Губко М.В., Новиков Д.А.

ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

В настоящем приложении рассматривается аппарат описания предпочтений участников организационных систем – отношения предпочтения и функции полезности.

Отношения предпочтения. Как отмечалось в первой главе, в основе теории принятия решений лежит предположение, что человек, поставленный перед проблемой выбора, в процессе выработки решения (выбора альтернативы) руководствуется своими предпочтениями, то есть выбирает действие, которое, по его мнению, приведет к наиболее предпочтительному для него результату деятельности (исходу). Формальное описание процесса сравнения альтернатив может быть дано через отношения предпочтения и неразличимости. Введем необходимые определения [2, 9].

Бинарное отношение $\wp$ на множестве A_0 – это подмножество $\tilde{A} \subseteq A_0 \times A_0$, где $A_0 \times A_0$ – множество всех упорядоченных пар (a,b), $a, b \in A_0$. Если $(a, b) \in \tilde{A}$, говорят, что отношение $\tilde{A}$ *выполнено* (или *имеет место*) для (a, b) и пишут $a \tilde{A}\, b$.

Если бинарное отношение $\tilde{A}$ не имеет места для a, b, этот факт обозначается $a \tilde{A}^c b$.

Отношение предпочтения $\mathbf{f}$ – это бинарное отношение, определяемое свойством: $a\ \mathbf{f}\ b$ тогда и только тогда, когда a предпочтительнее (лучше) для *лица, принимающего решение* (ЛПР), чем b.

Отношение неразличимости $\approx$ имеет место для пары a, b тогда и только тогда, когда $a\ \mathbf{f}^c\ b$ и $b\ \mathbf{f}^c\ a$.

Отношение $\tilde{A}$ называется *рефлексивным*, если для всех $a \in A_0$ выполнено $a \tilde{A}\, a$, *антирефлексивным*, если для всех $a \in A_0$ выполнено $a \tilde{A}^c a$.

Отношение $\tilde{A}$ называется *антисимметричым*, если из $a \tilde{A}\, b$ и $b \tilde{A}\, a$ следует $a = b$, *асимметричным*, если из $a \tilde{A}\, b$ следует $b \tilde{A}^c a$.

Далее рассматривается отношение *строгого* предпочтения $\mathbf{f}$, для которого выполнено условие асимметричности.

Отношение $\tilde{A}$ называется *транзитивным*, если для всех $a, b, c \in A_0$ из $a\tilde{A}b$ и $b\tilde{A}c$ следует $a\tilde{A}c$.

Отношение $\tilde{A}$ называется *полным*, если для всех $a, b \in A_0$ выполнено $a\tilde{A}b$ или $b\tilde{A}a$.

Пусть на множестве исходов A_0 задано предпочтение ЛПР, то есть отношение типа $\mathbf{f}$, которое для пары a, b исходов из A_0 выполняется, если a лучше b с точки зрения лица, принимающего решение. Определим также множество действий A. Это множество содержит все возможные действия ЛПР и состоит из элементов вида «Сделать то-то», «Приказать то-то», «Купить то-то…» и пр.

Однако определением множеств A_0, A и отношения предпочтения на A_0 формулировка задачи принятия решения не исчерпывается. Необходимо определить еще связь между принятым решением и реализующимся результатом.

Задача принятия решения – это задача выбора ЛПР действия из множества A, которое приводит к наилучшему с точки зрения предпочтения ЛПР результату из A_0. Чтобы решить эту задачу, необходимо тем или иным образом из отношения предпочтения на множестве исходов A_0 вывести отношение предпочтения на множестве действий A, а затем выбрать наиболее предпочтительное действие.

