.

Прикладные модели механизмов стимулирования

При построении комплексов организационных механизмов управления реальными социально-экономическими системами требуется определить набор задач, успешное решение которых подразумевает достижение поставленных целей (см. описание структуры деятельности), и выбрать соответствующие этим задачам механизмы достижения целей. Эта последовательность является достаточно общей, причем механизмы стимулирования в широком смысле, включающие процедуры планирования, играют в этом комплексе существенную роль и находят применение от этапа целеполагания и выбора вариантов до этапа оперативного управления.

Приведенные в настоящей работе теоретические результаты анализа теоретико-игровых моделей механизмов стимулирования могут рассматриваться как своеобразный конструктор, "детали" которого используются при создании тех или иных конкретных механизмов. В силу этой унифицированности, а также ограниченного объема настоящей работы, приведем в качестве примеров ссылки на работы по прикладным моделям, содержащие детальное описание результатов прикладных исследований и внедрения.

Обширным классом прикладных задач, в которых были успешно использованы результаты исследования теоретико-игровых моделей механизмов стимулирования, являются механизмы управления проектами. Среди них механизмы: комплексного оценивания, распределения ресурса в условиях неопределенности, самофинансирования, страхования, пересоглашения контрактов, оперативного управления риском, контрактные механизмы стимулирования [6,15,36 и др.]. Наряду с механизмами управления проектами, следует упомянуть: экономические механизмы управления безопасностью [3,50,52,53 и др.], механизмы управления качеством подготовки специалситов [34], а также подчеркнуть высокую эффективность использования полученных теоретических результатов в качестве содержания и форм организации учебного процесса в ВУЗах, системах повышения квалификации работников высшего образования и др. [31,34].

Проблема адекватности моделей

При решении задач синтеза оптимальной функции стимулирования как в детерминированных активных системах (глава 1), так и в АС с неопределенностью (главы 2-4), предполагалось, что на момент принятия решений и центр, и исследователь операций обладают достоверной информацией о тех параметрах АС, которые не относились к неопределенным. Так, например, при рассмотрении детерминированных и вероятностных АС с внешней неопределенностью считалось, что множество допустимых действий АЭ, его функция дохода (затрат) и т.д. известны центру. Однако, следует помнить, что исследуются <u>модели</u> реальных социально-экономических систем. Поэтому, так или иначе (особенно на этапе внедрения и практического использования теоретических разработок), возникает вопрос об адекватности модели реальной моделируемой системе и, следовательно, возникает необходимость исследования зависимости оптимальных решений изучаемых задач, во-первых, от начальных данных - параметров модели (проблема "микроадекватности") и, во-вторых, от предположений, вводимых при построении моделей (проблема "макроадекватности").

"Микроадекватность"

Представим себе следующую ситуацию. Пусть мы решили задачу стимулирования в детерминированной АС, полагая, что параметры модели достаточно точно соответствуют (или максимально возможно в рамках данного описания близки к) параметрам некоторой реальной системы. А что будет, если параметры моделируемой системы "немного" отличаются от параметров реальной АС ? Получается, что мы решали задачу стимулирования не для "той" активной системы. Отрицать такую возможность, естественно, нельзя. Поэтому необходимо исследовать будет ли система стимулирования, оптимальная в рассматриваемой модели, оптимальной и для реальной АС, насколько снизится эффективность стимулирования (в общем случае - управления) из-за неадекватности модели, какие из оптимальных систем стимулирования наиболее "устойчивы" по параметрам модели и т.д. Иначе говоря, необходимо исследовать корректность решаемых задач, то есть - устойчивость принципов оптимальности [40].

Неадекватность модели, обусловленная неточным знанием параметров моделируемой системы или какими-либо еще факторами, может рассматриваться как одна из разновидностей неопределенности, несколько отличающаяся от описанных выше. Отличие заключается в следующем. Будем различать два случая: в первом случае центр (а задача стимулирования, решается с позиций оперирущей стороны - центра) знает, что имеет неполную информацию о том или ином параметре, то есть он знает, что имеет место неопределенность (того или иного типа, вида и т.д.); во втором случае центр (и исследователь операций вместе с ним) не знают о неадекватности модели. Первый случай соответствует классу АС (точнее - классу моделей реальных социально-экономических систем) с неопределенностью в традиционном понимании, а второй случай - неопределенности, обусловленной незнанием. Действительно, если бы исследователь операций (и оперирующая сторона) знал, что модель не является адекватной - например, имел бы информацию о том, что реальная функция затрат отличается от используемой в модели и лежит, например, в определенном диапазоне, то в соответствии с гипотезой рационального поведения в условиях неопределенности он должен был бы учесть эту информацию и скорректировать решаемую задачу. В случае такой корректировки для решения новой, "правильной" задачи можно использовать приведенные выше результаты изучения АС с неопределенностью. Поэтому переходя к исследованию эффективности стимулирования с точки зрения неопределенности, обусловленной незнанием (проблема адекватности модели), следует взглянуть на модель "снаружи", именно как на модель некоторой социально-экономической системы.

Следует признать, что сформулированная проблема адекватности (точнее - проблема микроадекватности, так как структура модели предполагается правильной) моделей активных систем, к сожалению, пока не привлекла должного внимания специалистов и требует дальнейших исследований.

Качественно, можно предложить несколько возможных путей. Пусть известен класс АС, которому заведомо принадлежит моделируемая активная система. Если исследователь операции хочет на основании анализа модели АС выработать рекомендации по оптимальному или удовлетворительному с точки зрения эффективности стимулированию в реальной АС, то, во-первых, он может максимизировать гарантированный результат по известному множеству, то есть решать задачу стимулирования в активной системе с интервальной (или какой-либо другой) неопределенностью (см. раздел 2.1 и др.). Во-вторых, возможно увеличить устойчивость оптимального решения за счет увеличения затрат на стимулирование. Например, если имеется возможность увеличить верхнее ограничение механизма стимулирования, то можно реализовывать то же действие, что и ранее, но с бо́льшим размахом функции штрафов, что позволит увеличить устойчивость решения (множество реальных АС, в которых используемая система стимулирования будет оставаться оптимальной). В-третьих, можно поступиться эффективностью, уменьшив ее за счет реализации, например, меньшего действия и определить систему стимулирования (быть может и не "оптимальную"), имеющую максимальную гарантированную эффективность для заданного класса АС.

"Макроадекватность"

Как неоднократно подчеркивалось выше, математическое моделирование является одним из основных конструктивных методов исследования механизмов стимулирования в АС. Помимо анализа собственно модели, необходимо изучение ее адекватности. Выше мы обсудили проблему "микроустойчивости" оптимального решения задачи стимулирования, то есть качественно рассмотрели что изменится, если окажется, что параметры модели изменились, оставаясь в рамках введенных предположений. Ниже формулируется проблема "макроадекватности": каким классам реальных АС соответствуют введенные предположения, а, следовательно и результаты исследования моделей, построенных с использованием этих предположений.

Все результаты, полученные в настоящей работы, существенно использовали предположение о том, что функции дохода АЭ являются квазиоднопиковыми (а иногда дополнительно предполагалась их вогнутость), а функции затрат монотонными и иногда выпуклыми. Полунепрерывность сверху функций дохода (непрерывность функции затрат) можно, помимо содержательного, интерпретировать как чисто техническое требование - в противном случае, например, максимальные множества реализуемых действий оказались бы не замкнутыми, что привело бы к необходимости рассмотрения ε-оптимальных систем стимулирования.

Предположения о вогнутости функции дохода и монотонности (и выпуклости) функции затрат являются стандартными для большинства как чисто экономических [59,62], так и экономико-математических моделей [28,31,58]. Можно привести множество обоснований этим предположениям: начиная от теории предельной полезности и заканчивая удобством для формального анализа. В то же время, известно, что в ряде случаев подобные "производственные функции" оказываются немонотонными, даже в краткосрочном периоде [59]. Например, кривые предпочтения "труд-досуг" могут иметь точку максимума (подробные описания эффектов замещения и дохода, а также влияния внешних факторов, приведены в [62,90]) - с ростом зарплаты человек может все более ценить свободное или рабочее время. Таким образом, единого и универсального описания предпочтений человека в дилемме "заработная плата - свободное время" на сегодняшний день не существует. Поэтому определим сначала чисто гипотетически какими могут быть эти предпочтения для случая, например, трудовых контрактов (см. прикладные модели трудовых контрактов в рамках ТК: [9,64,65,73,76]), а затем сравним теоретические построения с результатами экспериментов и вводимыми выше предположениями.

Пусть используется сдельная оплата труда с почасовой ставкой β (см. описание пропорциональных истем стимулирования в главе 1). При рабочем дне в t часов доход составит $h = \beta\ t$. Предположим, что $f(\beta)$ – зависимость числа часов, которые АЭ готов (и желает) отработать при ставке β. Функция затрат АЭ может интерпретироваться как обратная к $t(h)$. Гипотетическая зависимость $f(\beta)$ представлена на рисунке 11 (см. также [71,90]). Приведем содержательные интерпретации.

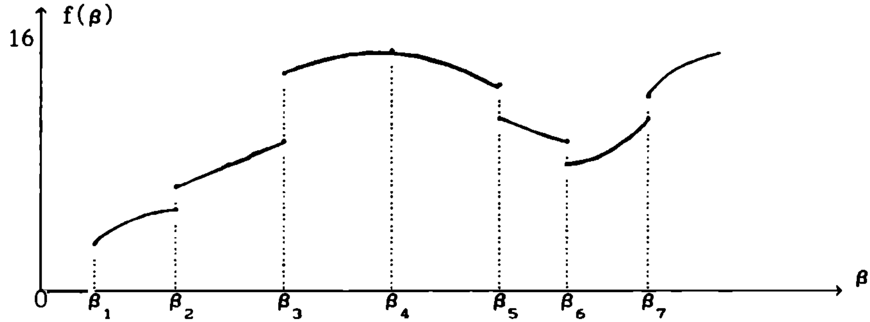

Рис. 11. Зависимость желательной продолжительности рабочего дня от ставки заработной платы.

Участок $0-\beta_1$ соответствует тому, что при малой оплате АЭ предпочтет вообще не работать. На отрезке $\beta_1-\beta_2$ функция $f(\beta)$ вогнута – привлекательность зарплаты снижается. Разрывы могут интерпретироваться как изменение системы предпочтений, технологии, внешних условий и т.д. Линейный участок $\beta_2-\beta_3$ соответствует тому, что каждый последующий отработанный час приносит пропорциональное увеличение дохода. Далее привлекательность зарплаты постепенно убывает и кривая достигает максимума в точке β_4. Линейный участок $\beta_5-\beta_6$ (если он имеет единичный наклон) соответствует увеличению свободного времени при сохранении суммарного дохода [59,62]. Далее, начиная с β_6, число отрабатываемых часов начинает расти - например, при изменении системы предпочтений и возможности качественных изменений в не столь далекой перспективе. Конечно, приведенная на рисунке 11 гипотетическая кривая достаточно экзотична, однако исключать такую возможность априори нельзя. Введенные выше в настощей работе предположения ограничивают диапазон рассмотрения отрезком $\beta \in [0, \beta_4]$ при $\beta_1 = 0$ (LCA равно нулю).

