В.Н. Бурков, Д.А. Новиков

ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ

Настоящий материал содержит описание ряда прикладных моделей теории управления организационными системами (ОС) и основывается на книге:

Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. М.: Синтег, 2003,

содержащей как более подробное изложение, так и ссылки на соответствующую литературу.

В качестве учебных пособий по используемому математическому аппарату можно порекомендовать[1]:

Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.

Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Механизмы комплексного оценивания..2
2. Механизмы согласия 18
3. Многоканальные механизмы..23
4. Механизмы «затраты-эффект»..30
5. Конкурсные механизмы 35
6. Механизмы назначения..40
7. Механизмы оптимизации производственного и коммерческого циклов 47
8. Механизмы синтеза организационной структуры 53
9. Механизмы смешанного финансирования 64
10. Противозатратные механизмы..73
11. Механизмы самоокупаемости...77
12. Механизмы страхования 83

[1] *Материалы по теории графов и теории игр, а также по другим (не рассматриваемым ниже) теоретическим и прикладным моделям и методам управления организационными системами, можно также найти на сайте* www.mtas.ru.

1. МЕХАНИЗМЫ КОМПЛЕКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Для выработки эффективных управляющих воздействий на всех этапах принятия решений, начиная с этапа целеполагания и заканчивая этапом оперативного управления, управляющему органу – центру – необходимо обладать достаточной информацией о поведении управляемых субъектов – *агентов*, в частности – относительно результатов их деятельности. В сложных (многоэлементных, многоуровневых, деятельность которых описывается многими критериями) системах в силу ограниченности возможностей центра по переработке информации или в силу отсутствия детальной информации целесообразно использование *механизмов комплексного оценивания*, которые позволяют осуществлять свертку показателей, то есть агрегировать информацию о результатах деятельности отдельных агентов и подсистем.

При исследовании механизмов комплексного оценивания решаются две задачи. Первая – синтез процедуры агрегирования информации, которая адекватно отражала бы содержательные аспекты взаимодействия участников организационной системы (ОС) и позволяла центру принимать решения на основании агрегированной информации. Это направление тесно связано с проблематикой многокритериальной оптимизации. Второе направление, отражающее специфику целенаправленного поведения агентов – исследование манипулируемости механизмов комплексного оценивания. Действительно, механизмы комплексного оценивания являются механизмами с сообщением информации, а при сообщении информации в ОС возникает проблема манипулирования. Кроме того, так как исходными оценками деятельности агентов, зачастую, являются мнения экспертов, то возникает проблема манипулируемости механизмов экспертизы, рассмотренная выше.

Описание механизмов комплексного оценивания в настоящем разделе будем вести на примере задач регионального управления.

Разработка систем регионального управления требует описания объектов управления (предприятий и организаций региона, основных групп населения, политических партий и общественных движений и т.д.), определения основных (существенных) факторов, характеризующих социально-экономическую обстановку в регионе, оценки этих факторов, создания механизмов разработки и реализации региональных программ развития. Решение этих задач сталкивается с трудностями, предопределенными особенностью объекта управления.

Одной из основных задач при разработке систем регионального управления является оценка социально-экономического состояния региона, как существующего, так и желательного. Действительно, чтобы управлять, необходимо в первую очередь оценить, где мы находимся и куда хотим попасть. В последнее время большое распространение для построения обобщенных оценок объектов самого различного типа получил подход, основанный на использовании *дерева целей*. При этом каждый элемент (вершина) дерева, включая итоговый, дезагрегируется ровно на два подэлемента, то есть используется так называемый *метод дихотомии*. Агрегирование каждой пары элементов в элемент последующего (верхнего) уровня производится с помощью логических матриц свертки. Такой подход применяется для разработки региональных *программ развития*. Ниже описан метод оптимизации программы по стоимости на основе построения сети напряженных (Парето-оптимальных) вариантов программы.

Решение задачи формирования согласованной программы развития региона предполагает реализацию противоречивых целей в рамках существующих ресурсных ограничений. В этом случае для принятия решения необходимо использовать механизм оценки достижимости целей.

Будем рассматривать регион как сложную организационную систему, состояние которой можно оценить по ряду факторов или критериев. Пусть оцениваемая организационная система описывается на основе заданного набора частных критериев вектором $K = (k_1, ..., k_i, ..., k_n)$, где k_i – значение i-го частного критерия. Задача заключается в построении скалярного комплексного критерия функционирования $f(K)$, наиболее адекватно отражающего степень достижения поставленных перед организационной системой целей. Комплексным критерием в данном случае является уровень социально-экономического состояния региона, в качестве частных критериев могут быть рассмотрены экономические (наполняемость регионального бюджета, финансовые показатели деятельности промышленных предприятий и т.д.) и социальные (уровень занятости, средняя заработная плата, уровень жизни и т.д.) показатели.

Оценка достижимости целей в общем случае – сложная иерархическая процедура, включающая такие операции, как преобразование шкалы, нормирующее преобразование шкалы, агрегирование.

Рассмотрим варианты комплексных критериев функционирования организационной системы, отражающих определенные качественные свойства целей, поставленных перед ней. Будем считать, что качественными целями организационной системы является увеличение частных критериев (чем больше, тем лучше).

Если качественным свойством целей организации является равномерное (в определенном соотношении) улучшение всех локальных показателей деятельности, соответствующая комплексная оценка имеет вид

$$(1)\quad F(K) = \min_i \left(k_i \big/ a_i \right),$$

где a_i – положительные параметры, отражающие информацию об относительной важности различных критериев. Луч $a\,t$ ($t > 0$) определяет траекторию предпочтительного (гармоничного) развития системы. Положительным свойством оценки (1) является простота выделения «узких мест», то есть показателей, которые в данный момент являются «критическими», и на их улучшение следует обратить первоочередное внимание.

Оценка (1) имеет и другую важную интерпретацию. Если вектор $\bar{a}$ принять за «точку идеала», то есть точечную цель, к которой должна стремиться организационная система, то (1) является гарантированной оценкой степени достижения этой цели (например, $f(K) = 0{,}6$ означает, что близость к цели составляет не менее чем 60% по каждому локальному критерию).

Если качественным свойством целей является улучшение хотя бы одного локального критерия, то соответствующий комплексный критерий достижения целей организации принимает вид

$$(2)\quad F(K) = \max_i \left(k_i \big/ a_i \right),$$

где a_i, как и в предыдущем случае, отражает важность частного критерия k_i.

Эта оценка ориентирует на концентрацию усилий в определенной области. Если цели, поставленные перед организационной системой, носят смешанный характер (и улучшение всех показателей, и достижение высоких результатов в каком-либо направлении), то применяется средневзвешенная степенная оценка деятельности:

$$(3)\quad f(K)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left({k_i}/{a_i}\right)^{s}\right)^{1/s},\quad s>0.$$

При $s = 1$ получаем простейший вид оценки (*линейная свертка*)

$$(4)\quad f(K)=\sum_{i=1}^{n}\left({k_i}/{a_i}\right).$$

Следует иметь в виду, что оценка (4) отражает свойство взаимного замещения целей (то есть недостатки в одной области можно компенсировать достижениями в любой другой) и использовать ее нужно очень осторожно. Применяя к описанным вариантам операции преобразования шкалы и агрегирования, можно получить достаточно богатый набор возможных процедур оценки деятельности.

Воспользуемся возможностью представления рассмотренных базовых оценок в дихотомическом виде. Для свертки (1) имеем:

$$\min {k_i}/{a_i}=\min\left\{{k_1}/{a_1};\min\left[{k_2}/{a_2};\min\left\{{k_3}/{a_3};\ldots\min\left({k_{n-1}}/{a_{n-1}};{k_n}/{a_n}\right)\right\}\right]\right\}$$

Для свертки (3) при $n = 3$ имеем

$$f(K)=\left\{\left({k_1}/{a_1}\right)^{s}+\left(\left[\left({k_2}/{a_2}\right)^{s}+\left({k_3}/{a_3}\right)^{s}\right]^{1/s}\right)^{s}\right\}^{1/s}.$$

В общем случае дихотомическое представление можно описать структурной схемой (см. рисунок 1). Структурные схемы такого рода представляют собой прадерево с корневой вершиной, соответствующей комплексной оценке, и висячими вершинами, соответствующими локальным критериям. Каждой промежуточной вершине K соответствует агрегированная оценка q_k получаемая в результате свертки двух оценок соответствующих вершин нижнего уровня.

Структурной схеме рисунка 1 соответствует дихотомическое представление комплексной оценки

$$q_0 = f(K) = j_1[k_1\,(j_2\,(k_4,\ j_3(k_2,\ k_3))].$$

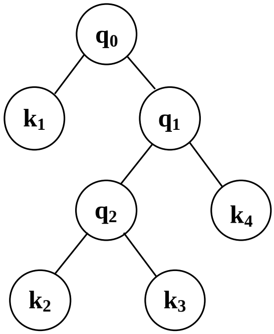

Рис. 1. Дихотомическое представление

Особенностью дихотомического представления является многошаговая процедура агрегирования, причем на каждом шаге производится агрегирование только двух оценок. Эта особенность дихотомического представления позволяет решать задачу комплексной оценки деятельности по *n* критериям путем последовательного решения ряда задач с двумя критериями. Дихотомическое представление допускает достаточно широкий класс комплексных критериев достижения целей.

На рисунке 2 приводится иерархическая структура для трех критериев оценки программы развития – экономической эффективности, уровня жизни и экологической безопасности (обозначим их соответственно буквами Э, Ж и Б).

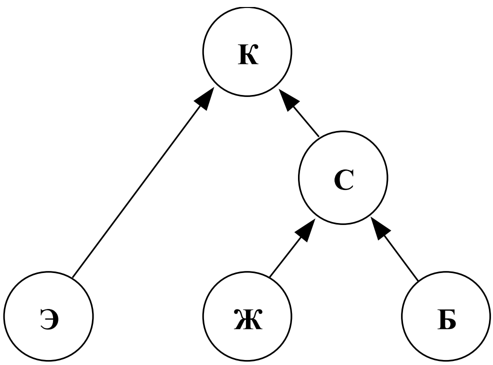

Рис. 2. Структура критериев

Представляется естественным сначала объединить критерии уровня жизни и экологической безопасности в один агрегированный критерий социального уровня (С). Далее, объединяя социальный уровень с экономической эффективностью, получим комплексную оценку социально-экономического уровня, который обеспечивает анализируемый вариант программы развития. Особенностью иерархической структуры рисунка 2 является агрегирование в каждом узле дерева только двух оценок. Это крайне привлекательная особенность. Дело в том, что комплексная оценка должна отражать приоритеты развития региона. Формирование этих приоритетов, а значит и формирование комплексной оценки, должно проводиться первыми лицами (главой администрации, его заместителями, начальниками управлений), то есть лицами, принимающими решения. Здесь мы сталкиваемся с чисто психологической проблемой. Человек способен эффективно оценить (соразмерить) только ограниченное число целей и лучше всего, если на каждом шаге приходится сравнивать не более двух критериев. Такое сравнение в случае двух критериев удобно проводить, представляя результаты в виде таблицы (матрицы). Предварительно перейдем к дискретной шкале оценок по каждому критерию, а именно, будем оценивать состояние отрасли по каждому критерию по четырехбалльной шкале: «плохо», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично», или в числовых оценках – один, два, три, четыре. В таких же шкалах будем оценивать агрегированную и комплексную оценки. На рисунке 3 приведен пример *матрицы свертки* критерия «уровень жизни» с критерием «экологическая безопасность».

4	2	3	4	4
3	1	2	3	3
2	1	2	3	3
1	1	1	1	2
Б **Ж**	**1**	**2**	**3**	**4**

Рис. 3. Пример матрицы свертки

Как уже отмечалось, эта матрица отражает общественные приоритеты, так при критическом положении в области экологии и по уровню жизни приоритет отдается обоим критериям. При удовлетворительном положении в области экологической безопасности приоритет имеет показатель «уровень жизни», поскольку состояние с хорошей оценкой по безопасности и удовлетворительной по уровню жизни оценивается как удовлетворительное, а обратная картина (оценка «хорошо» по уровню жизни и «удовлетворительно» по безопасности) оценивается как оценка «хорошо». С ростом уровня жизни приоритет смещается в сторону показателя экологической безопасности, поскольку состояние «отлично» возможно только при оценке «отлично» по показателю безопасности (при этом, возможна оценка «хорошо» по уровню жизни). Имея оценку социального уровня, мы можем построить матрицу свертки для комплексной оценки социально-экономического уровня. Пример такой оценки приведен на рисунке 4.

4	2	3	4	4
3	2	2	3	3
2	1	2	3	3
1	1	1	2	2
С Э	**1**	**2**	**3**	**4**

Рис. 4. Пример матрицы свертки

Здесь также можно заметить изменение системы приоритетов. При кризисном положении в экономике и обществе приоритет имеют оба показателя – и социальный уровень, и уровень экономической эффективности. При удовлетворительном или хорошем значении этих показателей приоритет смещается в сторону экономической эффективности. Наконец, при высоких оценках (хорошо или отлично) приоритет снова имеет показатель социального уровня. Граничные состояния, отделяющие плохие состояния от удовлетворительных, удовлетворительные от хороших и хорошие от отличных, можно также определять по разному. Более того, эти границы могут и должны меняться со временем. Так, состояние «плохо» соответствует сегодняшнему состоянию и по экономической эффективности в регионе, и по уровню жизни ее работников, и по уровню экологической безопасности. Состояние «удовлетворительно» может соответствовать средним значениям соответствующих показателей по другим регионам. Состояние «хорошо» – лучшим значениям показателей по регионам, а «отлично» – средним значениям по другим странам в соответствующих направлениях. При росте эффективности экономики и уровня жизни цели могут измениться. Так, состояние «отлично» может соответствовать лучшим значениям показателей в мире. Обе матрицы, объединенные в графическую схему формирования комплексной оценки социально-экономического уровня, приведены на рисунке 5.

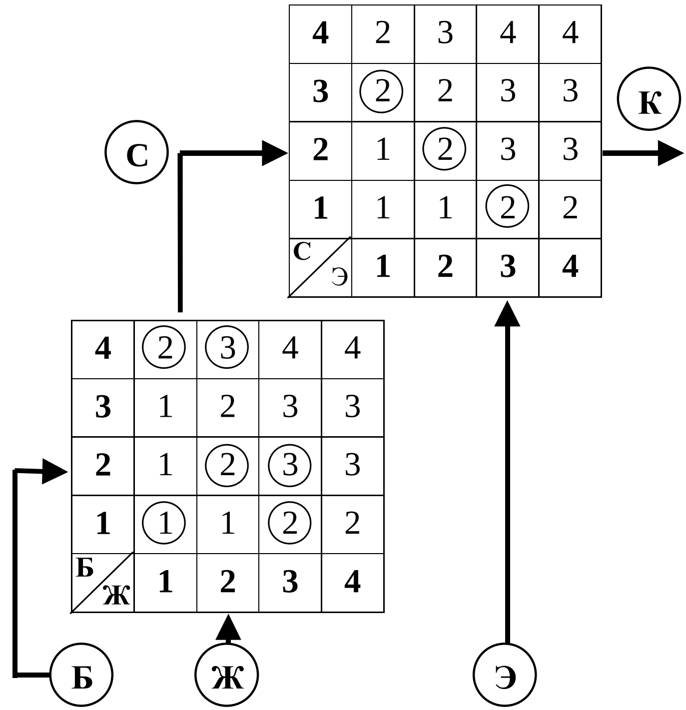

Рис. 5. Схема формирования комплексной оценки

Имея дерево свертки критериев, можно оценивать любой вариант программы развития региона и на основе этого выбирать оптимальный вариант. Рассмотрим задачу выбора программы развития, обеспечивающей переход от состояния «плохо» к состоянию «удовлетворительно». Для этого определим понятия напряженных вариантов программы. Каждый вариант будем описывать вектором

$x = \{x_Ж, x_Б, x_Э\}$, компоненты которого определяют оценки по соответствующим критериям.

Вариант x называется *напряженным*, если не существует другого варианта y, имеющего то же значение комплексной оценки, у которого оценки по всем критериям не выше, чем у варианта x.

Так, вариант $x = (2, 2, 4)$, имеющий комплексную оценку $K = 3$, не является напряженным, так как имеется вариант $y = (2, 2, 3)$, имеющий такое же значение комплексной оценки и в то же время его оценки по критериям не превышают оценок варианта x. Для варианта $y = (2, 2, 3)$ таких вариантов не существует. Поэтому он является напряженным. Значение напряженных вариантов в том, что варианты программы развития, обеспечивающие получение требуемого значения комплексной оценки с минимальными затратами должны быть напряженными. Фактически, напряженные варианты это Парето-оптимальные варианты в пространстве критериев. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением только напряженных вариантов. Опишем алгоритм построения всех напряженных вариантов.