Пусть имеется некоторая функция w: $A \to A_0$ – детерминированное (однозначное) соответствие между выбранным действием и его результатом. В этом случае выбор действия равнозначен выбору результата. Задача, таким образом, состоит лишь в нахождении *реализуемого исхода* (то есть исхода, для которого есть действие, его реализующее), предпочтительного по отношению ко всем остальным реализуемым исходам. Выбранное действие будет принадлежать множеству:

$$P(\mathbf{f}, A) = \{a \in A \mid \overline{\exists}\, b \in A : w(b)\ \mathbf{f}\ w(a)\}.$$

Все действия, принадлежащие решению, приводят к исходам, равнозначным с точки зрения отношения $\approx$.

Такая задача называется *детерминированной задачей принятия решения*.

Сложнее дело обстоит, если результат z действия y зависит не только от самого действия ЛПР, но и от некоторых внешних по отношению к ЛПР факторов, то есть зависимость результата от действия имеет вид $z = w(y, q, u)$, где q и u – факторы, не зависящие от ЛПР. Множества возможных значений этих параметров обозначим Θ и U соответственно. Если эти факторы известны на момент принятия решения, задача сводится к предыдущему случаю. Если же они не известны, возникает неопределенность.

Теперь уже выбор ЛПР некоторого действия y^* не приводит к единственному возможному результату. В зависимости от реализации не зависящих от ЛПР факторов q и u может реализоваться любой результат из множества $R(y^*) = \{w(y^*, q, u) \mid q \in \Theta, u \in U\}$. Чтобы сделать выбор, ЛПР необходимо сравнивать эти множества. Однако отношение предпочтения на системе множеств $R(\cdot)$ не задано условиями задачи. Его необходимо получать (возможно, используя некоторые дополнительные предположения) из отношения предпочтения на множестве результатов A_0.

Так, если известно распределение вероятностей реализации событий из Θ и U, то можно определить вероятности появления различных результатов при выборе определенного действия – получаем *задачу принятия решения в условиях вероятностной неопределенности* (см. раздел 1.1 и [2, 6]).

Немногим отличается случай, когда ЛПР не имеет информации о вероятностях некоторых значимых событий, но имеет предположения о них. В этом случае объективные вероятности заменяются на субъективные и реализуется та же схема решения.

Таким образом, в данном примере каждое решение (действие) ЛПР приводит к *лотерее*, случайному процессу, в котором исходы могут реализовываться с некоторыми вероятностями. Для того, чтобы от предпочтения на множестве исходов перейти к предпочтениям на множестве действий, ЛПР должен уметь сравнивать свои предпочтения на множестве подобных лотерей, то есть определять, какая из лотерей для него лучше или хуже. Тогда оптимальным решением будет действие, приводящее к наилучшей лотерее. Каким образом осуществляется этот переход, описывается ниже.

Полезность и функция полезности. При решении задач принятия решений для описания интересов ЛПР редко используется непосредственно отношение предпочтения. Это связано с тем, что бинарные отношения довольно неудобны для моделирования реальных систем и анализа этих моделей. Гораздо чаще используются *функции полезности*.

Соответствие между отношением предпочтения $\succ$ и функцией полезности $f : A_0 \to \Re^1$ определяется условием

(1) $\forall a, b \in A_0 \quad f(a) > f(b) \Leftrightarrow a \succ b$.

Рассмотрим, каким ограничениям должно удовлетворять отношение предпочтения, чтобы можно было рассматривать вместо него функцию полезности. Эта задача является предметом изучения *математической теории полезности* [3, 8].

Как отмечалось выше, отношение предпочтения – бинарное отношение на множестве исходов A_0, удовлетворяющее, как минимум, свойству *асимметрии*. Для продуктивного использования, однако, необходимы дополнительные условия на отношение предпочтения. При этом то, какие дополнительные предположения необходимо сделать, чтобы получить инструмент, с которым можно работать, не отходя в то же время от встречающихся в реальной жизни предпочтений – это вопрос, который на протяжении многих лет служил предметом дискуссий и продолжает обсуждаться до сих пор. Дело в том, что подобные дополнительные предположения вводятся в виде аксиом, некоторых гипотез о закономерностях процесса выбора, и обоснованность введения тех или иных предположений отнюдь не бесспорна.