В работе [96] отмечается, что функция удовлетворенности человеком от участия в организации (работы) в зависимости от вознаграждения (морального и материального) не является линейной функцией. Она монотонна и кусочно-непрерывна с насыщением. Более того, эта функция может быть однопиковой, что объяснялось либо сужением когнитивного поля, либо возникновением сильного эмоционального напряжения [97]. Таким образом, кривая приведенная на рисунке 11 не противоречит существующим представления о свойствах аналогичных зависимостей и обобщает их.

Примерный вид функции $\tilde{c}(t)$ затрат, "обратной" к приведенной на рисунке 11 зависимости $f(\beta)$, приведен на рисунке 12.

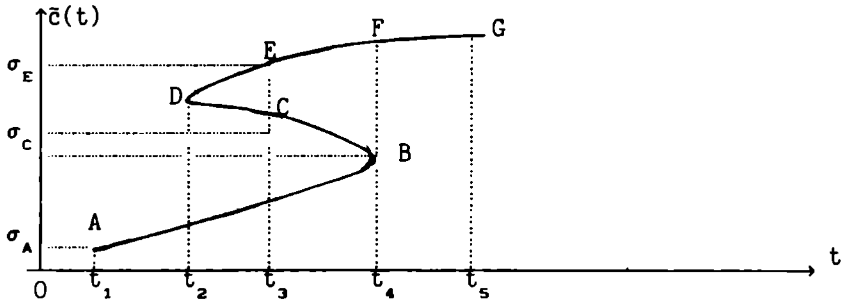

Рис. 12. Функция "затрат" при почасовой оплате

На участке OB затраты возрастают "нормально". На участке BC АЭ начинает больше ценить свободное время, а на участке DF привлекательность зарплаты опять превышает ценность рабочего времени. Отметим, что для того, чтобы побудить АЭ отработать t_1 часов необходимо заплатить ему как минимум σ_A, а для того, чтобы побудить отработать t_3 часов - как минимум - σ_C. Если продолжать увеличивать выплаты, то при $\sigma = \sigma_E > \sigma_C$ АЭ опять-же предпочтет t_3-часовой рабочий день. Этот "парадокс" обусловлен немонотонностью функции затрат (точка D качественно соответствует точке β_6 на рисунке 11). Действие t_5 выбирается элементом уже однозначно при назначении соответствующей зарплаты (точка G). На первый взгляд, используемые в настоящей работе предположения свидетельствуют, что мы "работаем" на участке ($OB \cup FG$). Однако, вспомним, что в задаче синтеза оптимальной функции стимулирования требуется найти минимальные затраты на стимулирование. Понятно, что незачем платить σ_E для реализации t_3, так как плата σ_C вполне достаточна. Поэтому монотонность (и вогнутость) функции затрат АЭ вполне адекватны в контексте рассматриваемой задачи - следует использовать "минимальную" ветвь функции затрат (необходимо признать, что при этом мы не учитываем ряд факторов, касающихся морально-психологических аспектов стимулирования).

Проведенные автором эксперименты, а также имеющиеся на сегодняшний день экспериментальные данные [62,71,88,90,96], свидетельствуют, что предположения о квазиоднопиковости функции дохода и монотонности (и выпуклости) функции затрат хотя и не выполняются всегда, но имеют место в значительном числе исследованных случаев. Отметим, что $\tilde{c}(t)$ определялась как функция, "обратная" к $f(\beta)$. В то же время, следует иметь в виду, что экспериментальные зависимости $\tilde{c}(t)$ и $c(t)$ (последняя отражает минимальную зарплату, за которую работник согласен отработать заданное количество времени) могут при качественном сходстве количественно различаться довольно сильно.

Перспективы

На рисунке 2 представлена схема управления АЭ в рамках используемого представления структуры его деятельности. Как указывалось во введении, под стимулированием в узком смысле мы понимаем воздействие центра на выбор АЭ задач его деятельности при фиксированных потребностях, мотивах, целях, технологии и.т.д. Комплексное рассмотрение возможностей управления центром всеми процессуальными компонентами деятельности АЭ представляется достаточно перспективным, требующим, правда, совместных усилий специалистов по теории управления, психологов и социологов. В первом приближении, учитывая приведенные в настоящей работе результаты, можно сказать, что разработанная на сегодняшний день методология, технология и техника исследования применимы, если на допустимом множестве стратегий АЭ заданы его скалярные предпочтения, зависящие от управления со стороны центра и, быть может, неопределенных или неизвестных факторов. Во втором приближении необходимость учета и согласования управлений одновременно несколькими различными компонентами деятельности АЭ представляется несравненно более сложной задачей.

В рамках используемой системы классификаций задач стимулирования были выделены базовые классы АС, детально описываемые в настоящей работе. Выше отмечалось, что, практически, вне рассмотрения остаются и, соответственно, являются предметом будущих исследований: многоуровневые, многоэлементные и динамические АС, АС с нестандартным порядком функционирования, АС со смешанной неопределенностью и др. (примеры использования результатов исследования базовых моделей при решении задач стимулирования в некоторых из перечисленных классов АС приведены в [9,10,14,15,44,45,47,51 и др.]).

Кроме того, следует признать, что даже в базовых моделях не все возможные случаи получили равное и заслуженное внимание. Так, например, в настоящей работе в базовых моделях вероятностных и нечетких АС с асимметричной информированностью недостаточно полно рассмотрены возможности использования механизмов с сообщением информации и т.д.

Рассмотренные модели АС действительно являются базовыми - простейшими по сравнению с более сложными упомянутыми выше АС. Поэтому, с одной стороны, использование приведенных результатов может оказаться эффективным при анализе сложных АС (например, результаты исследования одноэлементной АС позволили легко решить задачу стимулирования в многоэлементной АС со слабо связанными элементами - см. главу 1), с другой стороны нужно четко представлять, что чисто механическое перенесение результатов недопустимо, так как оно может привести к потере качественно новой специфики сложных активных систем [44]. То есть приведенные результаты позволяют выдвинуть гипотезу о целесообразности и эффективности использования предложенного методологического подхода к исследованию базовых задач при решении широкого класса задач стимулирования в сложных социально-экономических системах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМАЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство утверждения 1.1.

Фиксируем произвольное $i \in I$. Очевидно, χ_i^c удовлетворяет А.1.2. Выше было показано, что Q_i - выпуклые замкнутые ограниченные множества. Планы y_i^-, y_i^+ являются согласованными в силу своего определения. Докажем максимальность множества $Q_i(\chi_i^c)$.

Предположим, что существует система стимулирования $\tilde{\chi}_i$, удовлетворяющая А.1.2 и имеющая согласованный план $\tilde{x}_i$, не принадлежащий множеству $Q_i(\chi_i^c)$. Для определенности положим $\tilde{x}_i > y_i^+$. Тогда по определению множества согласованных планов имеет место: $h_i(\tilde{x}_i) - \tilde{\chi}_i(\tilde{x}_i,\tilde{x}_i) \geq h_i(y_i) - \tilde{\chi}_i(\tilde{x}_i,y_i)\ \forall\ y_i \in A_i$.

Выберем $y_i = r_i$. Тогда $h_i(\tilde{x}_i)-\tilde{\chi}_i(\tilde{x}_i,\tilde{x}_i) \geq h_i(r_i)-\tilde{\chi}_i(\tilde{x}_i,r_i)$.

Так как $y_i^+ \geq r_i$ и мы предположили, что $\tilde{x}_i > y_i^+$, то по определению y_i^+ и А.1.3: $h_i(r_i) - h_i(\tilde{x}_i) > C_i$.

Следовательно, имеет место $\tilde{\chi}_i(\tilde{x}_i,r_i) - \tilde{\chi}_i(\tilde{x}_i,\tilde{x}_i) > c_i$, что противоречит А.1.2. Случай $\tilde{x}_i < y_i^-$ рассматривается полностью аналогично.

Доказательство утверждения 1.2б.

Фиксируем произвольное действие t^*. При использовании системы стимулирования С-типа минимальные затраты на реализацию действия t^* равны $c(t^*)$. Как отмечалось выше, при использовании сдельной оплаты АЭ выбирает действие из условия: $\frac{dc(t^*)}{dt} = \beta$. Затраты на стимулирование при этом равны βt^*. Предположим, что затраты на стимулирование при использовании системы стимулирования С-типа строго больше, чем при сдельной оплате (это предположение эквивалентно тому, что эффективность системы стимулирования С-типа строго меньше). Подставляя выражение для β, получим, что $c(t^*) > \frac{dc(t^*)}{dt}\, t^*$. Последнее неравенство в рамках А.1.4 может иметь место только при строго вогнутой функции затрат АЭ. Противоречие.

Отметим, что если $c'(0) = 0$, то при любой неотрицательной ставке зарплаты реализуемо строго положительное действие. Если же ставки ограничены величиной β_{max} и $c'(0) > \beta_{max}$, то сдельная оплата бессмысленна - АЭ все равно выберет действие с минимальными затратами - LCA (Least Cost Action). При использовании систем стимулирования С-типа, непрерывной функции затрат и строго положительном ограничении механизма максимальное реализуемое действие всегда отлично от LCA.

Доказательство леммы 1.3.

Предположим, что существует $i \in I$ и существует функция штрафов χ_i, удовлетворяющая A.1.2 такая, что $\exists\ \tilde{y}_i \in P_i(\chi_i)$ и $\tilde{y}_i \notin [y_i^-, y_i^+]$. Положим для определенности, с учетом леммы 1.1, $\tilde{y}_i > y_i^+$. Так как $\tilde{y}_i$ принадлежит множеству решений игры, то

$$h_i(\tilde{y}_i) - \chi_i(\tilde{y}_i) \ge h_i(y_i) - \chi_i(y_i) \quad \forall\ y_i \in A_i .$$

Выберем $y_i = r_i^{\pm}$ и обозначим $h_i(r_i^{\pm})=h_i^{max}$. Тогда имеет место:

$$h_i^{max} - h_i(\tilde{y}_i) \le \chi_i(r_i^{\pm}) - \chi_i(\tilde{y}_i).$$

Так как $\tilde{y}_i > r_i^{*}$, то по определению y_i^* получаем, что левая часть неравенства строго больше C_i - противоречие с A.1.3.

Доказательство леммы 1.5.

Пусть функция штрафов $\chi_2 \in M$ удовлетворяет (1.10) и з $\tilde{y} \in P(\chi_2)$, $\tilde{y} < y^*$ и $y^* \notin P(\chi_2)$. Из $y^* \in P(\chi_1)$ следует, что $h(y^*) - \chi_1(y^*) \ge h(y) - \chi_1(y)\ \forall\ y \ge r$.

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{y} \in P(\chi_2)\\ y^* \notin P(\chi_2)\end{array}\right\} \rightarrow h(\tilde{y}) - \chi_2(\tilde{y}) > h(y^*) - \chi_2(y^*).$$

Подставим в первое неравенство $y = \tilde{y}$ и сложим его со вторым неравенством. Получим: $-\chi_1(y^*)-\chi_2(\tilde{y}) > -\chi_1(\tilde{y})-\chi_2(y^*)$. Из условий леммы следует, что $\chi_1(y^*) < 0$ - противоречие.

Доказательство леммы 1.6.

Пусть существует функция штрафов $\chi_2 \in M$, удовлетворяющая (1.11), такая, что $\exists\ \tilde{y} \in P(\chi_2)$, $r \le \tilde{y} < y^*$ и $y^* \notin P(\chi_2)$.