Пусть поставлена задача перехода из состояния $x_0 = (1, 1, 1)$ с комплексной оценкой «плохо» в состояние с комплексной оценкой «удовлетворительно». Рассматриваем матрицу сверток показателей социального уровня и уровня экономической эффективности. Отмечаем все элементы матрицы, имеющие оценку 2 (удовлетворительно – см. рисунок 5) и являющиеся напряженными. Это элементы, имеющие оценку 1 и слева и снизу от них. Имеем три таких элемента: (1; 3), (2; 2) и (3; 1). Для получения каждого из указанных состояний необходимо достичь соответствующих значений по показателям социального уровня (С) и экономической эффективности (Э). Так состояние (1; 3) достигается при достижении оценки 1 по показателю «С» и оценки 3 по показателю «Э». На рисунке 5 отмечены значения показателей «С» и «Э», которые должны быть достигнуты для получения каждого из трех указанных выше состояний.

Показатели экономической эффективности являются исходными показателями. Показатель социального уровня является агрегированным показателем. Поэтому на основе матрицы свертки показателей «Ж» и «Б» необходимо указать все напряженные варианты, которые дают соответствующие оценки по показателю «С». Так, например, оценка «удовлетворительно» (2) по показателю «С» может быть получена тремя способами: (1; 4), (2; 2) и

(3, 1), оценка 3 – двумя способами: (2; 4) и (3; 2), оценка 1 всего одним способом – (1; 1). Это соответствует сохранению существующего положения в области уровня жизни и экологической безопасности. Полученный граф называется *сетью напряженных вариантов*. Он приведен на рисунке 6.

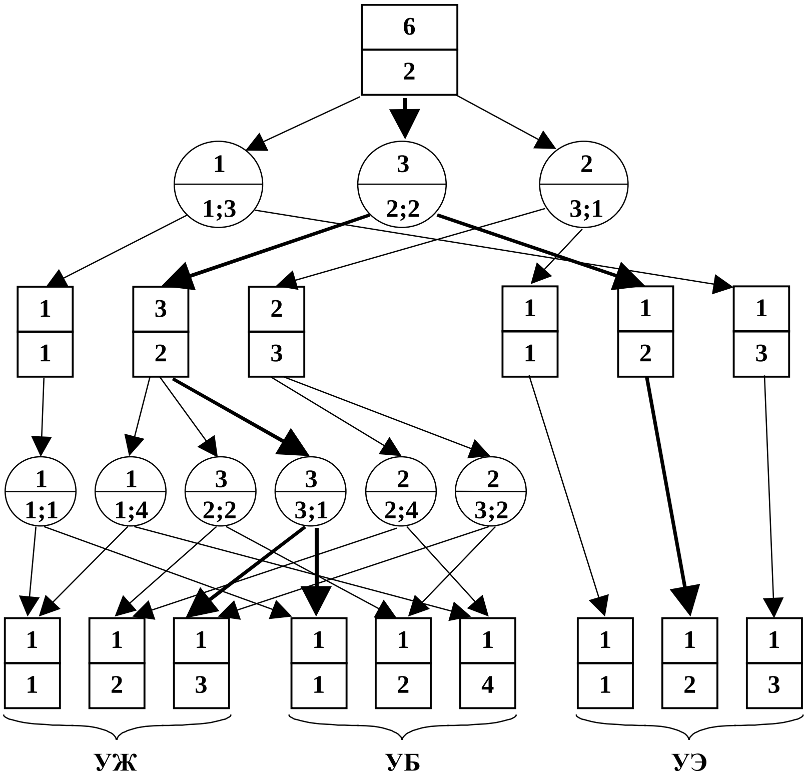

Рис. 6. Сеть напряженных вариантов

Как следует из алгоритма его построения, он содержит все напряженные варианты, имеющие комплексную оценку «удовлетворительно».

Для получения какого-либо напряженного варианта поступаем следующим образом. Рассматриваем начальную вершину (вход) сети. Из нее исходят три дуги. Берем любую из них, например, дугу, ведущую в вершину (2; 2). Из вершины (2; 2) исходят две дуги. Отмечаем обе эти дуги. Дуга, ведущая в вершину 2 по показателю «Э» указывает, что по этому показателю требуется достичь состояния «удовлетворительно». Дуга, ведущая в вершину 2 по показателю «С» указывает, что по этому показателю также требуется достичь состояния «удовлетворительно». Из трех вариантов достижения оценки 2 по показателю «С» выбираем любой (например, вариант (3; 1), что соответствует оценке «хорошо» по показателю «Ж» и оценке «плохо» по показателю «Б». Полученному напряженному варианту соответствует подграф сети, выделенный на рисунке 6 толстыми дугами. Он определяет напряженный вариант (3; 1; 2). Имея сеть напряженных вариантов, нетрудно определить число напряженных вариантов, обеспечивающих получение требуемой оценки. Для этого применяем следующий алгоритм индексации (пометки) вершин сети:

Первый шаг. Помечаем конечные вершины сети индексами 1 (индексы указаны в верхней половине вершины).

Второй шаг. Двигаясь снизу вверх последовательно помечаем все вершины. Индекс вершины-кружка на рисунке 6 равен произведению индексов смежных с ней двух вершин нижнего уровня. Индекс вершины-квадрата на рисунке 6 равен сумме индексов смежных с ней вершин нижнего уровня. Индекс начальной вершины-квадрата определяет число напряженных вариантов.

Обоснование алгоритма непосредственно следует из описанного способа определения индексов. Индексы вершин указаны на рисунке 6 в верхней части вершин. Число напряженных вариантов равно шести.

Построив сеть напряженных вариантов, можно решать различные задачи формирования программы развития с учетом факторов стоимости и риска. Рассмотрим сначала задачу выбора варианта программы, обеспечивающего достижение поставленной цели с минимальными затратами. Пусть для каждого критерия i определены затраты s_{ij}, необходимые для обеспечения уровня j, то есть разработана подпрограмма (система мероприятий), выполнение которой обеспечивает рост критерия до уровня j. Примем, что подпрограммы по различным критериям независимы, то есть мероприятия i-ой подпрограммы не влияют на другие направления (цели). В этом случае существует эффективный алгоритм определения программы минимальной стоимости. В его основе также лежит метод индексации вершин сети напряженных вариантов снизу вверх.

Первый шаг. Помечаем нижние вершины сети индексами s_{ij}.

Общий шаг. Вершины следующего (более высокого) уровня сети напряженных вариантов помечаются только после того, как помечены все смежные вершины нижележащего уровня. При этом индекс вершины-квадрата (в таких вершинах записывается одно число – оценка соответствующего агрегированного критерия) равен минимальному из индексов смежных вершин-кружков нижележащего уровня, а индекс вершины-кружка (в кружке записаны два числа – это пара оценок критериев нижнего уровня, агрегирование которых дает соответствующую оценку критерия верхнего уровня) равен сумме индексов смежных вершин-квадратов нижележащего уровня.

При описанной процедуре индекс начальной вершины-квадрата равен минимальным затратам на реализацию соответствующей программы. Оптимальный вариант находится «обратным ходом» – сверху вниз. Сначала находим вершину-кружок, смежную с начальной вершиной сети и имеющую минимальный индекс среди всех вершин, смежных с начальной. Из этой вершины-кружка исходят две дуги к вершинам-квадратам нижележащего уровня. Для каждой вершины-квадрата находим вершину-кружок, имеющую минимальный индекс среди всех вершин, смежных с соответствующей вершиной-квадратом и т.д. В результате будет выделен подграф, определяющий оптимальный вариант программы.

Рассмотрим работу алгоритма на примере сети напряженных вариантов рисунка 6. Пусть матрица затрат (s_{ij}) имеет вид, приведенный в таблице 1.

Таблица 1

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**
Ж	2	7	20	60
Б	3	10	35	50
Э	1	8	50	100

Индексы вершин сети, полученные на основе описанного алгоритма, указаны на рисунке 6 в верхней половине соответствующих вершин. Оптимальный вариант выделен толстыми линиями. Это вариант (2; 2; 2) с затратами $s^0 = 25$, соответствующий сбалансированному развитию по всем направлениям.

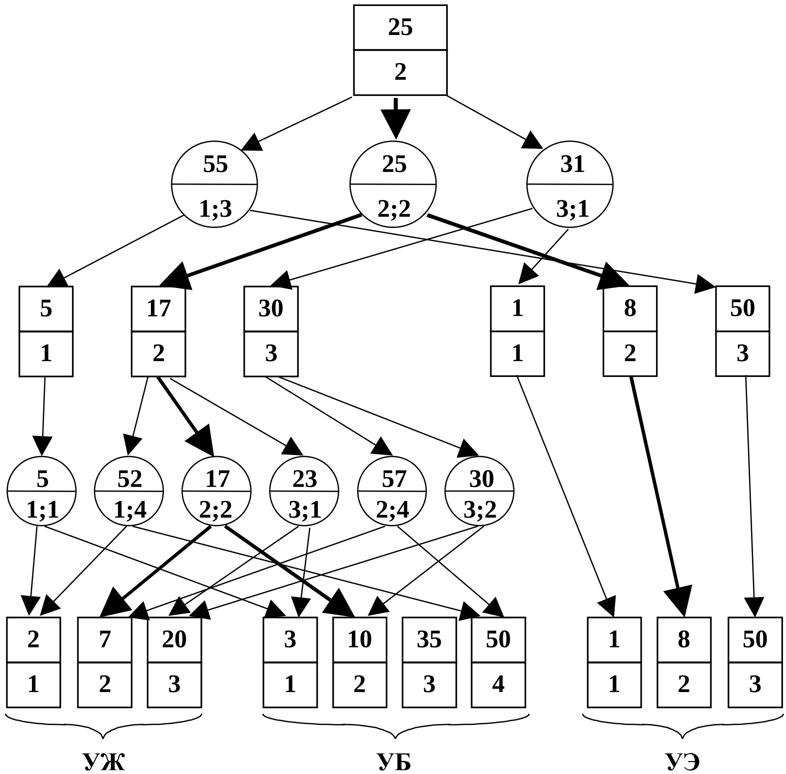

Рис. 7. Поиск оптимального варианта

В заключение настоящего раздела рассмотрим ***процедуры нечеткого комплексного оценивания*** на следующем условном примере. Предположим, что требуется оценить уровень социально-экономического развития некоторого региона (критерий *X* – см. рисунок 8), который определяется уровнем экономического развития (критерий *X1*) и уровнем социального развития (критерий *X2*).

Уровень экономического развития в свою очередь определяется уровнем инвестиций (критерий $X11$) и средней заработной платой (критерий $X12$), а уровень социального развития – уровнем цен (критерий $X21$) и экологической обстановкой (критерий $X22$).

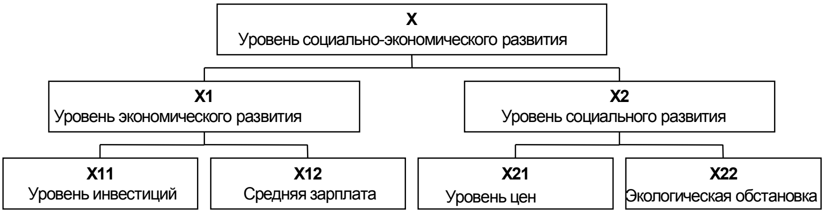

Рис. 8. Дерево критериев

Пусть значения оценок по каждому критерию могут принимать конечное число значений (для простоты будем использовать четырехбальную шкалу: 1 – «плохо», 2 – «удовлетворительно», 3 – «хорошо» и 4 – «отлично»). Требуется, имея оценки по критериям $X11, X12, X21, X22$ нижнего уровня, получить оценку агрегированную оценку по критерию X. В случае бинарного дерева для свертки критериев используют логические матрицы (матрицы свертки), значения элементов которых определяют агрегированную оценку при условии, что оценки по агрегируемым критериям являются номерами соответствующих строк и столбцов.

X2					X
1	1	2	2	3	
2	1	2	3	3	
3	2	2	3	4	
4	2	3	3	4	
	1	**2**	**3**	**4**	X1

X12					X1
1	1	1	2	2	
2	1	2	3	3	
3	2	3	3	4	
4	2	3	4	4	
	1	**2**	**3**	**4**	X11

X22					X2
1	1	1	3	3	
2	1	2	3	3	
3	1	2	3	4	
4	2	2	3	4	
	1	**2**	**3**	**4**	X21

Рис. 9. Матрицы свертки

Если использовать в рассматриваемом примере матрицы свертки, приведенные на рисунке 9, то при $X11 = 4$, $X12 = 3$, $X21 = 2$, $X22 = 3$ получим, что $X1 = 4$, $X2 = 2$, а $X = 3$ (см. таблицу 2).

Таблица 2

Агрегирование четких оценок

Критерии	***Четкие значения***
X	3
X1	4
X2	2
X11	4
X12	3
X21	2
X22	3

Обобщением описанной выше системы комплексного оценивания является система нечеткого комплексного оценивания, в которой оценки по каждому из критериев являются в общем случае нечеткими и агрегируются в соответствии с матрицами свертки. Нечетким оценкам могут соответствовать вектора степеней уверенности экспертов в достижении четких оценок. Получаемая в результате агрегирования оценка также является нечеткой и несет в себе больше информации.

Пусть $\tilde{x}_1$ – нечеткая оценка по первому критерию, задаваемая функцией принадлежности $m_{\tilde{x}_1}(x_1)$ на универсальном множестве, определяемом соответствующей шкалой (в рассматриваемом примере это множество – {1, 2, 3, 4}), $\tilde{x}_2$ – нечеткая оценка по второму критерию, задаваемая функцией принадлежности $m_{\tilde{x}_2}(x_2)$.

В соответствии с принципом обобщения полученная в результате агрегирования по процедуре $f(\cdot,\cdot)$, задаваемой матрицей свертки, нечеткая оценка $\tilde{x}$ будет определяться функцией принадлежности

$$(1)\quad \mu_{\tilde{x}}(x) = \sup_{\{(x_1,x_2)\,|\,f(x_1,x_2)=x\}} \min\{\, m_{\tilde{x}_1}(x_1),\ m_{\tilde{x}_2}(x_2)\,\}.$$

В предельном случае, то есть когда агрегируются четкие оценки, естественно, агрегированная оценка является четкой и совпадает с получающейся в результате использования четкой процедуры комплексного оценивания с логическими матрицами.

Пусть для рассматриваемого примера нечеткие оценки по критериям нижнего уровня принимают значения, приведенные в таблице 3. Используя матрицы свертки, приведенные на рисунке 9, и выражение (1), получаем нечеткие оценки по агрегированным критериям (см. таблицу 3).

Таблица 3

Агрегирование нечетких оценок

	Нечеткие значения			
Критерии	*1*	*2*	*3*	*4*
X	0,00	0,20	0,70	0,30
X1	0,00	0,10	0,40	0,70
X2	0,20	0,90	0,30	0,10
X11	0,00	0,20	0,40	0,70
X12	0,00	0,10	1,00	0,40
X21	0,20	0,90	0,30	0,10
X22	0,00	0,30	0,95	0,40

Нечеткие оценки по критериям *X, X1* и *X2* для рассматриваемого примера приведены на рисунке 10.

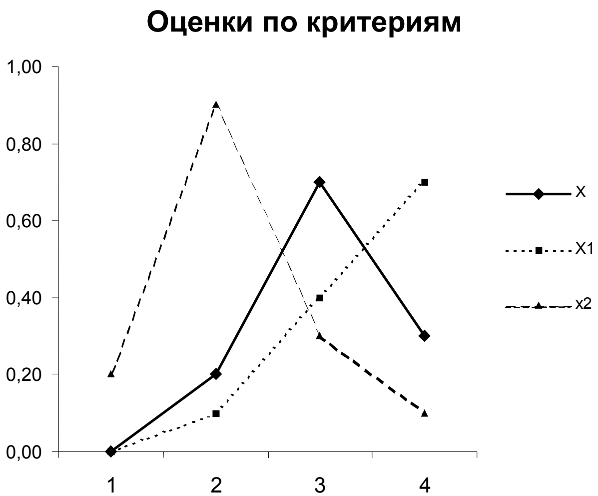

Рис. 10. Нечеткие оценки по критериям X, X1 и X2

Отметим простоту реализации методов агрегирования (все приводимые в настоящем разделе рисунки и таблицы импортированы из реализованной в Excel системы нечеткого комплексного оценивания).

По аналогии с напряженными вариантами в системах четкого комплексного оценивания, можно рассматривать нечеткие напряженные варианты. Пусть задан нечеткий вектор оценок агрегированного критерия (в рассматриваемом примере – это вектор $X = (0; 0{,}2; 0{,}7; 0{,}3)$). Напряженными назовем минимальные вектора агрегируемых оценок, приводящие к заданному нечеткому вектору агрегированных оценок. Легко убедиться, что в рассматриваемом примере – это вектора $X1 = (0; 0; 0{,}2; 0{,}7)$ и $X_2 = (0{,}2; 0{,}7; 0{,}3; 0)$. Напряженному варианту будет соответствовать следующий набор значений оценок нижнего уровня: $X11 = (0; 0; 0{,}2; 0{,}7)$, $X12 = (0; 0; 0{,}7; 0)$, $X21 = (0{,}2; 0{,}7; 0{,}3; 0)$, $X22 = (0; 0; 0{,}7; 0)$. Разности между приведенными в таблице 3 значениями оценок и напряженными можно считать резервами по соответствующим критериям, что позволяет ставить и решать задачи оптимизации резервов, затрат и риска.