Приведем типичный набор таких аксиом (отметим, что некоторые из перечисленных ниже аксиом зависимы). Другие примеры введения аксиоматики можно найти в [8].

Введем следующие *аксиомы полезности*:

1. Если $\succ$ – отношение предпочтения (асимметричное), $\approx$ – отношение неразличимости, то для любых исходов x и y имеет место одно из событий: либо $x \succ y$, либо $y \succ x$, либо $x \approx y$, то есть для любой пары исходов либо первый исход предпочтительнее второго, либо второй предпочтительнее первого, либо же исходы равнозначны. Если $a \approx b \Leftrightarrow a \succ^c b$ и $b \succ^c a$, то эта аксиома выполняется всегда.

2. $x \approx x$, для любого исхода x, то есть исход всегда неотличим от себя самого, что также очевидным образом следует из определения отношения безразличия.

3. Если $x \approx y$, $y \approx z$, то $x \approx z$. Это – условие *транзитивности отношения неразличимости*, оно уже не столь очевидно. Существуют примеры достаточно логичных с точки здравого смысла предпочтений, когда эта аксиома не выполняется (см. ссылки в [3]).

4. Если $x \succ y$, $y \succ z$, то $x \succ z$ (условие *транзитивности отношения предпочтения*).

5. Если $x \succ y$, $y \approx z$, то $x \succ z$, то есть если x лучше y и y равнозначно z, то x лучше z. На самом деле, эта аксиома вводит предположение о произвольно глубокой разрешающей способности агента – о том, что последний всегда может различить сколь угодно близкие ситуации.

6. Если $x \approx y$, $y \succ z$, то $x \succ z$ (аналогично аксиоме 5).

Этих предположений хватает [62], чтобы ввести функцию $f(\cdot)$ таким образом, чтобы выполнялось условие (1). Однако, их недостаточно, чтобы определить эту функцию однозначно. И действительно, в случае конечного числа исходов нестрогое упорядочение позволяет лишь выстроить их в порядке от наихудшего до наилучшего. Этой последовательности событий можно сопоставить любую последовательность возрастающих чисел, назначая в качестве значения функции полезности соответствующий элемент числовой последовательности (другими словами, функция полезности определена с точностью до монотонного преобразования).

Чтобы от отношения предпочтения перейти к определенной с точностью до линейного преобразования функции полезности, требуются дополнительные аксиомы (так называемые, *аксиомы комбинирования*), определяющие модель поведения в условиях неопределенности.

Пусть x и y – любые исходы из A_0 и $0 < r, s < 1$. Тогда выражение $r\,x + (1 - r)\,y$ будет обозначать исход, представляющий собой лотерею, которая реализует два исхода x и y с вероятностями r и $(1 - r)$ соответственно. Тогда от этой лотереи потребуем выполнения следующих условий:

7. $rx + (1 - r)\,y = (1 - r)\,y + r\,x$ для любой лотереи r на x, y. Это свойство *коммутативности лотереи*, имеющее лишь техническое значение. Оно, по сути, не ограничивает предпочтения.

8. $r\,x + (1 - r)\,(s\,y + (1 - s)\,z) = r\,x + (1 - r)\,s\,y + (1 - r)\,(1 - s)\,z$ для любых лотерей s и r на исходах $x, y, z \in A_0$. Это свойство

вводит предположение о том, что для ЛПР порядок лотерей не важен.

9. $r\,x + (1 - r)\,x = x$ (*рефлексивность лотереи*).

10. Если $x \approx z$, то для любых y, r имеем

$$(r\,x + (1 - r)\,y) \approx (r\,z + (1 - r)\,y).$$

11. Если $x \succ z$, то для любых $r > 0$ и y имеем

$$(r\,x + (1 - r)\,y) \succ (r\,z + (1 - r)\,y).$$

12. Пусть $x \succ z \succ y$. Тогда существует $0 \le r \le 1$, такое, что $(r\,x + (1 - r)\,y) \approx z$. Эта очень важная аксиома имеет отдельное название – *аксиома непрерывности*.