Следуя доказательству леммы 1.5, получаем, что $\chi_2(\tilde{y}) < \chi_1(\tilde{y})$ - противоречие.

Доказательство утверждения 1.8.

Обозначим $h(y_i) = h_i$, $\chi(y_i) = \chi_i$, $i=\overline{1,n}$. Если известна функция дохода $h(y)$, то, определяя $\sigma_{ij} = \frac{1}{n}(h_i - h_j)$, $i,j=\overline{1,n}$, получим матрицу Σ, элементы которой удовлетворяют (1.19). Обратно, по заданной матрице Σ, элементы которой удовлетворяют (1.19), находим $h_i = q_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}$, $i=\overline{1,n}$. Затраты на стимулирование в обоих случаях одинаковы.

Доказательство утверждения 2.1.2.

В силу предположений относительно функции затрат $\forall\ \hat{r} \in \Omega$ $y^-(\hat{r}) = 0$, то есть левая граница множества решений игры совпадает с LCA. Правая граница множества решений игры:

$$y^+(\hat{r}) = \max \{ y \in A \mid c(y,\hat{r}) \le C \}.$$

В силу предположения A.2.1.1. $\forall\ \hat{r} \in \Omega$ $y^+(\hat{r}) \ge y^+$.

Доказать утверждение 2.1.2 можно и другим способом. Фиксируем некоторое $\tilde{y} \in A$, такое, что $c(\tilde{y}, D) \le C$. Из A.2.1.1. следует, что $c(\tilde{y}, D) \ge c(\tilde{y}, \hat{r})$, то есть $c(\tilde{y}, \hat{r}) \le C$.

Значит максимальное множество решений игры в детерминированном случае не уже, чем в рассматриваемом случае интервальной неопределенности.

Доказательство утверждения 2.1.4.

Обозначим y_i^- и y_i^+ - соответственно, левую и правую границу множества решений игры при использовании АЭ максимального гарантированного результата, в i-ой АС, i = 1,2. Из определения множества решений игры для рассматриваемой модели следует: $y_1^- = y_2^- = 0$ и

$$y_i^+ = \max \{ y \in A \mid c(y, D_i) \le C \},\ i = 1,2.$$

В силу предположения A.1.2.1 и условий утверждения $y_1^+ \ge y_2^+$. Значит максимальное множество решений игры с уменьшением неопределенности не сужается.

Доказательство утверждения 2.1.5.

Как и при доказательстве утверждения 2.1.4 покажем, что в первой активной системе максимальное множество решений игры не уже, чем во второй активной системе. Предположим противное, то есть пусть существует действие $\tilde{y} \in A$, такое, что $\tilde{y} \in P_2$ и $\tilde{y} \notin P_1$. Так как $\tilde{y}$ принадлежит множеству решений игры во второй АС, то

$$h(\tilde{y}, d_2) \geq h_{max}(d_2) - C.$$

Из того, что, согласно нашему предположению, действие $\tilde{y}$ не принадлежит множеству P_1, следует, что $h(\tilde{y}, d_1) < h_{max}(d_1) - C$.

В силу предположения А.1.2.2 $h_{max}(d_2) = h_{max}(d_1)$, значит из последних двух неравенств следует, что $h(\tilde{y}, d_2) > h(\tilde{y}, d_1)$. Так как по условию $d_1 \geq d_2$, то последнее неравенство противоречит А.1.2.1.

Доказательство леммы 2.2.1.

Предположим, что $\exists\ r \in \mathbb{R}^n$ ($R^* \subseteq \mathbb{R}^n$) и $\exists\ i \in I$ такие, что $\pi_i(s^*(r)) < r_i(r_i^-)$ и $s_i^*(r) < D_i$. Тогда, сообщая $s_i = D_i$, i-й АЭ может обеспечить в силу А.2.2.2(2') $\pi_i(s_{-i}^*, D_i) > (\geq)\ \pi_i(s^*(r))$, что в соответствии с А.2.2.5(5') противоречит (2.2.4) (в случае равенства для SP' элемент сообщит $s_i = D_i$ в силу А.2.2.7').

Предположим, что $\exists\ r \in \mathbb{R}^n$ ($R^* \subseteq \mathbb{R}^n$) и $\exists\ i \in I$ такие, что $\pi_i(s^*(r)) > r_i(r_i^*)$ и $s_i^*(r) > d_i$. Тогда, сообщая $s_i = d_i$, i-й АЭ может обеспечить в силу А.2.2.2(2') $\pi_i(s_{-i}^*(r), d_i) < (\leq)\ \pi_i(s^*(r))$, что в соответствии с А.2.2.5(5') противоречит (2.2.2) (в случае равенства для SP' элемент сообщит $s_i = d_i$ в силу А.2.2.7').

Пусть $\exists\ r \in \mathbb{R}^n$ и $\exists\ i \in I$ такие, что $s_i^*(r) \in (d_i, D_i)$ и $\pi_i(s^*(r)) \neq r_i$. Предположим, что $я_i(в^*(r)) < r_i$. Тогда в соответствии с пунктом 1 утверждения настоящей леммы $s_i^*(r) = D_i$ – противоречие. Предположим, что $\pi_i(s^*(r)) > r_i$. Тогда в соответствии с пунктом 2 утверждения настоящей леммы $s_i^*(r) = d_i$ – противоречие.

Доказательство леммы 2.2.3.

Докажем первое утверждение леммы (второе утверждение доказывается полностью аналогично). Предположим противное – пусть $\exists\ r \in \mathbb{R}^n$ и $\exists\ i \in I$ и $\exists\ \tilde{r}_i \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\tilde{r}_i < g_i(r) < r_i$ и

$$g_i(r_{-i}, \tilde{r}_i) > g_i(r).$$

В силу леммы 2.2.1(1') имеем:

$$s_i^*(r) = D_i, \ s_i^*(\tilde{r}_i, r_{-i}) = d_i.$$

Рассмотрим, как изменится равновесная стратегия j-го АЭ ($j \neq i$) при изменении в прямом механизме сообщения r на сообщение $(\tilde{r}_i, r_{-i})$.

Так как $\pi_i(s^*(\tilde{r}_i, r_{-i})) > \pi_i(s^*(r))$, то по свойству (3) А.2.2.4(4')

$$\pi_j(s^*(\tilde{r}_i, r_{-i})) \geq \pi_j(s^*(r))\ \forall\ j \in G_i,$$

а по свойству (4) А.2.2.4(4')

$$\pi_j(s^*(\tilde{r}_i, r_{-i})) \leq \pi_j(s^*(r))\ \forall\ j \in H_i.$$

Фиксируем произвольное $j \neq i$.

Если $j \in G_i$, то возможны следующие случаи:

1) $\pi_j(s^*(r)) = r_j$. Тогда $\pi_j(s^*(\tilde{r}_i, r_{-i})) \geq r_j$. Значит, в соответствии с А.2.2.2(2'), А.2.2.5(5') и леммой 2.2.1(1')

$$s_j^*(\tilde{r}_i, r_{-i}) \leq s_j^*(r);$$

2) $\pi_j(\text{в}^*(r)) < r_j$. Тогда по лемме 2.2.1(1') $s_j^*(r) = D_j$;

3) $\pi_j(\text{в}^*(r)) > r_j$. Тогда по лемме 2.2.1(1') $s_j^*(r) = d_j$. Так как $\pi_j(s^*(\tilde{r}_i, r_{-i})) \geq \pi_j(s^*(r)) > r_j$, то по лемме 2.2.1(1') $s_j^*(\tilde{r}_i, r_{-i}) = d_j$.

Если $j \in H_i$, то возможны следующие случаи:

1) $\pi_j(s^*(r)) = r_j$. Тогда $\pi_j(\text{в}^*(\tilde{r}_i, r_{-i})) \leq r_j$. Значит, в соответствии с А.2.2.2(2'), А.2.2.5(5') и леммой 2.2.1 (1')

$$s_j^*(\tilde{r}_i, r_{-i}) \geq s_j^*(r);$$

2) $\pi_j(s^*(r)) < r_j$. Тогда по лемме 2.2.1(1') $s_j^*(r) = D_j$. Так как $\pi_j(s^* (\tilde{r}_i, r_{-i})) \leq \pi_j (s^* (r)) < r_j$, то по лемме 2.2.1(1') $s_j^* (\tilde{r}_i, r_{-i}) = D_j$;

3) $\varkappa_j(s^*(r)) > r_j$. Тогда по лемме 2.2.1 (1') $s^*_j(r) = d_j$.

Таким образом, мы доказали, что

$s^*_j(\tilde{r}_i, r_{-i}) \le s^*_j(r) \quad \forall\ j \in G_i;\quad s^*_j(\tilde{r}_i, r_{-i}) \ge s^*_j(r)\ \forall\ j \in H_i$.

Так как в соответствии с А.2.2.3(3') $H_i \cup G_i = I$, то, используя А.2.2.2(2') и А.2.2.5(5'), получаем противоречие.

<u>Доказательство утверждения 2.2.4.</u>

Достаточно показать, что сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для любого $r \in \mathbb{R}^n$ (при этом значения целевых функций центра и всех АЭ в исходном механизме $\pi(\cdot)$ и в механизме $g(\cdot)$ совпадут в силу (2.2.5), то есть совпадут и их эффективности).

Предположим противное. Пусть $\exists\ i \in I$ и $\exists\ r \in \mathbb{R}^n$ такие, что i-й АЭ, сообщая $\tilde{r}_i \ne r_i$, может обеспечить:

$$\varphi_i(\ g_i(\ \tilde{r}_i,\ r_{-i}\ )\ ) > \varphi_i\ (\ g_i\ (\ r\ )\ ).$$

Возможны следующие случаи:

1) $g_i(r) = r_i$; тогда в соответствии с А.2.2.5(5') получаем противоречие;

2) $g_i(r) \ne r_i$. Для определенности предположим, что $g_i(r) < r_i$ (случай $g_i(r) > r_i$ рассматривается полностью аналогично). В силу леммы 2.2.2(2'), если $\tilde{r}_i \ge g_i(r)$, то ситуация равновесия не изменится. Если же $\tilde{r}_i < g_i(r)$, то в силу леммы 2.2.3(3') получаем противоречие с А.2.2.5 (5').

<u>Доказательство леммы 2.2.5.</u>

Фиксируем произвольное $i \in I$. Отметим, что $r_i \in [x^-_i, x^+_i]$ ($[r^-_i, r^+_i] \subseteq [x^-_i, x^+_i]$), где $x^-_i = y^-_i$, $x^+_i = y^+_i$ – границы множества согласованных планов.

При $x_i \notin [x^-_i, x^+_i]$ максимум (2.2.9) по y_i достигается в точке r_i (на отрезке $[r^-_i, r^+_i]$), и значение функции предпочтения в точности совпадает с $[\ h_i(r_i, r_i) - C_i\ ]$ $(\ [\ h_i(r^\pm_i, r^\pm_i) - C_i\ ]\ )$.