Таким образом, процедуры комплексного оценивания являются гибким и эффективным инструментом обработки информации, используемой при принятии управленческих решений.

2. МЕХАНИЗМЫ СОГЛАСИЯ

Рассмотрим механизм экспертного оценивания, в котором результатом коллективного решения является распределение финансирования между агентами. Решение принимается коллегиально *экспертным советом*, члены которого – представители агентов – выступают в качестве экспертов для оценки обоснования объемов финансирования (в качестве экспертов могут привлекаться и независимые эксперты, а не только представители агентов).

Очевидно, что каждый эксперт имеет собственное представление о распределении имеющегося (ограниченного) объема финансирования, и мнения различных экспертов редко совпадают. Как принимать решение в этом случае? Как уйти от ситуации, когда каждый эксперт «тянет одеяло на себя» и может искажать информацию?

Механизм принятия согласованных решений при наличии несовпадающих точек зрения получил название *механизма согласия*.

Недостатки используемых на практике механизмов финансирования, основывающихся на экспертных оценках, очевидны. Как правило, сумма заявок превышает имеющийся ресурс и на центр ложится тяжесть «урезания» объемов финансирования. Тенденция завышения заявок имеет место и в случае независимых экспертов. Как преодолеть эти негативные явления?

Опишем механизм согласия. Основная идея заключается в декомпозиции процедуры экспертизы, то есть создаются экспертные советы по смежным проблемам, одна из которых является базовой. Рассмотрим пример, в котором имеются три критерия – «уровень жизни» ($К_1$), «экологическая ситуация» ($К_2$), «социальное развитие» ($К_3$). Выберем в качестве базового, например, уровень социального развития. В этом случае создаются два экспертных совета – каждый для пары критериев. Первый экспертный совет занимается оценкой направлений (критериев) $К_1$ и $К_3$, а второй – $К_2$ и $К_3$. Каждый экспертный совет вырабатывает решение об относительных размерах финансирования каждого из направлений. А именно, во сколько раз финансирование по направлению $К_1$ (соответственно, $К_2$) должно быть больше (или меньше), чем финансирование по базовому направлению $К_3$. Обозначим соответствующие оценки s_1 и s_2. Величина s_1 (s_2) свидетельствует о том, что финансирование x_1 (x_2) по направлению $К_1$ ($К_2$) должно быть в s_1 (s_2) раз больше, чем финансирование по направлению $К_3$, то есть $s_1 = x_1 / x_3$ ($s_2 = x_2 / x_3$). Очевидно, что $s_i \geq 0, i = \overline{1,2}$. На основе этой информации определяется вариант финансирования направлений:

(1) $x_i = \dfrac{s_i}{1 + s}, i = \overline{1,3}$,

где $s = s_1 + s_2$, s_3 º 1. Отметим, что x_i – доля от имеющегося общего объема финансирования. То есть, если между направлениями $К_1$, $К_2$ и $К_3$ необходимо распределить R единиц ресурса, то i-ое направление получит $x_i R$.

Предложенный механизм обладает рядом достоинств. Во-первых, учитывается мнение самих агентов, входящих в экспертные советы. Во-вторых, выделение базового направления позволяет произвести обмен результатами и опытом между агентами и экспертами. И, наконец, в-третьих, что наиболее важно, предложенный механизм согласия защищен от манипулирования. Проиллюстрируем последнее утверждение на следующем примере.

В таблице 4 приведены истинные относительные объемы финансирования направлений $К_1$ и $К_2$ относительно базового направления $К_3$.

Таблица 4

Экспертные Советы	**Направления**		
	$К_1$	**$К_2$**	**$К_3$**
1	$r_{11} = 3$	$r_{12} = 1$	1
2	$r_{21} = 3$	$r_{22} = 4$	1

Для полноты картины мы привели мнения экспертов и по тем вопросам, которые они не оценивают (информация о r_{12} и r_{21}). Видно, что эксперты считают собственные направления гораздо более важными и заслуживающими большего финансирования, чем базовое направление ($r_{11} = 3 > 1, r_{21} = 4 > 1$).

Пусть общий объем финансирования равен 100 единицам. Если экспертные советы представят достоверную информацию, то финансирование будет распределено следующим образом:

$$x_1(r_{11}, r_{22}) = \frac{3}{8} \cdot 100 = 37{,}5;\; x_2(r_{11}, r_{22}) = \frac{4}{8} \cdot 100 = 50;$$

$$x_3(r_{11}, r_{22}) = \frac{1}{8} \cdot 100 = 12{,}5.$$

Отметим, что балансовое ограничение выполняется «автоматически» при любых сообщениях ($x_1 + x_2 + x_3 = R$).

С точки зрения первого экспертного совета распределение объемов финансирования должно быть следующим:

$$x_1(r_{11}, r_{12}) = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60;\; x_2(r_{11}, r_{12}) = \frac{1}{5} \cdot 100 = 20;$$

$$x_3(r_{11}, r_{12}) = \frac{1}{5} \cdot 100 = 20.$$

С точки зрения второго экспертного совета распределение объемов должно быть таким:

$$x_1(r_{21}, r_{22}) = \frac{3}{8} \cdot 100 = 37{,}5;\; x_2(r_{21}, r_{22}) = \frac{4}{8} \cdot 100 = 50;$$

$$x_3(r_{21}, r_{22}) = \frac{1}{8} \cdot 100 = 12{,}5.$$

То есть финансирование, принятое при сообщении достоверной информации, полностью совпадает с мнением второго экспертного совета (в данном примере). Первый же совет считает, что направление $К_1$ должно получить больше, $К_2$ – намного меньше, а $К_3$ – чуть больше.

Очевидно, что первый экспертный совет хотел бы увеличить объем финансирования по первому и третьему проектам за счет второго. Посмотрим, может ли он, манипулируя, то есть, сообщая $s_1\ ^1\ r_1$, добиться этого.

Пусть, например, первый экспертный совет сообщил завышенную оценку $s_1 = 5$. Тогда финансирование распределится следующим образом:

$$x_1(s_1, r_{22}) = \frac{5}{10} \cdot 100 = 50;\; x_2(s_1, r_{22}) = \frac{4}{10} \cdot 100 = 40;$$

$$x_3(s_1, r_{22}) = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10.$$

Вряд ли такое распределение финансирования удовлетворит представителей третьего направления. Да и первый экспертный совет вряд ли останется доволен, ведь он хотел увеличить и свое финансирование, и финансирование третьего направления (необходимо подчеркнуть, что «забота» о базовом направлении как раз и определяет неманипулируемость механизма).

Рассмотрим другой вариант манипулирования. Пусть первый экспертный совет занижает оценку и сообщает $\sigma_1 = 1$. Тогда:

$$x_1(s_1, r_{22}) = \frac{1}{6} \cdot 100 = 16,(6);\;\; x_2(s_1, r_{22}) = \frac{4}{6} \cdot 100 = 66,(6);$$

$$x_3(s_1, r_{22}) = \frac{1}{6} \cdot 100 = 16,(6).$$

При этом первый экспертный совет увеличил финансирование третьего направления, но зато увеличил финансирование второго и, что самое главное, уменьшил свое финансирование.

Мы рассмотрели случай, когда $s_1 = 1$ и $s_1 = 5$. Можно показать, что, сообщая $s_1\ ^1\ r_1$, первый экспертный совет не может одновременно увеличить финансирование первого и третьего направлений за счет второго.

Теперь определим целевую функцию i-го экспертного совета:

$$(2)\quad f_i(r_i,\, x_i,\, x_j) = \min_j \left\{ \frac{x_j}{r_{ij}} \right\},\ j = \overline{1,3};\ i = 1,2\ .$$

Если каждый экспертный совет заинтересован в максимизации своей целевой функции, то, например, для первого экспертного совета в рассматриваемом примере $f_1 = \min \{x_1/r_{11};\ x_2/r_{12};\ x_3/r_{13})$ достигает максимума именно при сообщении $s_1\ ^{o}\ r_1$.

Структура целевой функции (2) такова, что каждый экспертный совет стремится минимизировать наибольшее из отклонений реального и «справедливого» с его точки зрения объема финансирования. Можно показать, что сообщение достоверной информации максимизирует целевые функции типа (2) (является доминантной стратегией) в случае произвольного числа экспертов при достаточно общих предположениях.

Одно из предположений (*гипотеза достаточной заинтересованности* (ДЗ)), в частности, заключается в том, что оценка каждого экспертного совета по своему направлению превышает истинные оценки этого направления другими экспертами. Иначе говоря, каждый из экспертов считает свое направление наиболее важным. В рассмотренном выше примере эта гипотеза была выполнена ($r_{11} = 3 > r_{12} = 1;\ r_{22} = 4 > r_{21} = 3$). Таким образом, если эксперты имеют целевые функции типа (2), то механизм согласия является неманипулируемым. Если направлений всего три, то всегда можно выбрать базовое так, что гипотеза ДЗ выполнена.

В случае, когда экспертных советов (направлений) больше чем три, целесообразно структурировать экспертные советы в иерархию по «тройкам». Как разбить экспертные советы на «тройки», чтобы в них попали эксперты, заинтересованные друг в друге (а целевая функция вида (2) подразумевает такую заинтересованность) – в этом заключается искусство центра.

3. МНОГОКАНАЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

В последнее время широкое распространение получили механизмы *поддержки принятия решений* (ППР), отличительной особенностью которых является формирование решений (рекомендаций) в нескольких параллельных блоках (каналах) формирования решений «советниками» – экспертами. Такие механизмы получили название *многоканальных*. Причиной их достаточно высокой эффективности является взаимодействие каналов, то есть взаимодействие экспертов. Как побудить экспертов повышать эффективность предлагаемых решений, как на основании их советов выработать наилучшее управленческое решение? Одним из способов является применение систем сравнительных оценок эффективностей решений каналов и их стимулирование по результатам этого сравнения. В настоящем разделе рассматривается несколько моделей многоканальных механизмов на примере экспертизы.

Многоканальные механизмы, использующие модели управляемой системы. Если центр – организатор экспертизы, лицо, принимающее решения – хочет стимулировать экспертов на основании эффективности предлагаемых ими решений, то, естественно, ему необходимо знать, а что было бы, если бы было использовано управление (решение), предложенное каждым конкретным экспертом? Проводить эксперименты и смотреть, как ведет себя управляемая система при различных управлениях, в большинстве случаев не представляется возможным. Значит необходимо использовать модель управляемой системы. Рассмотрим следующий пример.

Пусть эффективность $Э$ принятого управленческого решения U зависят от параметров модели и окружающей среды q, не известных априори центру. Предположим, что $Э = U – U^2/2q$. Если центр использует решение U_0 и фактическая эффективность оказывается равной $Э_0$, то можно оценить реализовавшееся значение неизвестного параметра: $q = U_0^2 / 2\,(U_0 – Э_0)$. Пусть имеются n экспертов), тогда, подставляя эту оценку в исходное выражение для эффективности, получим формулу, определяющую, какова была бы эффективность i-го эксперта $Э_i$ если бы использовалось предложенное им управление U_i:

$$Э_i(U_i) = U_i - \frac{U_i^2}{U_0^2}\left(U_0 - Э_0\right),\ i = \overline{1,n}\ .$$

Как следует стимулировать экспертов? Наверное, на основании оценок $Э_i(U_i)$ (отметим, что если $U_i = U_0$, то $Э_i = Э_0$), то есть чем выше эффективность предложенного решения, тем больше должно быть вознаграждение эксперта. Введем $Э_m = \max\limits_{i=\overline{1,n}} Э_i$ – *нормативную эффективность*, равную максимальной эффективности. В простейшем случае стимулирование центра зависит от эффективности $Э_0$ принятого им решения U_0 и нормативной эффективности:

$$f_0 = Э_0 \ - \begin{cases} a\,(Э_0 - Э_m), \text{ если } Э_0 \geq Э_m \\ b\,(Э_m - Э_0), \text{ если } Э_0 \leq Э_m \end{cases},\ 0 < a < 1,\ b > 0.$$

То есть, если решение центра оказалось лучше наиболее эффективного решения, предложенного экспертами ($Э_0$ ³ $Э_m$), то центр поощряется пропорционально величине ($Э_0 - Э_m$). Если эффективность $Э_0$ оказалась ниже эффективности решений, предложенных экспертами, то поощрение пропорционально ($Э_m - Э_0$).

Стимулирование самих экспертов производится аналогичным образом на основе сравнения $Э_i$ и $Э_0$ или $Э_i$ и $Э_m$:

$$f_i = Э_i - \begin{cases} a\,(Э_i - Э_0), \text{ если } Э_i \geq Э_0 \\ b\,(Э_0 - Э_i), \text{ если } Э_i \leq Э_0 \end{cases},\ 0 < a < 1,\ b > 0.$$

Какими следует выбирать коэффициенты a и b в функциях стимулирования? Приведем следующие рассуждения. Не исключена ситуация, в которой центр, имея возможность влиять на фактическую эффективность $Э_0$ принятого им решения U_0, сознательно уменьшит эту эффективность для того, чтобы изменить соответственно оценки эффективностей каналов (экспертов). Когда может возникнуть такая ситуация? В большинстве моделей управляемых систем существует монотонная зависимость между эффективностью $Э_0$ и эффективностью каналов. В рассматриваемом примере (см. формулу выше) чем больше $Э_0$, тем больше $Э_i$. Если эффективность решения центра $Э_0$ выше нормативной ($Э_0$ ³ $Э_m$), то целевая функция центра $f_0 = (1 - a)Э_0 + a\,Э_m$ является возрастающей функцией $Э_0$ и, следовательно, центр не заинтересован в занижении $Э_0$. Проблемы появляются, если $Э_0 < Э_м$, то есть, если решение центра менее эффективно, чем решения экспертов. В этом случае: $f_0 = (1+b)Э_0 - b\,Э_m$, и центр может быть заинтересован в снижении эффективности каналов $Э_i$, а соответственно, и в снижении $Э_m$.

В рассматриваемом примере, в этом случае, целевая функция центра имеет вид

$$f_0 = bU_m\left(\frac{U_m}{U_0} - 1\right) + Э_0\left(1 + b - b\frac{U_m^2}{U_0^2}\right).$$

Если $U_м > U_0$ ($Э_0 < Э_m$), и b достаточно велико, то центр заинтересован в снижении фактической эффективности $Э_0$. Для того, чтобы исключить такую заинтересованность, b не следует брать слишком большим, а именно $b < \dfrac{U_0^2}{(U_m^2 - U_0^2)}$.

Большие штрафы (большая величина b) в случае, если решение центра хуже нормативного, нежелательны также, с той точки зрения, что центр, не желая «ошибиться», может просто предпочесть выбрать одно из решений, предложенных экспертами. Понятно, что это приведет к нежелательной потере самостоятельности и инициативности центра.

<u>Автономные механизмы экспертизы.</u> Выше стимулирование экспертов осуществлялось на основе сравнения эффективностей предлагаемых решений, оцениваемых с помощью модели управляемой системы. Однако иногда управляемая система настолько сложна, что построить ее адекватную модель достаточно трудно. Как поступить в этой ситуации центру? Одним из способов является «переложить всю тяжесть» по решению задачи управления на экспертов, получить от них одно согласованное решение, а не несколько, и использовать именно его. Рассмотрим, в каких условиях можно побудить экспертов работать автономно, согласовывать решения и предлагать центру наилучшее решение.

Пусть от экспертов требуется предложить решение, как поступить в некоторой конкретной ситуации. В силу различного образования, опыта и т.д. одни эксперты могут оказаться более квалифицированными в одной области, другие – в другой, в зависимости от ситуации, для которой необходимо предлагать решение (то есть в зависимости от области возможных ситуаций). На рисунке 11 качественно изображена зависимость эффективности решений $Э_i(x)$, которые может предложить i-ый эксперт, $i = \overline{1, n}$, от ситуации x.