В [3] доказано (теорема фон-Неймана–Моргенштерна), что, если для отношения предпочтения $\succ$ выполнены аксиомы 1-12, то существует функция $f\colon A_0 \to R$, что для любых x, y из A_0 и любого $r \in [0, 1]$

(2) $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x \succ y$,

(3) $f(rx + (1 - r)y) = r\,f(x) + (1 - r)\,f(y)$.

Эта функция единственна *с точностью до положительного линейного преобразования*, то есть если некоторая функция $F(\cdot)$ удовлетворяет условиям (2), (3), то $F(x) = a\ f(x) + b$, где $a > 0$ и b – некоторые константы (доказательство можно также найти в [2, 3, 7]).

Итак, предположений 1-12 достаточно, чтобы построить по отношению предпочтения функцию полезности, единственную с точностью до переноса координат и изменения масштаба [7, 8], то есть описать полезность в виде функции $F(x) = a\ f(x) + b$, где $f(x)$ – некоторая известная функция, а константы $a > 0$ и b не определены.

В постановках задач математической экономики и управления отношение предпочтения, как таковое, фигурирует крайне редко. Функция полезности в этом случае строится почти эмпирически (на самом деле при этом используются уже полученные, готовые результаты теории полезности [1, 2, 3, 5, 7, 8, 9]). Тем не менее, всегда необходимо помнить, что для корректного использования функции полезности Неймана-Моргенштерна, предпочтение, которым она определяется, должно удовлетворять аксиомам 1-12.

Выше была построена функция полезности отдельного агента. Однако задачей теории принятия решений и теории игр является исследование взаимодействия многих агентов. Поэтому интересен вопрос о том, как соотносятся друг с другом полезности разных агентов, как «привести к общему знаменателю» шкалы измерения их полезностей. Особенную актуальность этот вопрос представляет при рассмотрении игровых моделей, в которых игроки могут передавать друг другу полезность (так называемые *игры с трансферабельной полезностью,* или *ТП-игры*, в отличие от *игр с нетрансферабельной полезностью*, или *НТП-игр,* в которых передача полезности запрещена правилами игры). Передача полезности между игроками может принимать вид денежных выплат или передачи иных материальных ценностей. Поскольку целью таких платежей является воздействие на полезность (или *выигрыш*) игрока, понятно, что в этом случае частью описания исходов (на множестве которых определена функция полезности) должно быть количество денег или материальных ценностей, являющихся средством обмена. Можно показать [7], что для того, чтобы уменьшение полезности «донора» d при передаче некоторого количества денег соответствовало пропорциональному увеличению полезности «акцептора» a, их функции полезности $F_i(\cdot)$ должны иметь вид:

(4) $F_i(x_i, c_i) = g_i(x_i) + l_i c_i, \; i \in \{d, a\}$

где $F_i(\cdot)$ – функция полезности игрока i, c_i – сумма денег в его распоряжении, x_i – остальные компоненты описания исхода для игрока i, а $g_i(\cdot)$ – полезность компонент x ситуации.

Если функции полезности имеют вид (4) для всех рассматриваемых индивидуумов, то говорят о существовании *отделимого линейно трансферабельного товара*. При этом соответствующим выбором масштаба функций предпочтения можно сделать приращения полезности при передаче некоторого количества денег не просто пропорциональными, но и равными по абсолютной величине. Наличие линейно трансферабельного товара облегчает исследование моделей управления организационными системами.

Литература

1 Баркалов С.А., Новиков Д.А., Попов С.С. Индивидуальные стратегии предложения труда: теория и практика. М.: ИПУ РАН, 2002. – 109 с.

2 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.

3 Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

4 Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998. – 68 с.

5 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

6 Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.

7 Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

8 Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.

9 Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.