При $x_i \in [x^-_i, x^+_i]$ максимум (2.2.9) по y_i достигается в точке x_i или в точках x_i и r_i (x_i и на отрезке $[r^-_i, r^+_i]$). В последнем случае в силу принципа благожелательности АЭ выберет действие x_i

как более выгодное для центра. Значение функции предпочтения при этом равно $h_1(x_1, r_1)$. Таким образом:

$$\varphi_1(x_1, r_1) = \begin{cases} h_1(x_1, r_1), & x_1 \in [x_1^-, x_1^+] \\ h_1(r_1, r_1) - c_1, & x_1 \notin [x_1^-, x_1^+] \end{cases}.$$

В силу определений x_1^- и x_1^+ и лемм 2.2.1 - 2.2.3 функция $\varphi_1(x_1, r_1)$ принадлежит классу SP'. Более того, при $x_1 \in [x_1^-, x_1^+]$ точки ее плато совпадают с точками плато функции $h_1(\cdot)$, а при $x_1 \notin [x_1^-, x_1^+]$ она постоянна.

Отметим, что, следуя доказательству леммы 2.2.5, можно показать, что, если $h_1 \in SP$, то φ_1, определяемая (2.2.8)-(2.2.10), "почти" принадлежит классу SP ("почти" - из-за того, что при $x_1 \notin [x_1^-, x_1^+]$ нарушается требование строгой монотонности).

<u>Доказательство утверждения 2.3.1.</u>

Рассмотрим две АС, отличающиеся лишь множествами возможных значений состояния природы $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$.

Покажем, что справедливо следующее соотношение:

$$\{ y \in A \mid \min_{\theta\in\Omega_1} h(z(y,\theta)) \geq \max_{y\in A} \min_{\theta\in\Omega_1} h(z(y,\theta)) - C \} \supseteq$$

$$\supseteq \{ y \in A \mid \min_{\theta\in\Omega_2} h(z(y,\theta)) \geq \max_{y\in A} \min_{\theta\in\Omega_2} h(z(y,\theta)) - C \}.$$

Предположим противное: пусть существует действие АЭ $\tilde{y} \in A$, такое, что $\min_{\theta\in\Omega_2} h(z(\tilde{y},\theta)) \geq \max_{y\in A} \min_{\theta\in\Omega_2} h(z(y,\theta)) - C$ и в то же время $\min_{\theta\in\Omega_1} h(z(\tilde{y},\theta)) < \max_{y\in A} \min_{\theta\in\Omega_1} h(z(y,\theta)) - C$. В силу предположения 2.3.2 получаем: $\min_{\theta\in\Omega_2} h(z(\tilde{y},\theta)) > \min_{\theta\in\Omega_1} h(z(\tilde{y},\theta))$ - противоречие. Значит для максимальных множеств решений игры справедливо вложение: $P_1 \supseteq P_2$.

<u>Доказательство утверждения 2.3.2.</u>

Предположим, что центр использует компенсаторную функцию штрафов, определяемую следующим выражением:

$$\chi_k(z) = \begin{cases} h(z) - h(z^+), & z \in [z^-, z^+] \\ 0, & z \notin z \in [z^-, z^+] \end{cases},$$

где z^- и z^+, соответственно, левая и правая границы максимального множества реализуемых действий при функции дохода АЭ $h(z)$ (см. главу 1). Как отмечалось выше, на отрезке $[z^-, z^+]$ значение целевой функции АЭ постоянно и равно $h_{max} - C$, где $h_{max} = \max_{z \in A_0} h(z)$, а C – ограничение сверху на функцию штрафов.

Рассмотрим какое действие будет выбирать АЭ при использовании центром функции штрафов $\chi_k(z)$. Для этого, подставив $\chi_k(z)$ в (2.3.2) и вычислив минимум по $\theta \in \Omega$, получим "детерминированное представление" целевой функции АЭ и найдем оптимальное действие. Обозначим

$$f(y, \tilde{\theta}) = \min_{\theta \in \Omega} \{ h(z(y, \theta)) - \chi_k(z(y, \theta)) \},$$

Очевидно, функция $h(z(y,\theta)) - \chi_k(z(y,\theta))$ является квазиоднопиковой. Тогда множество решений игры: $P(\tilde{\theta}) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} f(y, \tilde{\theta})$ является отрезком в A, причем в силу А.2.3.1 границы этого отрезка определяются: $z(y^-, \tilde{\theta}) = z^-$, $z(y^+, \tilde{\theta}) = z^+$.

Обозначим $Y(\theta) = \{ y \in A \mid z(y, \theta) \in [z^-, z^+] \}$, $\theta \in \Omega$ – множество действий, выбор которых при данном θ максимизирует целевую функцию АЭ;

$$Y_{max} = \{ y \in A \mid z(y, \theta) \in [z^-, z^+], \theta \in \Omega \},$$

– множество действий АЭ, которые он выбирал бы в рамках гипотезы рационального поведения при всех возможных $\theta \in \Omega$.

Понятно, что если множество

$$Y_{min} = \bigcap_{\theta \in \Omega} Y(\theta)$$

не пусто, то АЭ выберет действие из этого множества. Если же $Y_{min} = \varnothing$, то выбор АЭ заведомо принадлежит Y_{max}.

Докажем максимальность множества $P(\tilde{\theta})$. Возьмем произвольную систему стимулирования $\tilde{\chi} \in M$ и , как это делалось выше, определим множество:

$$Y_{max} = \{ y \in A \mid z(y, \theta) \in \operatorname{Arg}\max_{z \in A_0} \{ h(z) - \chi(z) \}; \theta \in \Omega \},$$

При любом рациональном выборе (в том числе и при использовании МГР) АЭ выбирает действия из соответствующего множества Y_{max} ($\tilde{Y}_{max}$). Из результатов главы 1 следует, что в рамках введенных предположений выполнено:

$$\operatorname{Arg} \max_{z \in A_\sigma} \{ h(z) - \chi(z) \} \subseteq [z^-, z^+],$$

следовательно $Y_{max} \subseteq \tilde{Y}_{max}$. То есть мы показали, что максимальное множество реализуемых действий при использовании компенсаторной функции штрафов не уже, чем соответствующее множество при использовании любой другой системы стимулирования из класса M.

Доказательство леммы 3.1.1.

Воспользуемся общим результатом о характеризации областей локализации характеристических чисел матриц, а именно - теоремой Гершгорина, согласно которой каждое из характеристических чисел $\{ \lambda_i \}$ матрицы $B = ||b_{ik}||$ расположено в одном из кругов:

$$|b_{ii} - \lambda| \le \sum_{j \ne i} |b_{ij}| \ , \ i=\overline{1,n}.$$

В силу стохастичности матицы P: $\sum_{j \ne i} b_{ij} = 1 - b_{ii}$, то есть $|b_{ii} - \lambda| \le 1 - b_{ii}$, следовательно: $\lambda \ge 2 b_{ii} - 1$. Величину $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ условно можно рассматривать как показатель обусловленности матрицы P. Положив $b_{ii} > \frac{1}{2}$, т.е. $2 b_{ii} - 1 > 0$, получим $\lambda > 0$.

Доказательство утверждения 3.1.2.

В модели I мы имеем $m \cdot n$ неизвестных значений функции стимулирования χ^I_{ij} ($i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$). Но, в соответствии с (3.1.6), если существуют только n попарно различных результатов z^I_{ij}, то справедливо: $\sigma^{II}_k = s^I_{ij}$ при $z^I_{ij} = z^{II}_k$, то есть σ^{II}_k - стимулирование за результат z^{II}_k. Число различных k равно n.

Вместо $m \cdot n$ независимых s^I_{ij} мы получили n неизвестных σ^{II}_k, каждое из которых входит в математическое ожидание с весом

$$p^{II}_{ik} = \sum_{j : z^I_{ij} = z^{II}_k} p^I_j \ , \quad k,i = \overline{1,n}.$$

Проверим нормировку распределения p^{II}_{ik}:

$$\sum_{k=1}^{n} p^{II}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j:\, z^{I}_{ij}=z^{II}_{k}} p^{I}_{j} = \sum_{j=1}^{n} p^{I}_{j} = 1, \ \forall\, i = \overline{1,n}.$$

Таким образом, для того, чтобы по модели I построить эквивалентную ей модель II необходимо взять во второй модели множество возможных результатов, совпадающее с множеством попарно различных результатов в первой модели (их число не будет превышать mn) и вычислить переходные вероятности p^{II}_{ik}.

Для доказательства возможности построения по модели второго типа эквивалентной ей модели первого типа рассмотрим следующий алгоритм. Разобьем отрезок [0,1] на отрезки, соответствующие вероятностям p_{ij} (p_{ij} для каждого i образуют разбиение [0,1]). В общем случае, на нем будет не более n^2 точек ($|A_{II}| = |A^{0}_{II}| = n$). Каждому из отрезков между двумя соседними точками поставим в соответствие событие - реализацию состояния природы. Вероятностью каждого события будет длина соответствующего ему отрезка. Нормировка в этом случае очевидна.

<u>Доказательство леммы 3.1.4.</u>

В соответствии с принятыми предположениями $F(z,y)=\dot{F}(z-y)$. Обозначим $t = z - y$. Тогда $F(z,y) = \dot{F}(t)$, где $\dot{F}(t)$ - неубывающая функция (так как это - функция распределения). Дифференцируя $F(z,y)$ по y, получим $\dfrac{\partial F(z,y)}{\partial y} = -\dfrac{d\dot{F}(t)}{dt} \le 0$.

<u>Доказательство леммы 3.1.5.</u>

Необходимость условия (3.1.20) очевидна. Докажем его достаточность. Прежде всего, покажем, что максимум целевой функции АЗ при использовании функции штрафов $\chi_c(x,z)$ достигается при $y^{*} \ge y_2$.

Предположим обратное, т.е. что $y^{*} < y_2$. Тогда должно выполняться: $h(y^{*}) - C\,\dot{F}(x^{*}-y^{*}) \ge h(y_2) - C\,\dot{F}(x^{*}-y_2)$, то есть:

$$\frac{1}{C}\,[\ h(y_2) - h(y^{*})\ ] \le \dot{F}(x^{*}-y_2) - \dot{F}(x^{*}-y^{*}).$$

Так как $y^{*} < y_2$, то правая часть неравенства не положительна. В силу строгой вогнутости $h(\cdot)$ левая часть строго положительна ,- противоречие. Значит $y^* \geq y_2$.

Рассмотрим поведение функции $f(x,y)$ при $y \geq y_2^*$:

$$f(x,y) = h(y) - C\,\bar{F}(x-y).$$

В силу вогнутости $h(\cdot)$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ - невозрастающая функция. Так как $p(\cdot)$ - унимодальна, то для любого $x \in X$ уравнение имеет не более одного решения $y^* \geq x^*$. При $y \in (y_2, x)$ функция $f(x,y)$ имеет, в общем случае, не единственный максимум. Однако, в силу (3.1.20), и определения величины y_s ни одна из этих точек не является точкой глобального максимума на A.

Так как $x \leq y^*$, то $\dot{p}'(x-y^*) \geq 0$, следовательно $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, то есть y^* - точка максимума. Так как выполнено (3.1.20), то $f(x,y^*)$ - наибольшее значение целевой функции АЗ на рассматриваемом компакте.

Доказательство леммы 3.1.7.

В силу непрерывной дифференцируемости функций $h(\cdot)$ и $p(\cdot)$ и определения y^*, функции $y^*(x)$ и $y_s(x)$, определяемые неявной функцией $G(x,y) = h'(y) + C\ p(x-y) = 0$, являются непрерывно дифференцируемыми по известной теореме анализа о неявных функциях ($G_y' \neq 0$ в силу строгой вогнутости функции дохода и неотрицательности плотности распределения вероятности).