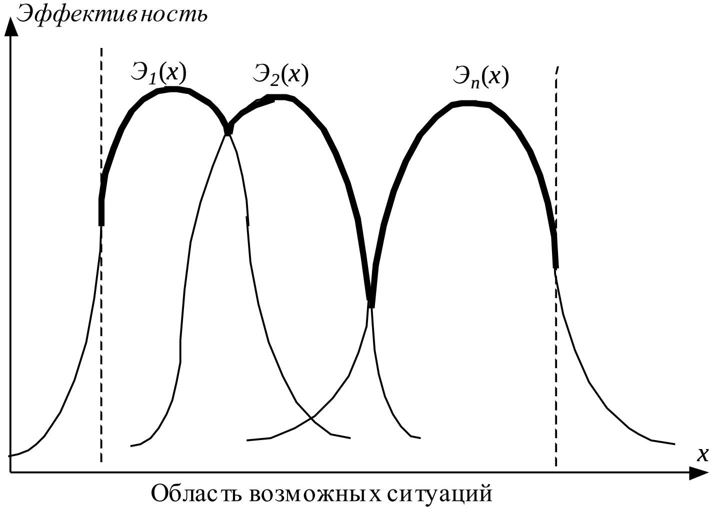

Рис. 11. Эффективности решений

Центр хотел бы, чтобы в любой ситуации предлагаемое экспертами решение было наиболее эффективным, то есть желательно, чтобы эффективность коллектива экспертов имела вид:

$$Э(x) = \max_{i=\overline{1,n}} \{Э_i(x)\}$$

(графиком является огибающая кривых на рисунке 11). Предположим, что каждый из экспертов знает собственную эффективность $Э_i(x)$ и не знает эффективностей остальных экспертов (следовательно, каждый может искажать информацию), но все эксперты точно идентифицируют ситуацию x. Как центр может побудить экспертов предпочесть в любой ситуации наиболее эффективное решение?

Рассмотрим следующий механизм. Центр предлагает экспертам – «пусть каждый из вас сообщает (остальным экспертам) пару $(U_i(x), Э_i(x))$, где U_i – предлагаемое управление в ситуации x, $Э_i(x)$ –

эффективность этого решения (i-ый эксперт точно знает истинную эффективность того или иного решения, которое он предлагает в каждой ситуации). После этого вы сообщаете мне решение, имеющее в сложившейся ситуации наибольшую эффективность, а я стимулирую вас пропорционально эффективности этого предложенного решения».

Предложенный механизм действительно прост – эксперты сами между собой решают, какое решение предложить центру, то есть работают автономно. Возникает закономерный вопрос – а будут ли эксперты сообщать правду? Покажем, что сообщение достоверной информации в этом механизме является равновесием Нэша.

Если все эксперты сказали правду, то есть сообщили ($Э_1(x)$, ..., $Э_n(x)$), то центру предложат решение $Э(x) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{Э_i(x)\}$, и, если стимулирование экспертов пропорционально $Э(x)$, то целевая функция i-го эксперта имеет вид:

$$f_i(Э_1(x),...,Э_n(x)) = a_i - b_i \left| Э(x) - \tilde{Э}(x) \right|, \; 0 < \sum_{i=1}^{n} b_i < 1,$$

где a_i – постоянная составляющая, а $\tilde{Э}(x)$ - истинное (реализовавшееся) значение эффективности.

Предположим теперь, что j-ый эксперт пытается исказить информацию, то есть сообщить $\tilde{Э}_j(x) \neq Э_j(x)$ (фактически он объявляет, что эффективность его решения в ситуации x равна $\tilde{Э}_j(x)$). Если $Э_j(x) = Э(x)$, то, так как j-ый эксперт знает, что истинная эффективность $\tilde{Э}(x) = Э_j(x)$, то сообщая $\tilde{Э}_j(x) > Э_j(x)$ или $\tilde{Э}_j(x) < Э_j(x)$, он уменьшает значение своей целевой функции. Если $Э_j(x) \neq Э(x)$, то есть другой эксперт с номером, например, k предложил решение с большей эффективностью $Э_k(x) = Э(x) > Э_j(x)$, то сообщая $\tilde{Э}_j(x) < Э_j(x)$, j-ый эксперт не изменит итогового решения (а следовательно, и значения своей целевой функции), а сообщая $\tilde{Э}_j(x) > Э_j(x)$, то есть добиваясь того, что $Э(x) = \tilde{Э}_j(x)$, он только уменьшит свой выигрыш, так как $\tilde{Э}(x) = Э_j(x) < \tilde{Э}_j(x)$. То есть, мы показали, что сообщение достоверной информации – равновесие Нэша.

Достоинством автономных механизмов экспертизы является, во-первых, «разгрузка» центра, который получает сразу оптимальное (с точки зрения экспертов) решение, и, во-вторых, его неманипулируемость. При использовании автономных механизмов центр должен быть уверен, что эксперты точно идентифицируют ситуацию и не ошибаются при прогнозе эффективности своего решения.

Многоканальная структура системы управления как способ снижения неопределенности. Предположим, что эффективность управления $Э(u)$ есть функция неизвестного центру параметра q: $Э(u) = u - u^2 / 2q$. Пусть центру известно, что параметр q принадлежит отрезку $[a; b]$, то есть, существует неопределенность, обусловленная незнанием истинного значения параметра. Какое управление следует выбрать центру? Возможны различные подходы к решению этой задачи.

Первый подход заключается в том, что центр может выбирать управление, рассчитывая на наихудшее для него значение q (использовать метод максимального гарантированного результата). Действительно, если $a > 0$, то в наихудшей ситуации $q = a$. Выбирая $u = a$, центр максимизирует эффективность в этой ситуации: $u = a$ и обеспечивает значение эффективности, равное $Э(a) = a / 2$. В ряде случаев такой подход может оказаться слишком пессимистичным.

Если известно распределение вероятностей реализации параметра q, то центр может выбором управления максимизировать ожидаемое значение эффективности. Так, например, если q равномерно распределен на $[a; b]$ (вероятности любых значений из этого отрезка одинаковы), то максимум ожидаемого значения целевой функции равен $\left[u - \frac{u^2}{2(b-a)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$.

Если распределение вероятностей неизвестно центру или метод максимального гарантированного результата дает слишком заниженное значение эффективности, можно использовать процедуры экспертного оценивания для получения дополнительной информации (снижения неопределенности) о параметре q. Если эксперты обладают большей информацией о параметре q, чем центр, то можно попросить их сообщать непосредственно оценки параметра q. Соответствующая модель активной экспертизы рассматривалась выше (в этом случае $d = a$, $D = b$ и возможно построение неманипулируемого механизма).

Альтернативой является использование многоканальных механизмов. Если центру известно, что зависимость эффективности управленческого решения, предлагаемого экспертами, имеет вид $Э_i(u_i) = u_i - (u_i^2 / 2\,q)$, и если центр уверен, что эксперт обладает более полной информацией о параметре q, то он может попросить экспертов сообщить не оценки неизвестного параметра, а то, какие управления выбрали бы они сами. Предположим, что центр получил от экспертов информацию об $\{Э_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Теперь он может поставить себя на место экспертов и решить, почему они выбрали те или иные значения u_i. Если эксперты выбором u_i стремятся максимизировать свою целевую функцию при имеющейся у них информации о параметре q (то есть $u_i = u_i(q)$), то, зная вид целевых функций экспертов, центр может на основании выбранных экспертами управлений u_i, «восстановить» информацию о q. Отметим, что если принятое центром решение затрагивает интересы экспертов, то необходимо учитывать дальновидность последних, которая может приводить к искажению информации.

Максимум целевой функции эксперта (при фиксированном q) достигается при $u = q$, точнее $u_i = q_i$, $i = \overline{1,n}$, так как каждый эксперт может иметь свое представление q_i о значении параметра q. Значит, зная $Э_i(q) = q / 2$, то есть, зная $u_i = q_i$, центр получает информацию о $(q_1, q_2, ..., q_n)$. Эта дополнительная информация может позволить снизить неопределенность и принять более эффективное решение.

Таким образом, используя многоканальный механизм, центр может провести «косвенную» экспертизу (оценить q не непосредственно, а на основании косвенной информации), предсказав поведение экспертов, и снизить неопределенность за счет использования этого механизма.

4. МЕХАНИЗМЫ «ЗАТРАТЫ-ЭФФЕКТ»

В управлении проектами, при реформировании и реструктуризации предприятий и т.д., возникает необходимость определения набора мероприятий (проектов), реализация которых позволит достичь максимального эффекта при существующих ограничениях. Рассмотрим *метод «затраты-эффект»* на следующем примере.

Пусть определена совокупность возможных мероприятий, данные о которых приведены в таблице 5.

Таблица 5

Данные о мероприятиях

Мероприятие №	Затраты S	Эффект Q	Эффективность $Э = Q/S$
1	40	80	2
2	100	300	3
3	50	50	1
4	60	240	4

Изменим номера мероприятий так, чтобы самое эффективное мероприятие получило номер 1, следующее за ним – номер 2 и т.д. При новой нумерации строим таблицу 6, в которой помимо затрат и эффекта по каждому мероприятию добавляются столбцы, в которых определяются затраты и эффект нарастающим итогом.

Таблица 6

Упорядочение мероприятий

Мероприятие №	Затраты S	Эффект Q	Затраты нарастающим итогом	Эффект нарастающим итогом
1	60	240	60	240
2	100	300	160	540
3	40	80	200	620
4	50	50	250	670

Таблица 6 затрат и эффекта нарастающим итогом, в которой мероприятия пронумерованы в порядке убывания эффективности и отражает зависимость «затраты-эффект». График этой зависимости

приведен на рисунке 12. Эта зависимость имеет замечательное свойство – она определяет максимальный эффект по данному критерию, который можно получить от заданного множества мероприятий при заданной величине финансирования. Фактический эффект может быть меньше за счет дискретности мероприятий. Действительно, если имеется 140 единиц финансовых ресурсов, то нельзя реализовать первые два мероприятия, требующие 160 единиц ресурса. Оптимальный вариант – реализовать второе и третье мероприятия, что дает суммарный эффект 380 единиц, что меньше, чем получается по зависимости рисунка 12 – эффект 480 единиц. Конечно, если бы каждое мероприятие можно было реализовать частично, с пропорциональным уменьшением и затрат, и эффекта, то зависимость рисунка 12 соответствовала бы реальному эффекту при любом уровне затрат (см. конкурсные механизмы в пятом разделе).

Для построения реальной зависимости «затраты-эффект» необходимо решить *задачу о ранце*, задавая различные уровни финансирования R:

$$240\,x_1 + 300\,x_2 + 80\,x_3 + 50\,x_4 \rightarrow \max$$

при ограничении $60\,x_1 + 100\,x_2 + 40\,x_3 + 50\,x_4 \le R.$

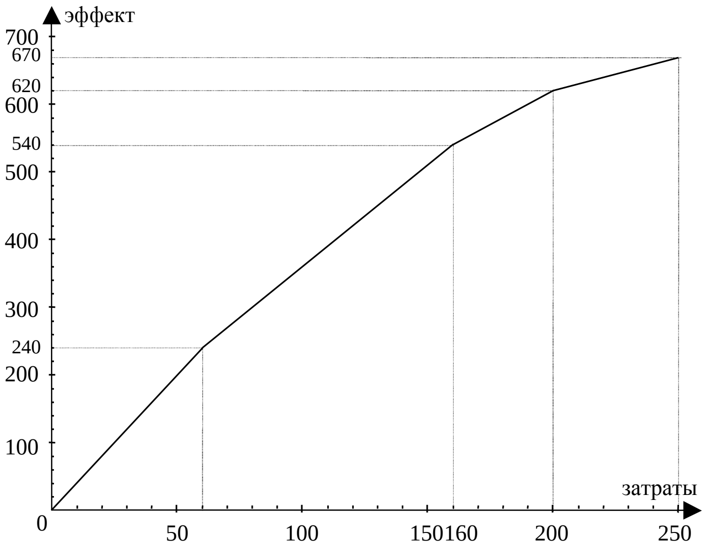

Рис. 12. Зависимость «затраты-эффект»

Для решения этой задачи при различных значениях R эффективным является *метод динамического программирования*. Для применения этого метода предварительно строим на плоскости систему координат, одна ось которой соответствует мероприятиям, а вторая – объему финансирования (см. рисунок 13). По оси мероприятий отмечаем номера мероприятий – 1, 2, 3, 4. Из начала координат проводим две дуги – одна горизонтальная, в точку (1,0), а другая – в точку (1,60), где 60 – объем финансирования первого мероприятия. Первая дуга соответствует случаю, когда первое мероприятие не финансируется, а вторая, – когда оно финансируется. Из каждой полученной точки ((1,0) и (1,60)) проводим также по две дуги, для второго мероприятия. Получаем уже четыре точки – (2,0), (2,60), (2,100) и (2,160), соответствующие четырем возможным вариантам для двух первых мероприятий (если бы оба мероприятия требовали одинакового финансирования, то мы получили бы три точки). Продолжая таким же образом, получаем сеть, приведенную на рисунке 13. Очевидно, что любой путь в сети из начальной вершины (0,0) в конечные вершины соответствует некоторому набору мероприятий. И, наоборот, любому набору мероприятий соответствует вполне определенный путь в сети, соединяющий начальную вершину с конечной.

Значение координаты по второй оси равно объему финансирования соответствующего набора мероприятий (или пакета проектов). Примем длины горизонтальных дуг равными нулю, а длины наклонных – эффектам от соответствующих мероприятий. В этом случае длина пути, соединяющего начальную вершину с одной из конечных, будет равна суммарному эффекту от соответствующего этому пути множества мероприятий. Следовательно, путь максимальной длины, соединяющий начало координат и точку (4, S) будет соответствовать множеству мероприятий, дающему максимальный эффект среди всех множеств мероприятий, требующих совокупного финансирования ровно S единиц. Таким образом, мы получаем оптимальные наборы мероприятий при любых объемах финансирования.

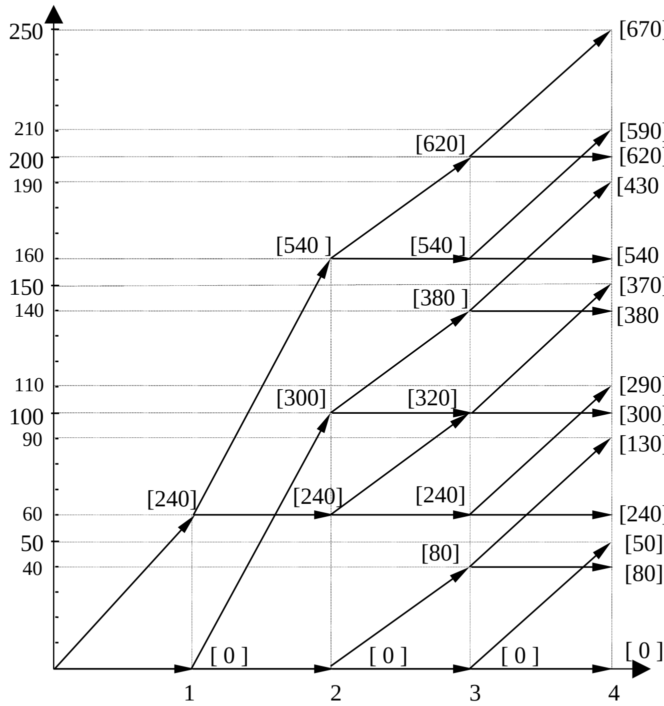

Рис. 13. Метод динамического программирования

Анализируя приведенные решения (см. рисунок 13), можно заметить любопытный парадокс. При финансировании, например, в объеме 100 единиц, мы получаем эффект в 300 единиц, а при увеличении объема финансирования на 10 единиц эффект составляет всего 290 единиц, то есть на 10 единиц меньше. Аналогичная картина наблюдается при сравнении эффектов при объемах финансирования 200 и 210 единиц, 140 и 150 и т.д. Парадокс в том, что, если задать вопрос, в каком случае будет больший эффект – при финансировании в 100 или в 110 единиц, то любой здравомыслящий человек скажет, что чем больше объем финансирования, тем больше должен быть эффект, естественно, при оптимальном наборе мероприятий. Этот парадокс возникает из-за дискретности задачи. Понятно, что варианты, нарушающие монотонность (парадоксальные варианты) мы не должны рассматривать. Полученные значения максимального эффекта при различных объемах финансирования выпишем в таблицу 7.

Таблица 7

Затраты – эффект

Объем финансирования	40	60	100	140	160	200	250
Эффект	80	240	300	380	540	620	670

График этой зависимости приведен на рисунке 14. На этом же рисунке тонкой линией показан прежний график «затраты-эффект» (см. рисунок 12).

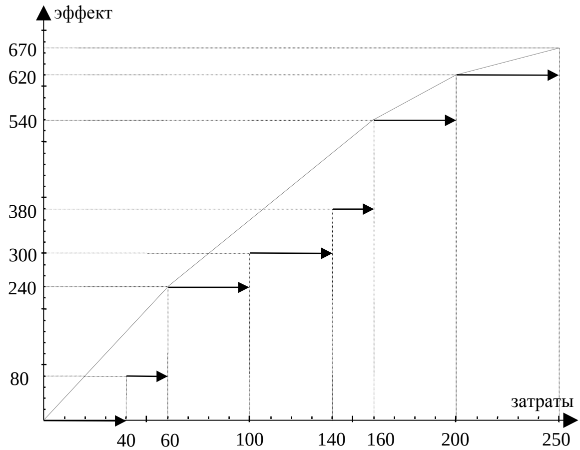

Рис. 14. Зависимость «затраты – эффект» с учетом дискретности задачи

Имея зависимость «затраты-эффект», можно решать и задачи привлечения дополнительных финансовых ресурсов, в частности, взятия кредита. Пусть, например, имеется 90 единиц ресурса, а кредит можно взять под 300%. Какой величины кредит взять, чтобы получить максимальный финансовых результат?

Из графика на рисунке 14 видно, что рассмотреть следует четыре варианта – взять кредит 10, 70, 110 или 160 единиц. При взятии кредита в размере 10 единиц дополнительный эффект составит 300 – 240 = 60 единиц, то есть эффективность равна 600%, что выше, чем ставка кредита. Это значит, что брать кредит целесообразно. Если взять кредит в размере 70 единиц, то дополнительный эффект составит 540 – 240 = 300 единиц, что дает эффективность 430%, что также больше ставки кредита. При кредите в 110 единиц дополнительный эффект составит 620 – 240 = 380 единиц, что дает эффективность 345%, то есть больше, чем ставка кредита. Наконец, при кредите в 160 единиц дополнительный эффект составит 670 – 240 = 430 единиц, что дает эффективность 281%, то есть ниже ставки кредита. Таким образом оптимальная величина кредита равна 70 единиц, что дает эффект 540 единиц и, за вычетом процентов за кредит 540 – 370 = 330 единиц.

Зависимость «затраты-эффект» характеризует потенциал рассматриваемого проекта (предприятия и т.д.) по соответствующему критерию. Зная эту зависимость, можно определить минимальный уровень финансирования, достаточный для достижения поставленных целей. И, наоборот, при ограниченных финансах определяется максимальный уровень, который можно достичь по данному критерию. Так, например, если поставлена цель обеспечить по данному критерию эффект в 600 единиц, то при заданном множестве мероприятий для этого потребуется не менее 200 единиц финансовых ресурсов (из графика видно, что эффект составит 620 единиц, но при уменьшении финансирования он сразу падает до 540, то есть поставленная цель не достигается). Если же имеется всего 150 единиц финансовых ресурсов, то максимальный уровень эффекта, который можно достичь, составит 380 единиц (причем достаточно для достижения цели всего 140 единиц ресурса).

5. КОНКУРСНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Общая идея любого конкурса заключается в следующем – претенденты упорядочиваются на основании имеющейся о них информации (как объективной, так и сообщаемой самими претендентами), затем победителем (или победителями) объявляется претендент, занявший первое место (или, соответственно, несколько первых мест – в зависимости от условий конкурса). Возникающая при этом проблема заключается в том, что участники конкурса могут искажать сообщаемую информацию, то есть манипулировать ею с целью войти в число победителей.

Различают *дискретные и непрерывные конкурсы*. В первом случае претенденту требуется вполне определенное количество ресурса и любое меньшее количество ресурса его не удовлетворяет

– приводит к нулевому эффекту (например, не позволяет реализовать проект, впустить изделие и т.д.). В случае же непрерывных конкурсов претендент, получая ресурс в количестве, меньше запрашиваемого, может получить эффект, отличный от нуля. Примером такой ситуации является пропорциональная зависимость между эффектом и ресурсом (эффективность постоянна).

В настоящем разделе рассматривается модель дискретного конкурса на примере задачи определения пакета инвестиционных проектов, которые получают финансирование.

Обозначим через l_i оценку ожидаемого эффекта от реализации i-го проекта, s_i – оценку объема финансирования i-го проекта. Как правило, оценка l_i определяется экспертной комиссией с учетом рыночных, экономических и социальных целей, а оценка s_i – фирмой, предлагающей проект, либо организацией, которая берется за его реализацию. Будем считать, что оценка эффекта l_i достаточно объективна, хотя, в принципе, нельзя исключить сознательное завышение или занижение оценок эффекта со стороны экспертов, заинтересованных в том или ином проекте. Что касается оценок требуемого финансирования, то здесь нельзя не учитывать тенденцию завышения требуемого объема финансирования со стороны фирм, которые берутся за его реализацию, либо которые предлагают свой проект.

Для снижения негативного влияния этой тенденции широко применяются конкурсные механизмы. Вводится некоторая оценка эффективности (приоритетности) инвестиционных проектов, зависящая как от эффекта l_i, так и от оценки объема финансирования s_i. Затем проекты упорядочиваются по убыванию эффективностей и финансируются в порядке этой очередности, пока хватает средств. Наиболее распространенными являются две оценки эффективности: $q_i = l_i / s_i$ и $q_i = l_i - a\, s_i$ (a – нормативный коэффициент, соизмеряющий эффект и затраты). Такой конкурс называется *простым*.

Как оценить эффективность конкурса? Обозначим через r_i объективную оценку объема финансирования i-го проекта (при финансировании, меньшем r_i, велик риск нереализации проекта, то есть, конкурс является дискретным). Если для всех проектов известны объективные объемы финансирования, то можно выбрать оптимальный пакет проектов Q, решив следующую задачу:

(1) $\sum_{i \in Q} \mathbf{l}_i \to \max$,

(2) $\sum_{i \in Q} r_i$ £ R,

где R – выделенный объем (фонд) финансирования.

Максимальный эффект, полученный в результате решения задачи (1)-(2) обозначим через L_{max}. Пусть Q – множество победителей конкурса. Тогда суммарный эффект от победившего пакета проектов составит

(3) $L(Q) = \sum_{i \in Q} \mathbf{l}_i$.

Очевидно, что $L(Q)$ £ L_{max}. Отношение

(4) $K = \dfrac{L(Q)}{L_{\max}}$

и определяет эффективность конкурсного механизма. Покажем, что эффективность простых конкурсов может быть сколь угодно малой.

Пример 5.1. Пусть имеется всего два проекта, причем $l_1 = 2\,e$, $r_1 = e$ (e – малое положительное число), $l_2 = 150$, $r_2 = 100$. Выделенный объем финансирования $R = 100$.

При оценке по отношению $q_1 = l_1 / r_1 = 2;$ $q_2 = l_2 / r_2 = 1{,}5$, очевидно, победителем будет первый проект, который получает финансирование $s_1 = e$. На второй проект денег не хватает. Таким образом $Q = \{1\}$, $L(Q) = 2\,e$. Максимальный эффект, очевидно, равен $L_{max} = 150$, когда финансируется второй проект. Эффективность конкурсного механизма составляет $K = 2\,e / 150 = e / 75$ и может быть сколь угодно малой.

При оценке эффективности по разности $q_1 = l_1 - a\,r_1$; $q_2 = l_2 - a\,r_2$ при $a = 1{,}5$ имеем: $q_1 = 0{,}5\,e$, $q_2 = 0$, и при любом e победителем будет первый проект. Эффективность конкурсного механизма в этом случае будет такой же, как и при оценке эффективности по отношению, то есть может быть сколь угодно малой.

Получим гарантированную оценку эффективности простого конкурса с учетом того, что, во-первых, победители конкурса могут завышать величину требуемых средств, а во-вторых, что остатка средств фонда может не хватить на реализацию очередного проекта.

Гарантированная эффективность K простого конкурса не ниже следующей величины: $K = \dfrac{1}{2 - a + \dfrac{1}{b-1}}$, где $a = Э_{min} / Э_{max}$

($Э_{min}$ – минимальная, а $Э_{max}$ – максимальная эффективность проектов, представленных на конкурс), $b = R / r$ (R – размер фонда, а r – максимальная величина средств, требуемая для реализации одного проекта).

Рассмотрим *прямой конкурсный механизм*, суть которого в том, что победители определяются в результате непосредственного решения задачи на максимум суммарного эффекта

(5) $\sum_{i \in Q} \mathbf{l}_i \to \max$

при ограничении

(6) $\sum_{i \in Q} s_i \le R$.

Легко показать, что *эффективность прямого конкурсного механизма* не менее чем 0,5. Эта оценка не улучшаема, что показывает следующий пример.

<u>Пример 5.2</u>. Пусть имеются два проекта со следующими параметрами: $l_1 = 100 + e$, $r_1 = 50$, $l_2 = 100$, $r_2 = 50$, где e – малое положительное число. Пусть при выделенном объеме финансирования $R = 100$ претенденты сообщили следующие оценки: $s_1 = 100$, $s_2 = 50$.

Очевидно, что в результате решения задачи (5), (6) победителем будет первая организация, то есть $Q = \{1\}$, $L(Q) = 100 + e$. В то же время, как легко убедиться, $L_{max} = 200 + e$ и поэтому

$$K = \frac{100 + e}{200 + e} = 0{,}5 + \frac{e}{400 + 2e}.$$

Так как e – любое положительное число, то K может быть сколь угодно близким к 0,5.

Рассмотрим более сложный вариант организации конкурса, так называемый *двухэтапный конкурс*. На первом этапе определяются все решения задачи (5), (6), для которых имеет место соотношение

(7) $L(Q)\ {}^{3}\ d\, L_0$,

где L_0 – суммарный эффект в оптимальном решении этой задачи, $0 < d \leq 1$ – фиксированный параметр. Другими словами, выбираются все пакеты проектов, для которых суммарный эффект не менее, чем определенная доля d от максимального эффекта при сообщенных оценках $\{s_i\}$. На втором этапе из всех пакетов, которые прошли первый тур, то есть удовлетворяют условию (7), выбирается пакет, требующий минимального финансирования. Для данного механизма возникает вопрос, какое d выбрать. Для ответа на этот вопрос рассмотрим случай двух проектов. При заданном значении d возможны четыре варианта (для определенности примем, что l_1 ³ l_2):

а) $l_2 / l_1 < d$ и $r_1 + r_2 > R$. В этом случае на первом этапе побеждает только один пакет, состоящий из одного первого проекта. Очевидно, что эффективность $K = 1$.

б) $l_2 / l_1 < d$ и $r_1 + r_2$ £ R. В этом случае на первом этапе также побеждает только один пакет, состоящий из первого проекта. Однако, поскольку $L_{max} = l_1 + l_2$, то эффективность будет равна

$$K = \frac{\mathbf{l}_1}{\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2} > \frac{1}{1+d}.$$

в) $l_2 / l_1 \geq d$ и $r_1 + r_2 > R$. В этом случае побеждают два пакета, один из которых включает первый пакет, а другой – второй. На втором этапе в худшем случае побеждает второй проект (если $r_2 < r_1$) и поэтому эффективность равна $K = \frac{\mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_1} \geq d$.

г) $l_2 / l_1 \geq d$ и $r_1 + r_2$ £ R. В этом случае наименее благоприятный вариант состоит в том, что на первом этапе побеждают два пакета, как и в варианте «в», а на втором этапе – второй проект. Это произойдет в том случае, если $s_1 + s_2 > R$ и в то же время $s_2 < s_1$. Если принять, что $s_1 = r_1$ (побежденный сообщает минимальную оценку), то наименее благоприятный для организатора вариант возможен, если $r_1 > R / 2$ и $r_2 < r_1$. В этом случае эффективность будет равна $K = \frac{\mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2} = \frac{d}{1+d}$.

Видно, что в случае «г» эффективность минимальна. Поскольку в этом случае эффективность растет с ростом d, то следует взять $d = 1$. Таким образом, мы снова приходим к прямому конкурсу.

По-видимому, при сделанных предположениях не существует конкурсного механизма, обеспечивающего гарантированную эффективность более чем 0,5. Ситуация становится более благоприятной, если принять другие гипотезы о поведении участников конкурса. До сих пор мы считали, что поведение участников конкурса определяется стремлением к равновесной ситуации (точке Нэша). Если принять, что участники конкурса стремятся к максимизации гарантированного результата, то выявляются преимущества двухэтапного конкурса. Действительно, в этом случае для уверенной победы на втором этапе участник, представляющий первый проект, либо должен быть уверен, что на первом этапе победит только один пакет, состоящий из первого проекта, либо он должен сообщить минимальную оценку затрат $s_1 = r_1$ для повышения шансов на победу во втором этапе. Аналогично второй участник сообщит $s_2 = r_2$. Отсюда следует, что наименее благоприятный случай в варианте «г» невозможен, и эффективность конкурса в варианте «г» равна единице. Таким образом, гарантированная эффективность будет равна $K = \min\left(d, \frac{1}{1+d}\right)$.

Максимум этой величины достигается при $d = \frac{1}{1+d}$. Решая это уравнение, получаем оптимальную величину d:

$$d_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6.$$

Полученная оценка гарантированной эффективности, по-видимому, справедлива и для случая, когда число участников больше двух. Это следует из предположения, что с ростом числа участников эффективность конкурса не уменьшается.

6. МЕХАНИЗМЫ НАЗНАЧЕНИЯ

В пятом разделе рассматривались конкурсные механизмы, в которых претенденты упорядочивались по определенному (одному) критерию. В более сложных конкурсах, например, когда подбираются исполнители операций проекта, каждый агент может претендовать на право реализации различных операций.

Обозначим A_{ij} – минимальную цену, по которой агент i еще берется за операцию j, S_{ij} – цена за операцию, предлагаемая агентом i (очевидно, S_{ij} ³ A_{ij}). Центр (руководитель проекта) должен назначить все операции так, чтобы суммарная стоимость их реализации была минимальной. Примем, что каждый агент берется за реализацию не более, чем одной операции. Для формализации задачи принятия решений центром обозначим $x_{ij} = 1$, если операция j назначается агенту i и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда задачу распределения операций по агентам – *сложный конкурс* – можно представить в виде следующей математической задачи:

$$(1)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i,j} x_{ij}\, S_{ij} \to \min \\ \sum\limits_{i} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{j} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

где n – число агентов, m – число операций.

При этом стоимость j-ой операции: $q_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} S_{ij}$.

Фактически здесь переплетаются несколько конкурсов (по числу операций), связанных между собой условием, что агент может быть победителем только в одном из них (то есть может выполнять в итоге только одну операцию). Анализ данного конкурсного механизма в существенной степени зависит от соотношения числа операций и числа агентов.

Можно показать, что ситуации равновесия Нэша соответствует назначение операций, минимизирующее сумму объективных затрат

$$(2)\quad C = \sum_{i,j} x_{ij}\, C_{ij}\ .$$

Доказательство. Пусть $\left\{S_{ij}^*\right\}$ – ситуация равновесия. Пусть $x_{ij}^* = 1$. Обозначим $D_i = s_{ij}^* - A_{ij} = q_j = A_{ij}$. Заметим, что если $S_{ik} - A_{ik} > D_i$, то агент будет уменьшать S_{ik}, надеясь получить операцию k и обеспечить больший выигрыш. Это уменьшение будет продолжаться до $S_{ik} = A_{ik} + D_i$. Если же $S_{ik} < A_{ik} + D_i$, то увеличение S_{ik} до величины $A_{ik} + D_i$, очевидно, не изменит назначения операций. Поэтому решение задачи (1) со значениями $\{S_{ij}^*\}$эквивалентно решению такой же задачи со значениями $S_{ij} = A_{ij} + D_i$, $i, j = \overline{1,n}$. Наконец, естественно принять, что все агенты, не получившие операций, будут сообщать минимальные оценки $S_{ij} = A_{ij}$, надеясь получить какую либо операцию. Отсюда следует, что назначение операций, минимизирующее $\sum_{i,j}(A_{ij} + \Delta_i)X_{ij}$, минимизирует и $\sum_{i,j} A_{ij}x_{ij}$. Однако, отсюда не следует, что операции будут назначены по минимальным ценам A_{ij}, поскольку значения D_i могут быть весьма высокими. Утверждение доказано.

Рассмотрим сначала случай, когда число агентов равно числу операций.

Пусть $S = \{S_{ij}\}$ – некоторая ситуация (совокупность цен, предлагаемых агентами), а $x_{ij}(S)$ – соответствует решению задачи назначения. Заметим, что если агент увеличит цены всех операций на одну и ту же величину $S'_{ij} = S_{ij} + D_i$, $j = \overline{1,n}$, то решение задачи назначения не изменится, и агент получит ту же операцию, но по более высокой цене. Поэтому, естественно, возникает тенденция роста цен. До каких пор? Ограничим цену каждой операции некоторой величиной L_j (лимитная цена операции). Ясно, что хотя бы по одной операции каждый агент предложит лимитную цену.

Пусть агенты перенумерованы таким образом, что в оптимальном решении задачи назначения операций при $S_{ij} = A_{ij}$, операцию i получает агент с номером i, и поэтому $q_i = S_{ii}$. Примем начальные цены $q_i^0 = L_i$, а начальные оценки $S_{ij}^0 = L_i$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. Далее проводим корректировку оценок и цен по формулам:

(3) $S_{ij} = \min(L_i, q_i + A_{ij} + A_{ii})$,

(4) $q_{ij} = \min(L_j, S_{jj})$.

Можно показать, что эта процедура конечна и в результате будут получены равновесные оценки $\{S_{ij}^*\}$ и, соответственно, равновесные цены $q_i^* = S_{ii}^*$, $i = \overline{1,n}$. Для нас важно, что отправной точкой процедуры являются максимальные (лимитные) цены.

Более того, хотя бы одна операция будет назначена по лимитной цене.

Таким образом, случай распределения равного числа агентов и операций лишь условно можно считать конкурсным механизмом. Скорее он близок к монопольному варианту финансирования операций. Это особенно очевидно, если каждый агент специализируется на определенном виде операций, например, агент i специализируется на операции i.