Производная целевой функции активного элемента $h(y) - C\bar{F}(x-y)$ по x в точке y^* равна: $f_x'(x,y^*) = h'(y^*)y^{*\prime}(x) - C\ \hat{p}(x-y)(1-y^{*\prime}(x)) = (\ h'(y^*) + C\ \hat{p}(x-y)\ )\ y^{*\prime}(x) - C\ \hat{p}(x-y) \leq 0$, так как первое слагаемое равно нулю по определению $y^*(x)$. Значит $f(x^*,y^*)$ убывает с ростом x (при $x \geq y_2$). Так как задача центра заключается в максимизации ожидаемого (реализуемого) действия АЗ и должно выполняться $f(x^*,y^*) \geq f(x^*,y_s)$, то в оптимальной точке выполнено (3.1.18). Выбранная система стимулирования $\chi_c(x^*,\cdot)$ реализует действие y^*.

Доказательство утверждения 3.1.8.

Пусть $\chi_c(x,z)$ реализует действие y^*. Предположим, что $\exists \chi_2 \in M$, такая, что $\tilde{y} \in P(\chi_2)$ и $\tilde{y} > y^*$. Тогда одновременно выполняется:

$$h(y^*) - C\,F(x,y^*) \geq h(y) - C\,F(x,y) \;\forall\, y \in A,$$

$$h(\tilde{y}) - \chi_2(\tilde{y}) \geq h(y) - \chi_2(y) \;\forall\, y \in A.$$

Проведем ряд преобразований:

$$B_1 = \chi_c(x,y_s) - \chi_c(x,\tilde{y}) = \int_{\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_c(x,z)dF(z,y_s) - \int_{\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_c(x,z)dF(z,\tilde{y}).$$

Произведем в выражении для B_1 интегрирование по частям:

$$B_1 = \tilde{\chi}_c(x,z)F(z,y_s)\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\tilde{\chi}_1(x\;,z)}{\partial z} F(z,y_s)dz -$$

$$- \tilde{\chi}_c(x,z)F(z,\tilde{y})\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\tilde{\chi}_c(x\;,z)}{\partial z} F(z,\tilde{y})dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\tilde{\chi}_c(x\;,z)}{\partial z} \;[F(z,\tilde{y}) - F(z,y_s)]dz.$$

Тогда $B_1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} C\delta(z-x)[F(z,y_s)-F(z,\tilde{y})]dz = C[F(x,y_s(x))-F(x,\tilde{y}(x))]$.

Возьмем $y = \hat{y}$. Оба неравенства должны иметь место и для $\hat{y}$. Покажем, что это приведет к противоречию. В силу леммы 3.1.7 заменим в y^* на y_s и сложим оба неравенства. Получим

$$h(y_s)+h(\tilde{y})- 2\,h(\hat{y}) \geq C[F(x,y_s)-F(x,\hat{y})]+\chi_2(\tilde{y})-\chi_2(\hat{y})$$

Так как $h(\cdot)$ – строго вогнутая функция, то левая часть строго отрицательна. Значит и правая часть строго отрицательна, то есть:

$$C\,[\,F(x,y_s) - F(x,\hat{y})\,] < \chi_2(\hat{y}) - \chi_2(\tilde{y})$$

Оценим правую и левую часть. По аналогии с выражением для B_1, используя симметричность распределения, получим:

$$\chi_2(\hat{y}) - \chi_2(\tilde{y}) = \int_{A_0} \left(-\frac{\partial\chi_2}{\partial z} \right) [\,F(z,\hat{y}) - F(z,\tilde{y})\,]\,dz \leq$$

$$\leq \max_{z\in A_0} [\,F(z,\hat{y}) - F(z,\tilde{y})\,]\,C = C\,[\,F(\tfrac{\hat{y}+\tilde{y}}{2},\hat{y}) - F(\tfrac{\hat{y}+\tilde{y}}{2},\tilde{y})\,] =$$

$$= C\,[\,F(\tfrac{\tilde{y}-\hat{y}}{2}) - F(\tfrac{\hat{y}-\tilde{y}}{2})\,] = C\,[\,2\,F(\tfrac{\tilde{y}-\hat{y}}{2}) - 1\,].$$

Таким образом,

$$F(x,y_s) - F(x,\hat{y}) < 2\,F(\frac{\tilde{y}-\hat{y}}{2}) - 1 \le 2\,F(\frac{x_o-y}{2}) - 1,$$

так как, очевидно, $\tilde{y} \le x_o$. Получили противоречие.

Доказательство утверждения 3.1.9.

Пусть $\exists\ \chi_2 \in M$, реализующая $\tilde{y} > y^* = x_o$. В силу строгой вогнутости функции $h(\cdot)$ и определения реализуемости действия, получим $\left|\frac{\partial\chi_2(\tilde{y})}{\partial y}\right| > \left|\frac{\partial\chi_1(y^*)}{\partial y}\right|$.

Если $x_o = y_3$, то, очевидно, $\tilde{y}$ не может быть больше y^*. Если же $x_o = y_4$, то: $\left|\frac{\partial\chi_1(y^*)}{\partial y}\right| = C\,\hat{p}(0)$ и $\left|\frac{\partial\chi_2(\tilde{y})}{\partial y}\right| > C\,\hat{p}(0)$.

Но в силу нашего предположения:

$$\left|\frac{\partial\chi_2(\tilde{y})}{\partial y}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\int_{A_o} \tilde{\chi}_2(z)p(z,y)dz\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\int_{A_o} (-\frac{\partial\chi_2(\tilde{z})}{\partial z})F(z,y)dz\right| =$$

$$= \left|\int_{A_o} (-\frac{\partial\chi_2(\tilde{z})}{\partial z})p(z,y)dz\right| \le \hat{p}(0)\int_{A_o}\left|\frac{\partial\chi_2(\tilde{z})}{\partial z}\right| dz = C\,\hat{p}(0).$$

Противоречие.

Доказательство утверждения 3.1.10.

В силу условий $y_s(x^*)=y_2$. Из соотношения производных функции распределения и дохода АЭ следует, что на отрезке $[y_3-2\Delta, y_3]$ целевая функция АЭ не убывает по y. В то же время $f(y_s) = h_2 - C = f(y_3)$. Следовательно система стимулирования χ_1 реализует действие y_3. Из утверждения 3.1.9 следует, что она оптимальна.

Доказательство леммы 3.1.12.

Обозначим S_1 – множество действий, реализуемых системой стимулирования из M_x при $C = C_1$, S_2 – соответствующее множество при $C = C_2$. Предположим, что $C_2 \ge C_1$. Для любого действия из S_1 в силу непрерывности $y^*(C)$ выбором $\hat{C}$ ($C_1 \le C \le C_2$) можно подобрать систему стимулирования из M_x, реализующую это действие, т.е. $S_1 \subseteq S_2$. Значит увеличение C не сужает множества реализуемых действий. Следовательно $y^*(C)$ – неубывающая функция.

Доказательство леммы 3.1.13.

Разобъем доказательство на несколько этапов.

Этап 1. Покажем, что существует $\tilde{x} > 0$, такой, что $\tilde{x} \in S$. Очевидно, $\{ 0 \} \in S$, так как выбирая систему стимулирования тождественно равную нулю, центр побуждает АЭ выбрать LCA - действие, минимизирующее затраты (которое при представлении целевой функции АЭ в виде "стимулирование минус затраты" тождественно равно нулю в силу A.1.4). Поэтому покажем, что множество S содержит хотя бы еще одну точку, отличную от LCA. Для этого достаточно найти систему стимулирования $\tilde{\sigma} \in M$, такую, что $P(\tilde{\sigma}) \ni \tilde{x} > 0$. Выберем $\tilde{\sigma}$ в виде

$$\tilde{\sigma}(z) = \begin{cases} 0, & z < \bar{x} \\ C, & z \geq \bar{x} \end{cases},$$

где $\bar{x}$ - некоторая точка из множества A_0. Действие $\tilde{x}$ реализуется системой стимулирования $\tilde{\sigma}$, если $\forall\, y \in A$ выполнено

$$\int_{A_\sigma} \tilde{\sigma}(z)\, p(z,\tilde{x})\, dz - c(\tilde{x}) \geq \int_{A_\sigma} \tilde{\sigma}(z)\, p(z,y)\, dz - c(y).$$

Покажем, что существует пара $\tilde{x}$, $\bar{x} \in A_0$, такая, что приведенная выше система неравенств имеет место. Интегрируя по частям, получим: $\int_{A_0} \frac{d\tilde{\sigma}(z)}{dz} [\, F(z,y) - F(z,\tilde{x})\,] \geq c(\tilde{x}) - c(y) \quad \forall\, y \in A.$

После несложных преобразований:

$$C\, F(\bar{x}, y) + c(y) \geq C\, F(\bar{x}, \tilde{x}) + c(\tilde{x}) \quad \forall\, y \in A.$$

При фиксированном $\bar{x} \in A$, выберем $\tilde{x}(\bar{x}) = \arg\min_{y \in A} [\, CF(\bar{x},y) + c(y)\,]$.

В силу A.3.1.1-A.3.1.4 существует существует $\bar{x} \in A_0$, такое, что $\tilde{x}(\bar{x}) > 0$ и приведенная выше система неравенств имеет место.

Этап 2. Покажем, что если $\tilde{x} > 0$ - некоторое реализуемое действие, то любое меньшее неотрицательное действие также может быть реализовано. Пусть $\tilde{\sigma} \in M$, $P(\tilde{\sigma}) \ni \tilde{x} > 0$. Надо показать, что $\forall\, \alpha \in (0,1)\ \exists\, \sigma \in M$: $\alpha \tilde{x} \in P(\sigma)$.

Предположим противное. То есть пусть $\exists\, \bar{\alpha} \in (0,1)$: $\forall\, \sigma \in M$: $\bar{\alpha} \tilde{x} \notin P(\sigma)$. Иначе говоря, существует $y(\sigma) \in A$:

$$f(y(\sigma), \sigma) > f(\bar{\alpha} \tilde{x}, \sigma).$$

Вычитая последнее условие из условия реализуемости действия $\tilde{x}$ системой стимулирования $\tilde{\sigma}$, получим:

$$\int_{A_0} \tilde{\sigma}(z)\ p(z,\tilde{x})\ dz - \int_{A_0} \sigma(z)\ p(\ z,\ \bar{\alpha}\ \tilde{x}\ )\ dz \geq c\ (\ \tilde{x}\ ) - c\ (\ \bar{\alpha}\ \tilde{x}\ ).$$

В силу введенных предположений и так как $\bar{\alpha} \in (0,1)$ правая часть неравенства строго положительна. Итак, при фиксированных $\bar{\alpha} \in (0,1)$ и $\tilde{x} \in S$, $\forall\ \sigma \in M$ имеет место

$$\int_{A_0} \tilde{\sigma}(z)\ p(z,\tilde{x})\ dz > \int_{A_0} \sigma(z)\ p(\ z,\ \bar{\alpha}\ \tilde{x}\ )\ dz.$$

Левая часть неравенства не превышает C - противоречие.

Этап 3. Очевидно, $\exists\ \tilde{x} > 0$, такой, что

$$\forall\ \delta > 0\ \ \neg\exists\ \sigma \in M:\ (\ \tilde{x} + \delta\ ) \in P(\sigma).$$

Фактически, мы показали, что множество S замкнуто и ограничено, то есть является компактом. Объединяя результаты предыдущих этапов доказательства, получаем утверждение леммы.

Доказательство леммы 3.1.14.

Фиксируем произвольное $\sigma \in M$ и произвольное $x \in P(\sigma)$. Так как x - реализуемое действие, то

$$\int_{A_0} \sigma(z)\ p(z,x)\ dz - c(x) \geq \int_{A_0} \sigma(z)\ p(z,y)\ dz - c(y) \quad \forall\ y \in A.$$

Неравенство имеет место для произвольного допустимого действия АЭ. Подставляя LCA, получим

$$C_{SB}(x) = \int_{A_0} \sigma(z)\ p(z,x)\ dz \geq \int_{A_0} \sigma(z)\ p(z,0)\ dz\ +\ c(x)\ =$$

$$= \int_{A_0} \tilde{\sigma}(z)\ p(z,0)\ dz\ +\ C_{FB}(x).$$

Первое слагаемое в правой части неотрицательно (как интеграл от произведения двух неотрицательных функций). Более того, если выполнено (3.1.30), то первое слагаемое строго положительно.

Доказательство утверждения 3.1.15.

В сответствии с введенными выше обозначениями,

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = [\ 1 - F(y)\ ]\ \frac{\partial \bar{f}(y)}{\partial y}\ ,$$

где $f(z) = \tilde{h}(z) - \tilde{\chi}(z)$, $f(y) = E\ f(z)$. Значит система стимулирования $\tilde{\chi}_c(\cdot)$ реализует действие $\tilde{y}_3$.

Выражая $\bar{f}(y)$ через $f(y)$, легко показать, что в системе с простым АЭ точка глобального максимума полезности элемента не может лежать строго левее, чем точка глобального максимума его ожидаемой полезности. А так как при использовании систем стимулирования из класса M точка глобального максимума $f(z)$ не может лежать правее $\tilde{y}_3$, значит система стимулирования $\tilde{\chi}_c(\cdot)$ реализует максимальное действие и, следовательно, является оптимальной (отметим, что величина x_0 определяется через y_3: $h(y_3) = h_2 - C$, $y_3 \geq y_2$ и, в общем случае $y_3 \neq \tilde{y}_3$).

Доказательство утверждения 3.1.16.

Для доказательства справедливости утверждения достаточно показать, что не существует $x \in X$ такого, что $\tilde{\chi}_c(x,z)$ реализует z_3 (известно, что действие z_3 реализуемо системой стимулирования K-типа).

Пусть $\exists\ x_3 \in X$: $z_3 \in P(\ \tilde{\chi}_c(x_3,z)\ )$, то есть пусть $\forall\ y \in A$ выполнено:

$$\int_{A_0} [\bar{h}(z) - \tilde{\chi}_c(x_3,z)]\ p(z,z_3)\ dz \geq \int_{A_0} [\bar{h}(z) - \tilde{\chi}_c(x_3,z)]\ p(z,y)\ dz.$$

Выберем $y = x_3$ и предположим, что $x_3 < z_3$. Тогда имеет место:

$$\int_{A_0} \bar{h}(z)\ p(z,z_3)\ dz - \int_{A_0} \bar{h}(z)\ p(z,x_3)\ dz -$$

$$- \int_{A_0} \tilde{\chi}_c(x_3,z)\ p(z,z_3)\ dz + \int_{A_0} \tilde{\chi}_c(x_3,z)\ p(z,x_3)\ dz \geq 0.$$

После несложных преобразований получаем:

$$\int_{x_3}^{z_3} \bar{h}(z)\ p(z)\ dz + [\ 1 - F(z_3)\ ]\ \bar{h}(z_3) - [\ 1 - F(x_3)\ ]\ \bar{h}(x_3) \geq 0.$$

Оценивая интеграл сверху, то есть подставляя $z = x_3$, в силу строгой монотонности функции дохода, получаем:

$$\hbar(x_3)\,[F(z_3)-F(x_3)] + [1-F(z_3)]\,\hbar(z_3) - [1-F(x_3)]\,\hbar(x_3) \ge 0,$$

то есть $[\,\hbar(z_3) - \hbar(x_3)\,]\,[\,1 - F(z_3)\,] \ge 0$ – противоречие.

Покажем теперь, что действие z_3 не реализуемо и при $x_3 \ge z_3$.

Предположим, что действие z_3 реализуемо системой стимулирования С-типа при некотором $x_3 \ge z_3$. Из условия реализуемости, выбирая $y = z$, получаем:

$$\int_{z_2}^{z_3} \hbar(z)\,p(z)\,dz + [\,1 - F(z_3)\,]\,\hbar(z_3) - [\,1 - F(z_2)\,]\,\hbar(z_2) \ge 0.$$

Оценивая интеграл сверху, то есть подставляя $z = z_2$, в силу строгой монотонности функции дохода, получаем:

$$\hbar(z_2)\,F(z_3) - \hbar(z_2)\,F(z_2) + \hbar(z_2)\,F(z_2) - \hbar(z_3)\,F(z_3) > C,$$

то есть $F\,(\,z_3\,) > 1$ – противоречие.

<u>Доказательство</u> <u>леммы</u> <u>3.1.17.</u>

В силу непрерывной дифференцируемости функций $h(\cdot)$ и $p(\cdot)$ и определения y^*, функции $y^*(x)$ и $y_5(x)$, определяемые неявной функцией $G(x,y) = h'(y) + C\ p(x-y) = 0$, являются непрерывно дифференцируемыми по известной теореме анализа о неявных функциях ($G_y{}' \neq 0$ в силу строгой вогнутости функции дохода и неотрицательности плотности распределения вероятности).

Производная целевой функции активного элемента $h(y)- CF(x-y)$ по x в точке y^* равна: $f_x'(x,y^*) = h'(y^*)y^{*\prime}(x) - C\ \hat{p}(x-y)\,(1-y^{*\prime}(x)) = (\ h'(y^*) + C\ \hat{p}(x-y)\ )\ y^{*\prime}(x) - C\ \hat{p}(x-y) \le 0$, так как первое слагаемое равно нулю по определению $y^*(x)$. Значит $f(x^*,y^*)$ убывает с ростом x (при $x \ge y_2$). Так как задача центра заключается в максимизации ожидаемого (реализуемого) действия АЭ и должно выполняться $f(x^*,y^*) \ge f(x^*,y_5)$, то в оптимальной точке выполнено (3.1.18). Выбранная система стимулирования $\chi_c(x^*,\cdot)$ реализует действие y^*.

Доказательство леммы 3.1.18.

Система стимулирования $\chi_c(x,z)$ реализует действие $y^*(x)$, то есть $\forall\ y \in A$ имеет место

$$h(y^*) - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_c(x,z)p(z,y^*)dz \geq h(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_c(x,z)p(z,y)dz.$$

Пусть система стимулирования $\chi(z)$ реализует действие $\tilde{y} > y^*$, то есть $\forall\ y \in A$ имеет место

$$h(\tilde{y}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(z)\ p(z,\tilde{y})\ dz \geq h(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(z)\ p(z,y)\ dz.$$

Подставим в первое неравенство $y = \tilde{y}$, во второе - $y = y^*$, и сложим получившиеся неравенства. После несложных преобразований получим, что

$$\int_{-\infty}^{x} [\ \chi(z) - \chi_c(x,z)\ ]\ [\ p(z,y^*) - p(z,\tilde{y})]\ dz \geq 0.$$

Так как $x \leq y^*(x) < \tilde{y}$, то в силу А.3.1.4(4') второй сомножитель строго положителен. Первый сомножитель неположителен, значит неравенство может выполняться только как равенство при $\chi \equiv \chi_c$ - противоречие. Отметим, что условие $y^*(x) \geq x$ существенно, так как если, например, $x > x_0$, то, очевидно, АЭ выберет действие y_5 и последее неравенство может иметь место.

Доказательство утверждения 3.1.19.

Пусть χ - произвольная система стимулирования из класса **M**, $P(\chi)$ - соответствующее ей множество реализуемых действий. Предположим, что $y^* \geq y_2$ (обратный случай рассматривается полностью аналогично). Выше было доказано, что в этом случае множество действий, реализуемых всевозможными системами стимулирования С-типа, связно и составляет отрезок $[y_2,\ y^*(x^*)]$. Значит, эффективность системы стимулирования χ может оказаться строго больше, чем эффективность любой скачкообразной системы стимулирования, только если $\exists\ \hat{y} \in P(\chi)$: $\hat{y} > y^*(x^*)$.

Покажем, что для любого $\chi \in$ **M** и для любого $\hat{y} \in P(\chi)$ существует система стимулирования С-типа, реализующая действие, не меньшее, чем $\hat{y}$.

Положим в условиях леммы 3.1.17 $\chi_1 = \chi$ и построим систему стимулирования χ_2. В соответствии с результатом леммы 3.1.18 система стимулирования χ_2 реализует действие, не меньшее, чем $\hat{y}$. Пусть это действие равно $\tilde{y} \geq \hat{y}$.

Воспользуемся результатом леммы 3.1.18. По функции стимулирования χ_2, полученной выше, построим скачкообразную систему стимулирования, реализующую некоторое действие y^*. Пусть система стимулирования χ_2 реализует действие $\tilde{y} > y^*$ – противоречие с леммой 3.1.18. Значит $y^* \geq \tilde{y}$. Итак, $y^* \geq \tilde{y} \geq \hat{y}$.

<u>Доказательство утверждения 3.1.20.</u>

Выше было показано, что и S, и S – отрезки в $\mathbb{R}^1_+$, причем левые границы этих отрезков совпадают и равны нулю. Исследуем, как соотносятся их правые границы. Включение $S \subseteq S$ следует из леммы 3.1.14. Если выполнено (3.1.30), то, положив в доказательстве леммы 3.1.14, $x = \tilde{x}_{max}$, получим:

$$C_{SB}(\tilde{x}_{max}) > C_{FB}(\tilde{x}_{max}) = C,$$

то есть $\int\limits_{A_0} \sigma(z)\, p(z,\tilde{x}_{max})\, dz > C$, что противоречит А.3.1.3.

<u>Доказательство леммы 3.1.22.</u>

Из унимодальности распределения следует выпуклость $F_i(z,y)$ при $z \leq y$ и вогнутость $F_i(z,y)$ при $z \geq y$, $i = 1,2$. В силу условий леммы для носителей функции распределения справедливо следующее соотношение: $\mathrm{Supp}\ p_1 \subseteq \mathrm{Supp}\ p_2$.

Из (3.1.41) следует, что минимум энтропии среди всех распределений F_2, удовлетворяющих (3.1.45)-(3.1.46), достигается на F_1. Следовательно $\forall\, y \in A$ $H_1(y) \leq H_2(y)$.