Пример 6.1. Пусть $L_i = L$; $A_{ii} = a < L$; $A_{ij} = L$, $j \neq i$. Очевидно, что ситуация равновесия $S_{ij}^* = L$ для всех i, j. Соответствующее равновесное решение задачи назначения операций: $x_{ii}^* = 1$; $x_{ij}^* = 0$, $j \neq i$; $q_i^* = L$, $i = \overline{1,n}$. Эффективность конкурсного механизма, оцениваемая по отношению минимальной стоимости всех операций $S_{min} = n\,a$ к их стоимости в ситуации равновесия $S = L\,n$, будет равна $K = \frac{S_{\min}}{S^*} = \frac{a}{L} << 1$, если $a << L$.

Пример 6.2. Пусть имеются две операции и два агента. Значения A_{ij} приведены в таблице 8.

Таблица 8

Параметры операций и агентов

$i \setminus j$	1	2
1	15	10
2	25	15

Лимитные цены операций $L_1 = 120$, $L_2 = 100$. Определим равновесные оценки S_{ij}^* и цены q_j^*. Имеем:

$$S_{21}^0 = S_{11}^0 = L_1 = 120,\ S_{12}^0 = S_{22}^0 = 100$$

$$q_1^0 = 120,\ q_2^0 = 100$$

1-ый шаг.

$S_{12}^1 = \min\left[L_2;\ q_1^0 + A_{12} - A_{11}\right] = 100$,

$S_{21}^1 = \min\left[L_1;\ q_2^0 + A_{21} - A_{22}\right] = 110$,

$S_{11}^1 = q_1^1 \min\left[L_1;\ S_{21}^1\right] = 110$,

$S_{22}^1 = q_1^2 \min\left[L_2;\ S_{12}^1\right] = 100$.

Получили равновесную ситуацию:

$$S_{11}^* = S_{21}^* = 110,\ \ S_{22}^* = S_{12}^* = 100$$
$$q_1^* = 100,\ \ q_2^* = 100 \ .$$

Эффективность конкурсного механизма в данном случае $K = 30 / 210 = 1/7$, то есть весьма мала.

Ситуация в корне меняется при появлении еще одного агента. Самое главное, что при этом договорные цены в ситуации равновесия определяются уже не лимитными ценами $\{L_j\}$, а минимальными ценами $\{A_{ij}\}$. Чтобы показать это, примем, что лимитные цены достаточно велики, и покажем, что они никак не влияют на равновесные. Пусть агенты перенумерованы таким образом, что агент с номером i получает операцию i, а агент с номером $(m + 1)$ вообще не получает операции. В этом случае $\Phi_0 = \sum_i A_{ii}$ определяет оптимальное решение задачи минимизации $\sum_{i,j} A_{ij} x_{ij}$.

Как уже отмечалось выше, агент $(m + 1)$ сообщает в равновесии минимальные цены $S_{m+1,j} = A_{m+1,j}$, а остальные агенты

$$S_{ij} = A_{ij} + \Delta_i,\ i = \overline{1,m} \ .$$

Для определения D_i решим m задач следующего вида:

$$(5)\quad \sum_{j=1}^{m} \left[A_{m+1,j} x_{m+1,j} + \sum_{i \neq k} A_{ij} x_{ij} \right] \to \min$$

при ограничениях

$$(6)\quad \begin{array}{l} \sum_j x_{ij} = 1,\ i = \overline{1, m+1},\ i \neq k, \\ \sum_{i \neq k} x_{ij} + x_{m+1,j} = 1,\ \ j = \overline{1,m} \end{array} .$$

Фактически мы заменили агента k на агента $(m + 1)$ в задаче назначения операций. Обозначим Φ_k значение целевой функции в оптимальном решении этой задачи. Заметим, что Φ_k ³ Φ_0 для всех k. Пусть теперь $D_k > \Phi_k - \Phi_0$. В этом случае решение задачи минимизации $\sum_{i,j} (A_{ij} + \Delta_i) x_{ij}$ не будет совпадать с решением задачи минимизации $\sum_{i,j} A_{ij} x_{ij}$. Поэтому в ситуации равновесия должно иметь место D_k £ $\Phi_k - \Phi_0$, а так как агенты заинтересованы в увеличении D_k, то в равновесии $D_k = \Phi_k - \Phi_0$ и $S^*_{ij} = A_{ij} + \Phi_i - \Phi_0$, $\Phi_{m+1} = \Phi_0$. Эффективность конкурсного механизма в случае $n = m + 1$ определяется выражением:

$$K = \frac{\Phi}{\sum_{i=1}^{m} \Phi_i - (m-1)\Phi_0}.$$

Поскольку все Φ_i, $i = \overline{1,n}$ определяются на основе минимальных цен A_{ij}, то эффективность конкурсного механизма определяется только минимальными ценами и не зависит от лимитных цен (при достаточно больших лимитных ценах).

Пример 6.3. Возьмем задачу из примера 6.1 и добавим одного агента, который может взяться и за первую, и за вторую операцию, которые для него одинаково выгодны, то есть $A_{31} = A_{32} = b$. Пусть $a < b < L$. В этом случае $\Phi_0 = 2a$, $\Phi_1 = \Phi_2 = a + b$, $D_1 = D_2 = b - a$ и эффективность конкурсного механизма

$$K = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}.$$

а цены обеих операций равны $q_1^* = q_2^* = b$.

Пример 6.4. Добавим теперь одного агента в задаче примера 6.2 со следующими данными – $A_{31} = 40$, $A_{32} = 20$. Имеем:
$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 15 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}$, $\Phi_0 = 30$, $\Phi_1 = 45$, $\Phi_2 = 35$, $D_1 = 15$, $D_2 = 5$.

Ситуация равновесия:

$$S^*_{11} = 30, \quad S^*_{12} = 25,$$
$$S^*_{21} = 30, \quad S^*_{22} = 20,$$
$$S^*_{31} = 40, \quad S^*_{32} = 20.$$

Назначение операций $x^*_{11} = x^*_{22} = 1$, остальные $x_{ij} = 0$.

Итак, первый агент получает первую операцию по цене $q_1^* = 30$, а второй – вторую по цене $q_2^* = 20$. Эффективность конкурсного механизма стала $K = \frac{30}{50} = 0{,}6$, то есть повысилась по сравнению с предыдущим случаем $K = 1/7$ примерно в 4,2 раза.

Приведенные примеры иллюстрируют, насколько резко может увеличиться эффективность конкурсного механизма при добавлении всего одного нового агента.

Эффективность конкурсного механизма максимальна, если в конкурсе участвуют равные соперники, то есть $A_{ij} = A_j$ для всех $i = \overline{1,n}$ и, следовательно, $\Phi_k = \Phi_0$, $D_k = 0$, то есть все операции назначаются по минимальным ценам A_j, $i = \overline{1,m}$. Таким образом, с увеличением числа участников конкурса эффективность конкурсного механизма, как правило, увеличивается (во всяком случае не уменьшается).

Если $n > m + 1$, то анализ конкурсного механизма проводится аналогично предыдущему случаю. Однако, объем вычислений быстро растет с ростом n. Так, при $n = m + 2$ необходимо рассмотреть C_m^2 задач, получаемых заменой любых двух агентов i, j, получивших операции, на двух агентов, не получивших операций в равновесии.

Обозначим

$$\Phi_{ij} = \min \sum_s \sum_{k \neq i,j} x_{ks} A_{ks}$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum\limits_{k \neq i,j} x_{ks} = 1, \ s = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{s=1}^{m} x_{ks} = 1, \ k \neq i, j. \end{cases}$$

В этом случае любое оптимальное по Парето решение системы неравенств

$$\begin{cases} \Delta_i + \Delta_j \leq \Phi_{ij} - \Phi_0, \ i, j = \overline{1,m}, \\ 0 \leq \Delta_i \leq \Phi_i - \Phi_0, \ i = \overline{1,m}, \end{cases}$$

определяет ситуацию равновесия. Эффективность конкурсного механизма можно оценить, определив: $\Delta_{max} = \max \sum_i \Delta_i$. Она равна $K = \dfrac{\Phi_0}{\Phi_0 + \Delta_{max}}$.

Пример 6.5. К трем агентам из примера 6.4 добавим четвертого:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 15 \\ 40 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Имеем: $\Phi_1 = 35$, $\Phi_2 = 30$, $\Phi_{12} = 40$, $\Phi_0 = 30$, D_1 £ $35 – 30 = 5$, D_2 £ $30 – 30 = 0$.

В данном случае, ситуация равновесия

$$S_{11} = 20,\ S_{21} = 25,\ S_{31} = 40,\ S_{41} = 20;$$
$$S_{21} = 15,\ S_{22} = 15,\ S_{32} = 20,\ S_{42} = 40.$$

Существуют два варианта назначения операций. В первом варианте первую операцию получает первый агент, а во втором – четвертый агент. Вторую операцию в первом варианте получает второй агент, а во втором – первый агент.

Эффективность конкурсного механизма при увеличении участников конкурса до четырех увеличивается до $K = 0{,}84 > 0{,}6$.

Таким образом, рассмотренные в настоящем разделе сложные конкурсы позволяют эффективно решать задачи определения оптимального состава участников ОС (например, исполнителей проекта).

7. МЕХАНИЗМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО И КОММЕРЧЕСКОГО ЦИКЛОВ

Длительность производственного цикла оказывает существенное влияние на эффективность производства и величину требуемых оборотных средств. Сокращение производственного цикла включается, как правило, в план развития предприятия, как одна из ключевых проблем. Рассмотрим задачу оптимального согласованного планирования мероприятий по *сокращению производственного цикла*.

Представим производственный процесс в виде технологической сети, вершины которой соответствуют цехам (участкам), а дуги отражают необходимую технологию производственного процесса. Обозначим t_i – продолжительность процесса в i-ом цехе. Тогда продолжительность производственного цикла определяется длиной максимального (критического) пути в сети. Если существенными являются времена доставки продукции из одного цеха в другой, то эти времена можно учесть, вводя длины соответствующих дуг.

Рассмотрим задачу сокращения продолжительности цикла на заданную величину D.

Опишем сначала частный случай, когда технологическая сеть представляет собой последовательную цепочку из n цехов. Каждый цех – агент – разрабатывает и представляет в отдел стратегического развития (центр) мероприятия по сокращению продолжительности производственного цикла. В агрегированном виде эти мероприятия можно описать зависимостью $S_i(t_i)$ затрат, требуемых на сокращение производственного цикла на величину t_i. Рассмотрим два механизма решения поставленной задачи.

<u>Первый механизм</u>. План мероприятий по сокращению продолжительности производственного цикла на величину D определяется в результате решения следующей задачи: $\sum_{i=1}^{n} S_i(t_i) \to \min$, при условии $\sum_{i=1}^{n} t_i = \Delta$. Пусть t_i^* – оптимальное решение этой задачи. Тогда i-ый цех получает плановое задание на сокращение продолжительности производственного цикла на t_i^* и ему обеспечивается финансирование соответствующих мероприятий в объеме $S_i(t_i^*)$.

<u>Второй механизм</u>. В этом механизме величина финансирования мероприятий цеха по сокращению продолжительности производственного цикла прямо пропорциональна величине t_i сокращения продолжительности производственного процесса в цехе, то есть $S_i = l\ t_i$, где l – величина финансирования, выделяемая на

сокращение продолжительности производственного процесса на единицу времени. Для определения плана мероприятий и величины l каждый цех представляет в отдел стратегического развития вариант сокращения продолжительности производственного процесса в цехе в зависимости от величины l. Обозначим $t_i = x_i(l)$, предлагаемую цехом величину сокращения производственного процесса при финансировании $l\ t_i$.

Отдел стратегического развития определяет величину l и план сокращения продолжительности производственного цикла из условия $\sum_{i=1}^{n} x_i(l) \geq \Delta$, то есть определяется минимальное λ^*, удовлетворяющее этому условию. Далее каждый цех i получает задание на сокращение продолжительности производственного процесса на величину $t_i^* = x_i(l^*)$ и соответствующее финансирование $l^* t_i^*$.

Для исследования сравнительной эффективности этих двух механизмов рассмотрим производственные функции $S_i(t_i)$ типа Кобба-Дугласа, то есть $S_i(t_i) = \frac{1}{a} t_i^a \cdot r_i^{1-a}$, $i = \overline{1, n}$, $a > 1$, где параметр r_i характеризует эффективность мероприятий по снижению продолжительности цикла.

Примем, что целевой функцией каждого цеха является разность между тем объемом финансирования, которое он получает на проведение мероприятий по сокращению производственного цикла и объективно необходимой величиной средств на эти мероприятия.

Можно показать, что оба механизма обеспечивают одинаковое превышение выделяемых средств над объективно необходимыми, и в этом смысле являются эквивалентными по эффективности. Однако, существенным преимуществом второго механизма является тот факт, что он стимулирует представление достоверных сведений о величине объективно требуемых объемов финансирования. Это свойство является решающим для создания на предприятии корпоративного духа, одним из основных условий которого являются доверительные отношения между подразделениями.

Таким образом, анализ показал преимущества второго механизма, поскольку при том же объеме финансирования он обладает важным свойством – достоверности информации, поступающей от агентов. Поэтому рассмотрим второй механизм для случая произвольной технологической сети.

Итак, пусть все цеха сообщили зависимости $t_i = x_i(l)$, $i = \overline{1,n}$. Обозначим T_0 – длину критического пути. Для решения задачи используем следующий <u>алгоритм:</u>

<u>1 шаг</u>. Определяем l_0 по формуле $l^* = \left(\dfrac{\Delta}{S}\right)^{a-1}$, где S – сумма оценок s_i операций критического пути, и полагаем $t_i^1 = t_i - x_i(l_0)$.

<u>2 шаг</u>. Определяем длину критического пути при продолжительностях соответствующих операций, равных t_i^1. Обозначим эту длину через T_1, а сам путь через m_1. Если $T_1 > T_0 - D$, то определяем новое значение l_1 по той же формуле, в которой $D = T(m_1) - T_0 + D$, где $T(m_1)$ – длина пути m_1 при начальных продолжительностях операций $\{t_i\}$, а S равно сумме оценок s_i агентов, составляющих путь m_1. Заметим, что $l_1 > l_0$. Находим критический путь m_2 и его длину $T(m_2)$ при продолжительностях операций $t_i^2 = t_i - x_i(l_2)$ и повторяем процедуру.

В силу конечности числа путей сети за конечное число шагов получим минимальное значение l^*, такое что длина критического пути в сети равна $(T_0 - D)$ при продолжительностях операций пути m_k, равных $t_i - x_i(l^*)$.

Теперь необходимо определить плановые задания t_i цехам по сокращению продолжительности цикла, имея в виду, что продолжительности операций должны удовлетворять условиям $t_i¢ = t_i - x_i(l^*)$ £ $t_i - t_i$ £ t_i.

На этом этапе алгоритма критерием служит объем финансирования мероприятий, который равен $\sum_{i=1}^{n} l^* t_i$. Эта задача является частным случаем широко известной задачи оптимизации сети по стоимости.

До сих пор мы рассматривали задачу оптимального согласованного планирования производственного цикла. Не менее важной задачей является *планирование коммерческого цикла*, поскольку именно от продвижения товара от предприятия к потребителю (транспортировка, складирование, продажа) зависит конечный финансовый результат, то есть получение прибыли. Коммерческий цикл представляет собой последовательность различных операций. При планировании коммерческого цикла, как правило, учитываются такие факторы, как затраты на транспортировку, хранение и продажу, продолжительность цикла от производства до продажи, включая реализацию товара, полученного по бартеру, доход от реализации товара и различного рода риски. Все эти факторы взаимосвязаны. Так, увеличивая затраты, можно уменьшить продолжительность цикла и риски, повысить спрос (за счет рекламы) и т.д.

Рассмотрим *задачу выбора оптимального коммерческого цикла* с учетом факторов продолжительности цикла, затрат и дохода. Возможные варианты коммерческого цикла можно представить в виде сети. Вход сети соответствует началу процесс (запуск продукции в производство, переговоры по поводу закупок и заключение договора, и т.д., в зависимости то того, с какой операции начинается планирование коммерческого цикла). Выход сети соответствует окончанию процесса (реализация товара и получение денег на расчетный счет). Каждая вершина соответствует некоторой операции. В этом случае последовательности операций, составляющих коммерческий цикл, соответствует путь сети, соединяющий вход с выходом. Каждой вершине i сети поставим в соответствие два числа – затраты на проведение соответствующей операции (стоимость операции) s_i и ее продолжительность t_i, связанные зависимостью $s_i(t_i)$.

Продолжительность цикла, определяемая путем, обозначенным m, равна $T(m)=\sum_{i\in m} t_i$, а стоимость всех его операций

$$S(m)=\sum_{i\in m} s_i .$$

Ожидаемый доход от реализации продукции в момент T будем оценивать с помощью показателя упущенной выгоды $F(T)$.

Задача оптимизации коммерческого цикла. Определить цикл m и продолжительность всех его операций так, чтобы сумма затрат и упущенной выгоды была минимальной.

Заметим, что в отличие от задачи оптимизации производственного цикла, в данном случае необходимо выбрать путь μ в сети (конкретный коммерческий цикл), а затем оптимизировать его по критерию $Ф=\sum\limits_{i\in m} s_i(t_i)+F\left(\sum\limits_{i\in m} t_i\right)$.

Фактически мы имеем дело с двойной оптимизацией – выбрать оптимальный путь и выбрать оптимальные продолжительности операций этого пути. Рассмотрим сначала вторую задачу оптимизации – выбрать оптимальные продолжительности операций коммерческого цикла m, состоящего из n операций.

Пусть $s_i(t_i)$ – выпуклые дифференцируемые убывающие функции t_i, а $F(T)$ – выпуклая дифференцируемая возрастающая функция T. Тогда условия оптимальности имеют вид $-\frac{ds_i}{dt_i}=\frac{dF}{dT}$, $i=\overline{1,n}$. Из этих условий можно выразить $t_i = x_i(T)$ и определить T из уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(T)=T$.

Пусть теперь $F(T)$ – вогнутая функция. Практически без ограничения общности можно принять, что $F(T)$ – кусочно-линейная функция ($q_1 > q_2 > ... > q_{k+1}$, где q_i – тангенс угла наклона соответствующего участка прямой). Из уравнения $-\frac{ds_i}{dt_i}=q$ определим $t_i = x_i(q)$.

Заметим, что t_i – убывающая функция q. Полагаем $q = q_1$. Определяем $t_{i1} = x_i(q_1)$ и $Q_1=\sum\limits_{i=1}^{n} t_{i1}$. Если Q_1 £ T_1, то полагаем $q = q_2$ и повторяем процедуру. Если $T_{k-1} < Q_1$ £ T_k, где $k > 1$, то полагаем $q = q_k$ и повторяем процедуру, то есть, определяем $t_{ik} = x_i(q_k)$, $Q_k=\sum\limits_{i=1}^{n} t_{ik}$ и т.д. Выделяем все отрезки k такие, что $T_{k-1} < Q_k$ £ T_k.

Для каждого такого отрезка вычисляем $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i(t_{ik})+F(Q_k)$ и выбираем отрезок с минимальной величиной. Соответствующие этому отрезку значения $\{t_{ik}\}$ определяют оптимальное решение задачи.

Перейдем к исследованию задачи, когда задана сеть, описывающая возможные варианты коммерческих циклов.

Пусть зависимости $s_i(t_i)$ имеют вид $s_i(t_i) = w_i j\left(\frac{t_i}{w_i}\right)$, $i = \overline{1,n}$, где j – убывающая выпуклая функция t. При зависимостях такого вида задача оптимизации коммерческого цикла свелась к двум отдельным задачам.

Задача 1. Определить путь минимальной длины при длинах дуг, равных w_i.

Задача 2. Для пути минимальной длины W_m решить задачу оптимизации продолжительностей операций.

Первая задача является классической «*задачей о пути минимальной длины*». Вторая задача сводится к минимизации функции одной переменной T: $W_m j\left(\frac{T}{W_m}\right) + F(T)$. При найденном оптимальном значении T_0 продолжительность операций легко определяется: $t_i = \frac{w_i}{W_m} T_0$.

8. МЕХАНИЗМЫ СИНТЕЗА ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ[1]

Одним из способов воздействия на организационную систему со стороны ее руководства является модификация *организационной структуры* (структурой системы называется совокупность устойчивых связей, обеспечивающих ее целостность и тождественность самой себе).

В различных работах понятие организационной структуры определяется по-разному: этот термин может обозначать схему подчиненности, схему документооборота организации, структуру материальных потоков и т.д. В данном разделе под организационной структурой подразумевается структура подчиненности со-

[1] *Настоящий раздел написан М.В. Губко.*

трудников организации, по сути, – должностная инструкция управляющих работников организации.

Одной из задач руководства организации является построение рациональной организационной структуры, то есть организационной структуры, наиболее полно соответствующей предназначению организации и приводящей к максимальной эффективности ее функционирования.

Задачи управления организационной структурой на настоящий момент являются малоизученными. Это связано, в первую очередь, со сложностью самой задачи, ведь на принципы построения организационной структуры оказывает влияние весьма большое число факторов – размер организации, специфика технологии ее функционирования, структура ее документооборота, ограничения по возможностям передачи и переработки информации в системе управления, законодательные ограничения и др.

Вторая сложность связана с тем, что задача построения организационной структуры является «задачей верхнего уровня» по отношению к другим задачам управления. Действительно, пусть необходимо определить эффективность некоторой структуры управления (должностной инструкции). Для этого необходимо, исходя из имеющихся людских ресурсов и возможностей дополнительного найма, определить, какие именно люди должны занять те или иные должности в структуре управления организацией, чтобы эффективность функционирования организации в рамках заданной структуры была максимальна, то есть решить *задачу формирования оптимального состава*. Для того, чтобы оценить эффективность того или иного состава, вообще говоря, необходимо решить *задачу синтеза оптимальных механизмов управления* с учетом заданного состава, в частности, рассчитать оптимальную систему стимулирования для данного состава сотрудников. Только в этом случае можно обоснованно вычислить эффективность функционирования организации с заданными структурой и составом. Все перечисленные действия необходимо повторить для каждого из предлагаемых вариантов структуры! На практике такой процесс почти нереализуем и может быть проведен только для сравнения двух-трех организационных структур.

Таким образом, решение задачи формирования организационной структуры требует умения решать задачи формирования состава и задачи построения оптимальных механизмов управления.

Для того, чтобы эффективно решать задачу формирования организационной структуры, рассматривая большое число возможных вариантов структуры, эту задачу приходится несколько искусственно «отделять» от других задач управления и искать рациональную структуру с некоторым «типичным» составом и «стандартными» механизмами управления. И даже при этих упрощениях задачи построения структуры остаются настолько сложными, что какие-либо общие методы их решения на настоящий момент отсутствуют.

Ниже описывается относительно простая модель, позволяющая продемонстрировать один из подходов к решению задач формирования организационной структуры.

Структура технологических потоков в существенной степени определяет организационную структуру, поэтому интересным представляется построение модели *структуры управления технологическими связями* организации. Несомненно, данная модель весьма условна и учитывает лишь один из аспектов, влияющих на структуру организации. Тем не менее, она допускает обобщения, позволяющие более полно описать построение структуры организационной системы.

Технологическим графом над множеством вершин N назовем ориентированный граф без петель $T = < N, E_T >$, ребрам которого $(u,v) \in E_T$ сопоставлены r-мерные вектора $l_T(u,v)$ с неотрицательными компонентами: $l_T : E_T \to R_+^r$. Вершины данного графа – это элементарные операции технологического процесса предприятия или конечные исполнители (рабочие места). Связь $(u,v) \in E_T$ в технологическом графе означает, что от элемента u к элементу v идет r-компонентный поток сырья, материалов, энергии, информации и т.п. Интенсивность каждой компоненты потока и определяется компонентами вектора $l_T(u,v)$.

Пример технологического графа с двухкомпонентными потоками (первая компонента описывает печатные документы, циркулирующие в организации, вторая – «устную информацию») приведен на рисунке 15. Числовые значения данных компонент для каждой из дуг технологического графа описывают (в условных единицах) объемы печатных документов и устной информации, передаваемых с одного рабочего места на другое.

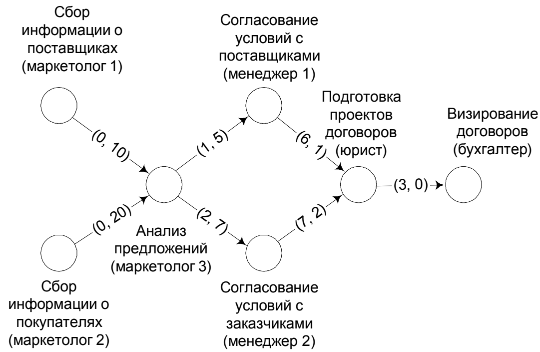

Рис. 15. Пример технологического графа процесса подписания договоров в производственной фирме

В принципе, вершины данного графа можно рассматривать и как рабочие места, и как операции технологического процесса.

Часто при организации подобных технологических процессов ограничиваются тем, что назначают ответственных за выполнение той или иной операции. Однако для нормального функционирования системы этого недостаточно, так как технологические связи между операциями (исполнителями) не контролируются.

Действительно, возьмем, например, маркетолога 3. В его обязанности входит анализ предложений маркетологов 1 и 2 для выбора варианта поставки. Однако обеспечение своевременного поступления информации от этих сотрудников, контроль ее полноты и достоверности, согласование формы подачи информации не входит в круг его обязанностей. Таким образом, необходимо создание структуры (системы управления технологическими связями), которая контролировала бы потоки между отдельными элементами технологического графа. Для краткости будем называть такую структуру *организацией*.

Если «расположить» технологический граф в горизонтальной плоскости (см. рисунок 16), то создание организации можно сформулировать как задачу надстройки над технологическим графом дерева, «верхними» узлами которого будут менеджеры-контролеры, а «нижними» узлами, или листьями – вершины технологического графа. Дуги дерева ориентированные и направлены от подчиненного к начальнику.

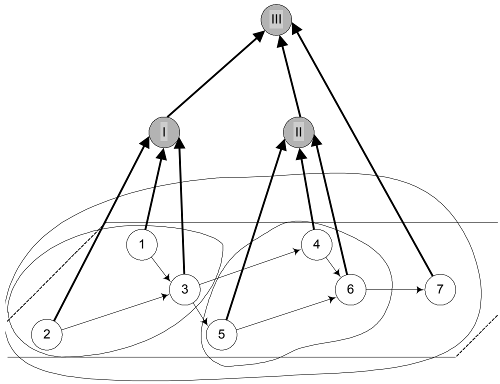

Рис. 16. Пример структуры системы управления технологическими связями

На рисунке 16 изображена система управления, состоящая из вершин 1-7 изображенного на рисунке 15 технологического графа и трех дополнительных узлов (контролеров): I, II, III. Подчиненными узла I являются все маркетологи (вершины 1–3 технологического графа), подчиненными узла II – менеджеры и юрист (вершины 4–6), в подчинении узла III – узлы I, II и бухгалтер (вершина 7).

Каждое из этих деревьев полностью *контролирует* все вершины и связи технологического графа, поскольку в каждом дереве присутствует корневой узел, в подчинении которого (возможно, посредством промежуточных узлов) находятся все до одной вершины технологического графа.

Таким образом, организации отличаются только затратами на свое содержание и задача поиска оптимальной организации состоит в поиске дерева минимальной стоимости.

Для того, чтобы определить стоимость графа организации, введем понятие *группы, контролируемой узлом графа организации*. Группой $g(v)$ узла v графа организации назовем подмножество вершин технологического графа (являющихся одновременно листьями дерева организации), из которых в графе организации есть путь в узел v.

Например, на рисунке 16 группа узла I состоит из элементов $\{1, 2, 3\}$, группа узла II – $\{4, 5, 6\}$, группа узла III совпадает со всем множеством N (на рисунке 16 группы узлов графа организации обведены). Группы в узлах 1-7 состоят из одного элемента – самого этого узла.

Для произвольного узла v графа организации обозначим $Q(v)$ – множество узлов, *непосредственно* подчиненных ему в графе организации. Для узла I на рисунке 16 его непосредственными подчиненными являются узлы 1, 2 и 3, для узла II – узлы 4, 5 и 6, для узла III – узлы I, II и 7.

Легко проверить, что группа в узле v графа организации является объединением групп в узлах, непосредственно подчиненных узлу v:

(1) $g(v) = \bigcup_{v' \in Q(v)} g(v')$.

Логично предположить, что узел v графа организации контролирует технологические потоки только между вершинами подчиненной ему группы $g(v)$. Определим вектор $l_T(g)$ суммарного потока между вершинами произвольной группы g:

$$l_T(g) := \sum_{\substack{u,v \in N \\ (u,v) \in E_T}} l_T(u,v).$$

Поскольку общий поток внутри группы $g(v)$ узла v равен $l_T(g(v))$, а потоки $l_T(g(v_1)),...,l_T(g(v_k))$ уже контролируются непосредственными подчиненными узла v, то узел v должен непосредственно контролировать лишь поток $L_T(v) = l_T(g(v)) - l_T(g(v_1)) - ... - l_T(g(v_k))$, где $g(v_1),...,g(v_k)$ – группы в узлах-подчиненных $\{v_1,...,v_k\} = Q(v)$.

В результате построения графа организации для каждой связи технологического графа должен быть назначен ответственный, контролирующий данную связь. Если технологический граф T связный, то для того, чтобы каждая его связь кем-то контролировалась, необходимо наличие в графе организации узла, группа в котором совпадает со всем множеством исполнителей N. Это и будет корневой узел дерева организации.

Содержание каждого из узлов графа организации связано с определенными затратами. Будем считать, что затраты на содержание узла v зависят от потока $L_T(v)$, который непосредственно контролирует данный узел, и описываются некоторой функцией $K(L_T(v)) \geq 0$[1].

Тогда стоимость $P(G)$ всего графа организации $G = \langle V, E \rangle$ (где V – множество управляющих узлов графа организации (то есть вершин, имеющих подчиненных), а E – множество дуг, определяющих взаимную подчиненность узлов) равна сумме стоимостей его узлов:

(2) $P(G) = \sum_{v \in V} K(L_T(v))$.

Таким образом, задачу определения структуры оптимальной системы управления технологическими связями можно сформулировать как задачу поиска оптимального дерева организации одной группы N на множестве исполнителей N с функционалом стоимости узла, заданным формулой (2).

Определим, какими свойствами обладает функция затрат $K(\cdot)$. Эта функция описывает затраты на содержание узла графа организации и ее значение зависит от объема потока (информации), непосредственно контролируемого данным узлом, поэтому логично предположить, что затраты возрастают при росте значения любой из компонент контролируемого потока. Мы считаем, что в каждом узле графа организации находится человек – менеджер-контролер. У людей есть ограничения на перерабатываемый объем информации – каждая новая единица информации усваивается тяжелее, чем предыдущая, требует больше времени, усилий, и, в конце концов, большей квалификации. Отражением этого свойств процесса переработки информации является выпуклость функции затрат $K(\cdot)$ по каждой из компонент потока.

Значение функции затрат при нулевом перерабатываемом потоке отражает «начальные» затраты, необходимые на поддержание функционирования менеджера-контролера (минимальная зарплата, стоимость организации рабочего места и т.д.) даже в отсутствие контролируемого потока.

---

[1] *В описываемой модели для простоты считается, что стоимость содержания управляющего узла не зависит от конкретного человека, занимающего данную должность. Также за рамками модели остаются вопросы мотивации менеджеров – предполагается, что затраты на стимулирование входят в общие затраты содержания узла.*

Можно показать, что при нулевых (или очень малых) начальных затратах выгодно содержать как можно большее число менеджеров (узлов графа организации), каждый из которых контролирует как можно меньший поток. Абсурдность этого вывода с точки зрения большинства практических приложений говорит о том, что начальные затраты на содержание узла играют важную роль в процессе формирования организационной структуры. Чтобы проиллюстрировать на примере построение (приближенно) оптимальной организации, сделаем еще предположение о том, что функция $K(\cdot)$ зависит только от линейной комбинации компонент вектора потока: $K(L) = K'(a_1 L^1 + ... + a_r L^r)$, где $K'(\cdot)$ – выпуклая функция одной переменной, причем $K'(0) > 0$.

Пусть мы построили некоторый граф организации G: определены узлы $v_1, \ldots, v_n$, управляющие группами $g_1, \ldots, g_n$ и контролирующие потоки $L_1, \ldots, L_n$. Стоимость такой организации равна

$$P(G) = \sum_{i=1}^{n} K(L_i)\,.$$

Обозначим $L_T = \sum_{(u,v)\in T} l_T(u,v)$ сумму всех потоков технологического графа T. Для произвольной организации G выполнено равенство $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_T$.

Временно допустим, что после построения графа организации мы можем произвольно перераспределять потоки между его узлами для уменьшения загруженности одних узлов и увеличения загруженности других. Тогда при заданном наборе узлов $v_1, \ldots, v_n$ для определения их загруженности $L_1', ..., L_n'$, приводящей к минимальной стоимости системы управления, необходимо решить задачу:

$$(3)\ (L_1', ..., L_n') = \arg\min_{L_1,...,L_n} [\sum_{i=1}^{n} K(L_i)]$$

с учетом условия $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_T$.

В силу зависимости функции $K(\cdot)$ от линейной комбинации компонент, можно r-компонентные потоки

$l_T(u,v) = (l_T(u,v)^1,...,l_T(u,v)^r)$ заменить на однокомпонентные потоки $l_T^{'}(u,v)$: $l_T^{'}(u,v) = a_1 l_T(u,v)^1 + ... + a_r l_T(u,v)^r$.