<u>Доказательство утверждения 3.1.23.</u>

Затраты на стимулирование (при выборе АЭ действия $x \in A$ и использовании центром системы стимулирования $\sigma \in M$) равны:

$$C_{SB_i}(x,\sigma) = \int\limits_{A_0} \sigma(z)\, p(z,x)\, dz, \quad i = 1,\ 2.$$

Фиксируем произвольное $\sigma \in M$ и произвольное $x \in A$. Оценим разность:

$$C_{sB_1}(x,\sigma) - C_{sB_2}(x,\sigma) = \int_{A_0} \sigma(z)\ p_1(z,x)\ dz - \int_{A_0} \sigma(z)\ p_2(z,x)\ dz.$$

Интегрируя по частям, получим,

$$C_{sB_1}(x,\sigma) - C_{sB_2}(x,\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(z)}{dz} [\ F_2(z,x) - F_1(z,x)\ ]\ dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} - \left(\frac{d\sigma(x-t)}{d(x-t)} \right) [\ F_2(x-t,x) - F_1(x-t,x)\ ]\ dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left(\frac{d\sigma(x+t)}{d(x+t)} \right) [\ F_2(x+t,x) - F_1(x+t,x)\ ]\ dt =$$

$$= - \int_0^{+\infty} (\ \sigma'\ )\ [\ F_1(x+t,x) - F_1(x-t,x) - F_2(x+t,x) + F_2(x-t,x)\ ]dt.$$

В силу условий утверждения и (3.1.43) значение интеграла неотрицательно. Значит $\forall\ \sigma \in M,\ \forall\ x \in A$

$$C_{sB_1}(x,\sigma) \le C_{sB_2}(x,\sigma),$$

то есть $\forall\ \tilde{x} \in S_2,\ \ \exists\ \tilde{\sigma}_1 \in M:\ \ \tilde{x} \in P(\tilde{\sigma}_1)$, то есть $\tilde{x} \in S_1$.

Доказательство утверждения 3.2.1.

При использовании компенсаторной функции штрафов значение целевой функции АЗ постоянно на множестве $[z^-,z^+]$. Если выполнена гипотеза благожелательности, то можно считать, что при известном $\hat{\theta}$, АЗ выберет действие $\hat{y}\ (\ \hat{B}\ ) \in \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in \hat{P}} H(y)$, где

$$\hat{P}\ (\ \hat{\theta}\ ) = \{\ y \in A\ |\ z\ (\ y,\ \hat{\theta}\ ) \in [z^-,z^+]\ \}.$$

Эффективность стимулирования при этом равна

$$K\ (\ \chi_k\ ) = \int_{\Omega} H\ (\ \hat{y}\ (\ B\ )\ )\ p\ (\ B\ )\ d\theta.$$

Очевидно, что $\forall\ \chi \in M$ справедливо следующее соотношение:

$$\hat{P}\ (\ \hat{B}\ ) \ge P\ (\ \chi,\ B\ ).$$

Сравнивая $K(\chi_k)$ с (3.2.3), получаем, что $\forall\ \chi \in M\ K(\chi_k) \ge K(\chi)$.

Доказательство утверждения 3.2.3.

Если выполнено предположение А.3.2.2, то, при любых допустимых значениях состояния природы значение целевой функции центра достигает фиксированного максимального значения. В рамках предположения А.3.2.1 в зависимости от поведения функции дохода центра в окрестности максимального множества реализуемых действий и "хвостов" распределения $p(\cdot)$, ожидаемое значение целевой функции центра может оказаться как меньшим, так и большим, чем при некотором фиксированном и априори известном действии активного элемента.

Доказательство утверждения 4.1.3.

Известно, что в детерминированной задаче множество достижимости при использовании функций штрафа К-типа совпадает с множеством достижимости функций стимулирования из всего класса $\mathbf{M}$. Поэтому $\forall\ \chi \in \mathbf{M}$ найдется такой план $x \in A$, что при использовании центром функции штрафов $\chi_k'(y)$ максимумы в (4.1.19) совпадут. При использовании $\chi_c(x^*,y)$ и выборе $x^* = \arg\max_{t \in P} \Phi(t)$, где $P=[y^-,y^*]$ максимум целевой функции АЭ $f(y) = h(y) - \chi(x^*,y)$ достигается в точке x^*.

В силу квазиоднопиковости $\underset{\sim}{h}(y,u)$ $\underset{\sim}{h}\,(x^*,\ u + \chi(x^*,x^*)\ ) =\ 1$, то есть x^* - ЧНД действие. В силу принципа благожелательности, АЭ выберет $y = x^*$. Если отказаться от гипотезы благожелательности, то АЭ может выбрать ЧНД действие, отличное от x^*. Однако, $\forall\ \chi \in \mathbf{M}$ $\forall\ x \in A^{ЧНД}(\chi)\ \exists\ \chi_c \in \mathbf{M}_к:\ \chi \in A^{ЧНД}(\chi_c)$.

Обозначим $Q(x,\chi) = \{\ y \in A\ |\ (y, f(x,y,\chi))$ - решение $(4.1.19)\}$. Очевидно $\forall\ \chi \in \mathbf{M},\ \forall\ x \in P\ \ Q(x,\chi_k) \supseteq Q(x,\chi) \supseteq Q(x,\chi_c)$. Из полученной цепочки вложений и определений эффктивности и гарантированной эффективности стимулирования следует справедливость доказываемого утверждения.

Доказательство леммы 4.2.3.

Выберем произвольное действие y из множества $Q(\alpha)$. Положим

$$\varkappa(t) = \begin{cases} C, & t \neq y \\ 0, & t = y \end{cases}.$$

Из (4.2.7) следует, что со степенью α выполнено: $\forall\, h \in V_\alpha$, $\forall\, t \in A$, $t \neq y$ $h(y) - \varkappa(y) \geq h(t) - \varkappa(t)$, то есть действие y α-реализуемо.

Пусть теперь существует такое α-реализуемое действие $x \in A$, что $x \notin Q(\alpha)$. Выписывая условие реализуемости легко построить такую функцию дохода $h \in V_\alpha$, что будет нарушено А.1.2.

Величину $\beta = 1 - \inf \{ \alpha > 0 \mid Q(\alpha) \neq \varnothing \}$ можно рассматривать как показатель "гарантированноети" соответствующего значения эффективности.

Доказательство утверждения 4.3.1.

Пусть пара (z_o, y_α) - решение задачи (4.3.13). Из (4.3.12) следует, что достаточно показать, что

$$\sup_{y \in A} [\sup_{f(z) \geq f(t)} \min \{ \underset{\sim}{P}(z,y), \underset{\sim}{P}(t,y_o)\} - $$

$$- \sup_{f(t) \geq f(z)} \min \{ \underset{\sim}{P}(t,y_o), \underset{\sim}{P}(z,y)\}] \leq 1 - \alpha.$$

Предположим противное. Пусть $\exists\, \tilde{y} \in A$ и $\varepsilon > 0$, такие, что

$$\sup_{f(z) \geq f(t)} \min \{ \underset{\sim}{P}(z,\tilde{y}), \underset{\sim}{P}(t,y_o) \} -$$

$$- \sup_{f(t) \geq f(z)} \min \{ \underset{\sim}{P}(t,y_o), \underset{\sim}{P}(z,y)\} \geq 1 - \alpha + \varepsilon.$$

Выберем $\tilde{z} \in A_o$ такое, что $\underset{\sim}{P}(\tilde{z},\tilde{y}) \geq \alpha - \varepsilon$ (существование такого $\tilde{z}$ следует из (4.3.14)). Так как пара (z_o,y_o) - решение задачи (4.3.13), то $f(z_o) \geq f(\tilde{z})$ и $\underset{\sim}{P}(z_o, y_o) \geq \alpha$. Тогда

$$\sup_{f(t) \geq f(z)} \min \{ \underset{\sim}{P}(t,y_o), \underset{\sim}{P}(z,\tilde{y}) \} \geq$$

$$\geq \min \{ \underset{\sim}{P}(z_o,y_o), \underset{\sim}{P}(\tilde{z},\tilde{y})\} \geq \alpha - \varepsilon.$$

Получили противоречие.

Доказательство утверждения 4.3.4.

Предположим противное. Пусть y^* – α-недоминируемое действие. Обозначим $Q (y^*) = \{ z \in A_0 \mid \underset{\sim}{P} (z, y^*) \geq \alpha \}$. Пусть не существует результата деятельности $z^* \in A_0$ такого, что пара (z^*, y^*) – решение задачи (4.3.13). Иными словами, пусть выполнено: $Q (y^*) \cap \operatorname{Arg} \max\limits_{z \in A_0} f (z) = \varnothing$.

Пусть $z_0 \in \operatorname{Arg} \max\limits_{z \in A_0} f (z)$. В силу сделанного предположения $\underset{\sim}{P} (z_0, y^*) < \alpha$. В силу α-нормальности нечеткой функции $\underset{\sim}{P}$, существует $y_0 \in A$ – действие АЭ такое, что пара (z_0, y_0) – решение задачи (4.3.13) и, следовательно, в силу утверждения 4.3.1: y_0 – α – недоминируемое действие. Более того, y_0 доминирует y^* со степенью, строго большей, чем $(1-\alpha)$. Значит y^* – не является α – недоминируемым действием. Противоречие.

Доказательство леммы 4.3.5.

При использовании системы стимулирования $\chi(\tilde{x},z)$, где $\tilde{x} \in [z^-, z^*]$, выполнено: $\tilde{x} \in \operatorname{Arg} \max\limits_{z \in A_0} f(z)$. В силу предположений леммы множество Q непусто (требование α-нормальности в условиях настощей леммы, как мы увидим в дальнейшем, является даже чресчур сильным). В соответствии с (4.3.20), пара $(\tilde{x}, y \in Q(\tilde{x},\alpha))$ является решением задачи (4.3.13). Тогда по утверждению 4.3.1 y – α-недоминируемое действие.

Доказательство утверждения 4.4.2.

Пусть центр использует произвольную систему стимулирования χ из класса M.

Если множество $P_z(\chi)$ не содержит точек z^- и z^*, то, очевидно, существует план (точка скачка) $x \in (z^-, z^*) \subseteq A_0$, такой, что x – единственная точка максимума целевой функции АЭ, причем $x \in P_z(\chi_c)$. По лемме 4.4.1 имеем, что эффективность системы стимулирования χ_1 не ниже, чем χ.

Предположим, что одна из точек z^- или z^+ принадлежит множеству $P_z(\chi)$. Пусть для определенности $z^+ \in P_z(\chi)$. Покажем, что при этом $z_2 = \arg\max_{z \in A_0} h(z)$ также принадлежит этому множеству.

Предположим противное, то есть пусть $z_2 \notin P_z(\chi)$. Тогда из определения $P_z(\chi)$ получаем:

$$h(z_2) - \chi(z_2) < h(z^+) - \chi(z^+).$$

Из определения точки z^+ следует, что:

$$h(z_2) - h(z^+) < \chi(z_2) - \chi(z^+).$$

Левая часть неравенства в точности равна C - противоречие с предположением А.1.2. Итак, $z^+ \in P_z(\chi)$. Устанавливая план $x = z^+$, получаем, что $P_z(\chi_1(z^+, z)) = \{ z_2, z^+ \}$, то есть $P_z(\chi_1) \subseteq P_z(\chi)$. По лемме 4.4.1 имеем, что эффективность системы стимулирования χ_1 не ниже, чем χ. Случай $z^- \in P_z(\chi)$ рассматривается полностью аналогично. Пункт а) доказан.

Для доказательства пункта б) утверждения достаточно привести пример АС, в которой эффективность системы стимулирования К-типа строго меньше, чем С-типа (см. пример 4.4.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Айдарханов М.Б., Арсланов М.З., Мурзахметов А.Б. Согласованная оптимизация в активных системах: многокритериальность, нечеткость, связь с векторной оптимизацией / Проблемы информатики и управления. Алматы: Гылым, 1995. С. 3-12.

2. Ашимов А.А., Бурков В.Н., Джапаров Б.А., Кондратьев В.В. Согласованное управление активными производственными системами. М.: Наука, 1986. - 248 с.

3. Барабанов И.Н., Новиков Д.А. Механизмы управления риском в динамической модели эколого-экономической системы // Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях. 1994. N 10. С. 19 - 26.

4. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях / Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976. С. 172 - 215.

5. Большие системы: моделирование организационных механизмов / Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. М.: Наука, 1989.-245 с.

6. Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А., Юсупов Б.С. Механизмы распределения ресурса и затрат в рыночной экономике. М.: ИПУ РАН, 1997. - 50 с.

7. Бурков В.Н., Грацианский Е.В., Еналеев А.К., Умрихина Е.В. Организационные механизмы управления научно - техническими программами. М.: ИПУ РАН, 1993. - 64 с.

8. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Вероятностная задача стимулирования // А и Т. 1993. N 12. С. 125 - 130.

9. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // А и Т. 1993. N 11. С. 3 - 30.

10. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // А и Т. 1996. N 3. С. 3 - 25.

11. Бурков В.Н., Ириков В.А. Модели и методы управления организационными системами. М.: Наука, 1994. - 270 с.

12. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. - 384 с.

13. Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Цыганов В.В., Черкашин А.М. Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. М.: Наука, 1984. - 272 с.

14. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996. - 125 с.

15. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. - 188 с.

16. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Модели и механизмы теории активных систем в управлении качеством подготовки специалистов. М.: ИЦ, 1997. - 158 с.

17. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью. II // А и Т. 1995. N 10. С. 121 - 126.

18. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Управление организационными системами: механизмы, модели, методы // Приборы и системы управления. 1997. N 4. С. 55 - 57.

19. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. - 255 с.

20. Величко А.И., Подмарков В.Г. Социолог на предприятии. М.: Московский рабочий, 1976. - 240 с.

21. Гвишиани Д.М. Организация и управление. М.:Наука,1972.-382 с.

22. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. - 328 с.

23. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико - игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М. : Радио и связь, 1982. - 144 с.

24. Данилов В.И., Сотсков А.И. Механизмы группового выбора. М.: Наука, 1991. - 176 с.

25. Еналеев А.К., Лавров Ю.Г. Оптимальное стимулирование в активной системе с одним стохастическим элементом // А и Т. 1990. N 2. С. 104 - 113.

26. Еналеев А.К., Новиков Д.А. Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью. I // А и Т. 1995. N 9. С. 117 - 126.

27. Зеленевский Я. Организация трудовых коллективов М.: Прогресс, 1971. - 311 с.

28. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. - 606 с.

29. Карлоф Б. Деловая стратегия. М.: Экономика, 1991. - 239 с.

30. Кикнадзе Д.А. Потребности, поведение, воспитание. М.: Мысль, 1968. - 147 с.

31. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. - 238 с.

32. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. М.: Прогресс, 1979.- 504 с.

33. Кондратьева Т.В., Константинова Н.В. Учет активности человека в организационных системах / Механизмы функционирования организационных систем. М.: ИПУ, 1982. С. 98 - 103.

34. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991. - 211 с.

35. Краткий психологический словарь. М.: Политиздат, 1985.-431 с.

36. Кузьмицкий А.А., Новиков Д.А. Организационные механизмы управления развитием приоритетных направлений науки и техники. М.: ИПУ РАН, 1993. - 68 с.

37. Леонтьев А.Н. Потребности, мотивы, эмоции. М.: МГУ,1971.-41с.

38. Мальцев В.А. Соревнование и личность. М.: Мысль, 1983.-157 с.

39. Мескон М.Х., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента. М.: Дело, 1994. - 702 с.

40. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987. - 280 с.

41. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. - 464 с.

42. Новиков Д.А. Динамика поведения систем с большим числом целенаправленных элементов // А и Т. 1996. N 12. С. 187 - 189.

43. Новиков Д.А. Механизмы гибкого планирования в активных системах с неопределенностью // А и Т. 1997. N 5. С. 118 - 125.

44. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // А и Т. 1997. N 6. С. 3 - 26.

45. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в моделях активных систем с нечеткой неопределенностью. М.: ИПУ РАН, 1997. - 101 с.

46. Новиков Д.А. Оптимальность правильных механизмов управления активными системами. I. Механизмы планирования // А и Т. 1997. N 2. С. 154 - 161.

47. Новиков Д.А. Оптимальность правильных механизмов управления активными системами. II. Механизмы стимулирования // А и Т. 1997. N 3. С. 161 - 167.

48. Новиков Д.А. Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью. III // А и Т. 1995. N 12. С. 118 - 123.

49. Новиков Д.А. Оптимальные механизмы стимулирования в активных системах с нечеткой внешней неопределенностью // А и Т. 1997. N 9. С. 200 - 203.

50. Новиков Д.А. Оптимальные механизмы стимулирования в системах управления экологической безопасностью // Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях. 1994. N 8. С. 51 - 56.

51. Новиков Д.А. Стимулирование в вероятностных активных системах: роль неопределенности// А и Т. 1997. N 8. С. 168 - 177.

52. Новиков Д.А. Механизмы страхования: перераспределение риска и манипулирование информацией // Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях. 1997. N 5. С. 44 - 55.

53. Новиков Д.А. Экономические механизмы экологического мониторинга // Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях. 1996. N 12. С. 23 - 29.

54. Ожегов С.И. Словарь русского языка. М.: Советская энциклопедия, 1970. - 900 с.

55. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. - 206 с.

56. Психологический словарь / Под ред. В.П. Зинченко. М.: Педагогика - Пресс, 1996. - 440 с.

57. Свенцицкий А.Л. Социально-психологические проблемы управления. Л.: ЛГУ, 1975. - 120 с.

58. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978. - 352 с.

59. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. М.: Дело, 1993. - 864 с.

60. Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. М.: Наука, 1991. - 166 с.

61. Чангли И.И. Труд. Социологические аспекты теории и методологии исследования. М.: Наука, 1973. - 583 с.

62. Эренберг Р.Дж., Смит Р.С. Современная экономика труда. Теория и государственная политика. М.: Изд-во МГУ, 1996. - 800 с.

63. Arrow K.J. Social choice and individual values. Chicago: Univ. of Chicago, 1951. - 204 p.

64. Azariadis C. Implicit contracts and underemployment equilibria // J. of Political Economy. 1975. N 6. P. 1183 - 1202.

65. Baily M. Wages and employment under uncertain demand // Review of Economic Studies. 1974. Vol. 41. N 125. P. 37 - 50.

66. Barett C.R., Pattanaik P.K., Salles M. Rationality and aggregation of preferences in ordinally fuzzy framework // Fuzzy Sets and Systems. 1992. Vol. 49. N 1. P. 9 - 13.

67. Burkov V.N., Enaleev A.K. Stimulation and decision-making in the active systems theory: review of problems and new results // Mathematical Social Sciences. 1994. Vol. 27. P. 271 - 291.

68. Burkov V.N., Lerner A.Ya. Fairplay in control of active systems / Differential games and related topics. Amsterdam, London: North-Holland publishing company, 1971. P. 325 - 344.

69. Burkov V.N., Novikov D.A. Active systems theory and contract theory: comparison of ideas and results / Proceedings of X-th IC on Systems Engineering. UK. Coventry. 1994. P. 164 - 168.

70. Dasgupta P., Hammond P., Maskin E. The implementation of social choice rules: some general results on incentive

compatibility // Review of Economic Studies. 1979. Vol. 46. N 2. P. 185 - 216.

71. Frank J. The new Keynesian economics: unemployment, search and contracting. Brington: Wheatsheaf books, 1986. - 283 p.

72. Glueck W.F. Management essentials. Hinsdale, Illinoise: The Dryden Press, 1979. - 314 p.

73. Gordon D. A neo-classical theory of Keynesian unemployment // Economic Inquiry. 1974. N 12. P. 431 - 459.

74. Grossman S., Hart O. An analysis of the principal-agent problem // Econometrica. 1983. Vol. 51. N 1. P. 7 - 45.

75. Harsanyi J.C. Games with incomplete information played by "Bayesian" players // Management Science. Part I: 1967. Vol. 14. N 3. P. 159 - 182; Part II: 1968. Vol. 14. N 5. P. 320 - 334; Part III: 1968. Vol. 14. N 7. P. 486 - 502.

76. Hart O.D., Holmstrom B. Theory of contracts // Advances in economic theory. 5th world congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. P. 71 - 155.

77. Hart O.D. Optimal labor contracts under asymmetric information: an introduction // Review of Economic Studies. 1983. Vol. 50. N 1. P. 3 - 35.

78. Herzberg F. Work and the nature of man. N.Y.: World Publishing Company, 1966. - 184 p.

79. Katz D. The motivational basis of organizational behavior // Behavioral Science. 1964. Vol. 9. P. 131 - 146.

80. Management and motivation / Ed. by V.H.Vroom, E.L.Deci. London: Pengium books, 1989. - 399 p.

81. Maslow A.H. A theory of human motivation // Psychological Review. 1943. Vol. 50. P. 370 - 396.

82. Mayo E. The human problems of an industrial civilization. N.Y.: McMillan Press, 1933. - 176 p.

83. McGregor D.M. The human side of enterprise / Adventures in Thought and Action. Proceedings of V-th Anniversary Convocation of the School of Industrial Management. MT: MIT, 1957. P. 23-30.

84. Moore J. Implementation, Contracts and Renegotiation in Environment with Complete Information. Advances in Economic Theory. Vol.1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. P.182-281.

85. Myerson R. Optimal coordination mechanisms in generalized principal - agent problems // J. of Mathematical Economy. 1982. Vol. 10. N 1. P. 67 - 81.

86. Nojiri H. On the fuzzy team decision in a changing environment// Fuzzy Sets and Systems. 1980. Vol.3. N2. P.137-150.

87. Novikov D.A. Incentives in organizations: uncertainty and efficiency / 6-th IFAC Symposium on Automated Systems Based on Human Skills. Kranjska Gora. 1997. P. 274 - 277.

88. Opsahl R.L., Dunnete M.D. The role of financial compensation in industrial motivation // Psychological Bulletin. 1966. Vol. 66. P. 94 - 118.

89. Palfrey T.P. Implementation theory / Handbook of Game theory. Vol.3. (forthcoming).

90. Perlman R. Labor theory. N.Y.: Wiley, 1969. - 237 p.

91. Porter L.W., Lawler E.E.Ill, Hackman J.R. Behavior in organizatons. N.Y.: McGraw Hill Book Company, 1975. - 561 p.

92. Sen A. Social choice theory / Handbook on mathematical economics. Vol. 3. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 1073-1181.

93. Simon H. Administrative behavior. N.Y.:MacMillan,1970.-259p.

94. Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making // Fuzzy Sets and Systems. 1984. Vol. 12. N 2. P. 117-132.

95. Taylor F.W. The principles of scientific management / Scientific Management. N.Y.: Harper, 1947. - 244 p.

96. Vroom V.H. Industrial social psychology / The Handbook of social psychlogy. Vol 5. N.Y.: Addison-Wesley, 1969. P. 200-208.

97. Vroom V.H. Work and motivation. N.Y. Wiley, 1964. - 334 p.

Заказ 336 **Тираж 200 экз.**