Следовательно, имеем задачу с однокомпонентными потоками и выпуклой функцией затрат $K'(\cdot)$. Решением данной задачи является равное распределение нагрузки между узлами графа организации – нагрузка $L_1^{'} = ... = L_n^{'} = L_T / n$.

Стоимость организации при такой загруженности узлов равна $n \cdot K'(L_T / n)$, и это минимальная стоимость организации суммарного потока L_T с n управляющими узлами.

Однако произвольное перераспределение загруженности между управляющими узлами невозможно, поскольку оно полностью определяется группами, которые контролируют узлы, и группами, которые контролируют их непосредственные подчиненные. Следовательно, мы можем только изменить граф организации, передав часть подчиненных одного узла другому. Вместе с передачей подчиненных произойдет и перераспределение потоков.

Например, возьмем узел v графа организации и два подчиненных ему узла $v', v'' \in Q(v)$. Изменим граф организации, передав узел v'' в подчинение узлу v'. Если при этом сумма стоимостей узлов v и v' $K(L_T(v)) + K(L_T(v'))$ в новом графе будет меньше, чем сумма их стоимостей в старом, то и общая стоимость нового графа уменьшилась по сравнению со старым, так как стоимости остальных узлов не изменились.

Возможны и ситуации, когда стоимость организации будет уменьшаться при передаче подчиненного узла в обратном направлении.

Таким образом, если в некотором графе организации возможна передача подчиненных от более загруженного узла v_1 менее загруженному узлу v_2, сглаживающая разницу в контролируемых ими потоках, то такой граф не является оптимальным.

Итак, мы определили, какие организации не будут оптимальными. Однако как найти оптимальную организацию? Даже в столь упрощенной постановке задача поиска оптимального графа организации остается вычислительно сложной. Однако на практике обычно достаточно найти «хорошую» организацию, затраты на содержание которой не сильно превышают минимальных. Для решения же этой задачи можно предложить следующий алгоритм.

1. Найдем примерное количество узлов в дереве организации $n^* = \arg \min_{n=\overline{1,|N|-1}} n\,K'(L_T / n)$.

Если бы мы могли распределить потоки поровну между n узлами графа организации, то количестве узлов в графе, равном n^* достигался бы минимум затрат на содержание организации.

2. Определим «эталонный» поток $L := L_T / n^*$, приходящийся на один узел.

3. Будем последовательно добавлять в граф организации узлы таким образом, чтобы контролируемый ими поток был как можно ближе к эталонному потоку L до тех пор, пора каждая связь технологического графа не будет контролироваться одним из узлов графа организации.

Рассмотрим следующий пример. Пусть для технологического графа, приведенного на рисунке 15, функция $K(L) = 300 + (L_1 + L_2)^2$. Тогда $n^* = 4$, $L = 16$, $P^*(n^*) := n^* K(L_T / n^*) = 2224$.

Одна из организаций, построенных по приведенному выше алгоритму, изображена на рисунке 17. Загруженность управляющих узлов I-IV: $L_I = 16$, $L_{II} = 15$, $L_{III} = 13$, $L_{IV} = 20$, стоимость организации $P(G) = 2250$, что не сильно отличается от минимально возможной стоимости системы с четырьмя управляющими узлами $P^*(4) = 2224$.

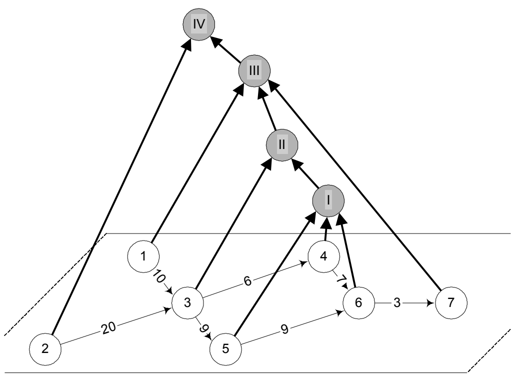

Рис. 17. Пример приближенно оптимальной структуры системы управления технологическими связями

В наших рассуждениях предполагается, что в каждом узле графа организации находится один менеджер-контролер. Как показано выше, оптимальным является равное распределение загруженности менеджеров. В то же время, можно заметить, что в больших организациях с ростом уровня, на котором находится менеджер, неизбежно растет и объем потока, который он вынужден контролировать. Соответственно растут и затраты на содержание узла графа организации. Таким образом, возникает необходимость во вспомогательном аппарате (секретарях, помощниках), который не принимает непосредственно решений, но помогает принимать решения менеджеру. Несмотря на то, что содержание дополнительных служащих требует средств, за счет уменьшения потока, приходящегося на одного служащего, удается получить выигрыш в стоимости содержания узла.

Таким образом, одним из обобщений рассматриваемой модели является допущение возможности нахождения в одном узле графа организации нескольких сотрудников.

На рисунке 18 приведены функции затрат узла, в котором находится один менеджер (кривая 1), менеджер и секретарь (кривая 2), менеджер и два секретаря (кривая 3).

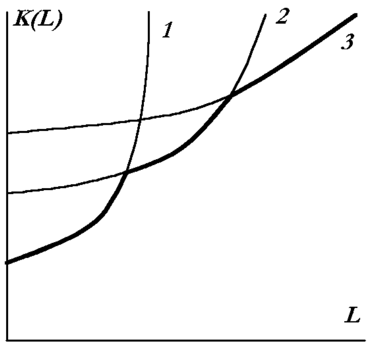

Рис. 18. Функции затрат узла при различном числе сотрудников аппарата

Из рисунка видно, что с ростом объема контролируемого потока выгодно сначала содержание одного менеджера, потом добавление ему секретаря (помощника), потом добавление еще одного и так далее. Жирной линией на рисунке показана «эффективная» функция затрат, относящаяся к наилучшему составу узла.

Если зафиксировать такое правило формирования состава, то можно вернуться к исходной постановке задачи, считая функцию затрат узла равной «эффективной» функции затрат.

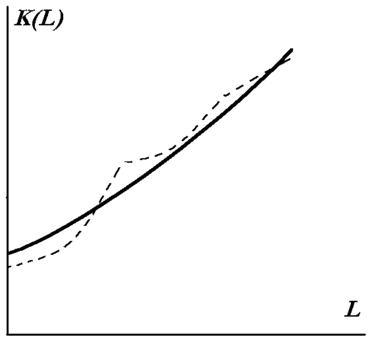

Рис. 19. Аппроксимация функции затрат узла выпуклой гладкой функцией

Неудобство работы с «эффективной» функцией затрат узла заключается в том, что она, в общем случае, не выпуклая и даже не дифференцируемая. Однако ее можно аппроксимировать гладкой выпуклой функцией, как показано на рисунке 19, для получения приближенного решения задачи формирования структуры в соответствии с описанным выше алгоритмом.

9. МЕХАНИЗМЫ СМЕШАННОГО ФИНАНСИРОВАНИЯ

Крупные проекты, как правило, редко финансируются из одного источника. Инициаторы проекта стараются привлечь средства федерального и регионального бюджетов, различные фонды, средства частных фирм и т.д. Задача финансирования в этом случае относится к классу задач распределения ресурса (затрат).

Рассмотрим механизмы смешанного финансирования проектов. Примем для определенности, что имеется n типов региональных проектов (социальной защиты, охраны окружающей среды, строительства дорог и т.д.), к реализации которых желательно привлечь средства частных фирм. Однако, проекты могут быть экономически невыгодны для частных фирм, поскольку отдача от них (эффект на единицу вложенных средств) меньше единицы. Обозначим эффект от проектов на единицу вложенных средств для i-ой фирмы через a_i ($a_i < 1$, $i = \overline{1,n}$).

Региональный бюджет ограничен и явно недостаточен для реализации необходимого числа проектов. Однако частные фирмы не прочь получить бюджетные деньги или льготный кредит. Идея смешанного финансирования состоит в том, что бюджетные средства или льготный кредит выдаются при условии, что фирма обязуется выделить на проект и собственное финансирование. Как правило, на практике фиксируется доля средств, которую должна обеспечить фирма (например, 20% средств выделяется из бюджета, а 80% – составляют собственные средства фирмы). Однако, такая жесткая фиксация доли бюджетных средств имеет свои минусы. Если эта доля мала, то будет незначительным и объем частных средств, а если велика, то, во-первых, желающих вложить собственные средства будет слишком много, и придется проводить дополнительный отбор (например, на основе конкурсных механизмов), а во-вторых, уменьшается эффективность использования бюджетных средств. Ниже рассматривается механизм смешанного финансирования с гибко настраиваемой величиной доли бюджетного финансирования.

Дадим формальную постановку задачи разработки механизма смешанного финансирования. Имеются n фирм – например, потенциальных инвесторов в программы социального развития региона. Имеется также централизованный фонд финансирования программ развития. Каждая фирма предлагает для включения в программу социального развития проекты, требующие суммарного финансирования S_i. Эти проекты проходят экспертизу, в результате которой определяется их социальная ценность $f_i(S_i)$. Помимо социальной ценности, предлагаемый фирмой пакет проектов имеет экономическую ценность $j_i(S_i)$ для фирмы. На основе заявок фирм центр (менеджер проекта, руководство региона и т.д.) определяет объемы финансирования проектов фирм $\{x_i\}$ (как правило, x_i £ S_i), исходя из ограниченного объема бюджетных средств R. Процедура

$\{x_i = p_i(S),\ \ i = \overline{1,n}\ \}$ называется *механизмом смешанного финансирования*. Дело в том, что недостающие средства $y_i = S_i - x_i$ фирма обязуется обеспечить за свой счет. Таким образом, интересы фирмы описываются выражением:

(1) $j_i(S_i) - y_i$,

где $j_i(S_i)$ – доход фирмы (если фирма берет кредит y_i в банке, то учитывается процент за кредит). Задача центра заключается в том, чтобы разработать такой механизм $p(S)$, который обеспечит максимальный социальный эффект: $Ф = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(S_i^*\right)$, где $S^* = \{S_i^*\}$ – равновесные стратегии фирм (точка Нэша соответствующей игры).

Рассмотрим линейный случай, когда $j_i(S_i) = a_i S_i$, $f_i(S_i) = b_i S_i$, $0 < a_i < 1$, $b_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Проведем анализ механизма прямых приоритетов

(2) $x_i(\overline{S}) = \dfrac{\mathbf{l}_i S_i}{\sum_j \mathbf{l}_j S_j} R,\ i = \overline{1,n}$,

где $\mathbf{l}_i$ – приоритет i-ой фирмы, $\overline{S} = \left(S_1, S_2, \ldots, S_n\right)$. Примем без ограничения общности, что $R = 1$. Заметим, что в данном случае может иметь место $x_i(S) > S_i$ (фирма получает средств больше, чем заявляет). Будем считать, что в этом случае разность $x_i(S) - S_i$ остается у фирмы.

Определим ситуацию равновесия Нэша. Для этого подставим (2) в (1) и определим максимум по S_i выражения

$$a_i S_i - \left(S_i - \frac{\mathbf{l}_i S_i}{L(S)} \right) = \frac{\mathbf{l}_i S_i}{L(S)} - (1 - a_i) S_i,$$

где $L(S) = \sum_j \mathbf{l}_j S_i$.

После несложных вычислений получим:

$$\mathbf{l}_i S_i = L(S)\left[1 - q_i L(S)\right], \text{ где } q_i = \frac{1 - a_i}{\mathbf{l}_i}.$$

Из условия $\sum_i \mathbf{l}_i S_i = L(S)$ определяем

(3) $L(S^*) = \dfrac{(n-1)}{Q}$, $S_i^* = \dfrac{(n-1)}{\lambda_i Q}\left[1 - \dfrac{(n-1)q_i}{Q}\right]$,

где $Q = \sum_i q_i$. При этом должно, очевидно, выполняться условие $S_i^* \geq 0$ или

(4) $\dfrac{q_i}{Q} < \dfrac{1}{n-1}$, $i = \overline{1,n}$.

Если это условие нарушается, то соответствующие фирмы выбывают из состава претендентов. С новыми значениями Q и n вычисления следует повторить. Если при этом появляются новые фирмы, для которых нарушается (4), то эти фирмы также выбывают, и т.д. За конечное число шагов будет получена ситуация равновесия, такая, что для всех фирм выполняется (4). Пусть фирмы упорядочены по возрастанию q_i, то есть $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n$. Для определения числа фирм – претендентов на участие в социальных программах развития региона необходимо найти максимальное k такое, что $q_i < \dfrac{Q_k}{k-1}$, где $Q_k = \sum_{1}^{k} q_i$, $i = \overline{1,k}$.

Рассмотрим пример, для которого значения a_i, λ_i и q_i приведены в таблице 9.

Таблица 9

Параметры модели

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
a_i	0,9	0,6	0,1	0,12	0,75	0,1
λ_i	1	2	3	2,2	0,5	1,5
q_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Нетрудно определить, что максимальное $k = 3$. Действительно:

$$\frac{q_1 + q_2}{1} = 0{,}3 > q_2 = 0{,}2,$$

в то же время

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{2} = 0{,}3 = q_3 = 0{,}3.$$

Таким образом, претендентами на участие в программе по схеме смешанного финансирования являются первые две фирмы. Если $b_i = \boldsymbol{l}_i$ для всех i, то суммарный эффект от программы составляет (с учетом $R = 1$) $L(S^*) = \dfrac{(n-1)}{Q_3} = 3\dfrac{1}{3}$, а суммарное финансирование $S^* = 2\frac{7}{9}$. Таким образом, финансирование программы в $2\frac{7}{9}$ раза превышает бюджетные средства. Заявки фирм в равновесии: $S_1^* = 2\dfrac{2}{9}$, $S_2^* = 1\dfrac{5}{9}$.

В рассмотренном примере мы взяли $\boldsymbol{l}_i = b_i$, $i = \overline{1,n}$. Поставим задачу определить механизм прямых приоритетов, обеспечивающий максимум социального эффекта. Необходимо определить приоритеты $\{\boldsymbol{l}_i\}$ таким образом, чтобы суммарный эффект был максимальным. Задача сводится к определению $\{\boldsymbol{l}_i\ ^3\ 0\}$ таких что величина

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n} b_i S_i^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i(n-1)R}{\mathbf{l}_i Q}\left[1 - \frac{(n-1)q_i}{Q}\right]$$

принимает максимальное значение. Заменой $\boldsymbol{l}_i = (1 - a_i) / q_i$, $q_i / Q = a_i$, $p_i = (1 - a_i) / b_i$ приведем (5) к виду

$$(6)\quad \Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{{}_i(n-1)a_i}{p_i}\left[1 - (n-1)a_i\right].$$

Необходимо определить $\{a_i\ ^3\ 0\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, при которых (6) максимален. Применяя метод множителей Лагранжа, получим

$$(7)\quad \mathbf{l}_i^0 = \frac{1 + (n-2)b_i}{2(n-1)},\ b_i = \frac{p_i}{\sum_j p_j},\ i = \overline{1,n}.$$

Соответственно $\mathbf{l}_i^0 = \dfrac{1 - a_i}{a_i^0}, i = \overline{1,n}$, (с точностью до постоянного множителя). Интересно отметить, что в случае двух фирм оптимальные приоритеты не зависят от коэффициентов при функциях социального эффекта b_1 и b_2.

Рассмотрим второй пример, в котором определим оптимальные приоритеты для задачи предыдущего примера. Для случая двух фирм имеем $a_1^0 = a_2^0 = \frac{1}{2}$ и, подставляя в (6), получаем

$$p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ b_1 = 1/3;\ b_2 = 2/3;$$

$$\Phi = \left[\frac{a_1^0}{p_1}\left(1 - a_1^0\right) + \frac{a_2^0}{p_2}\left(1 - a_2^0\right)\right] = 3\frac{3}{4},$$

что больше $3^1/_3$. Увеличилось и суммарное финансирование до $3^1/_8$.

При оптимальных приоритетах может измениться число фирм – претендентов на участие в программе. Поэтому необходимо проверить варианты с тремя фирмами и более. Рассмотрим вариант с тремя фирмами. Имеем:

$$p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}3;\ b_1 = 1/6;\ b_2 = 1/3;\ b_3 = 1/2;$$

$$a_1^0 = \frac{1 + b_1}{4} = \frac{7}{24};\ a_2^0 = \frac{1 + b_2}{4} = \frac{1}{3};\ a_3^0 = \frac{1 + b_3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Поскольку все $\{a_i^0\}$ меньше *1/2*, то условия (4) выполнены. Подставляя в (6), получаем:

$$\Phi = 2\left[\frac{a_1^0}{p_1}\left(1 - 2a_1^0\right) + \frac{a_2^0}{p_2}\left(1 - 2a_2^0\right) + \frac{a_3^0}{p_3}\left(1 - 2a_3^0\right)\right] = 4\frac{1}{6}.$$

Как видим, эффективность механизма смешанного финансирования увеличилась. Рассмотрим случай четырех фирм. Имеем:

$$p_1 = b_1 = 0{,}1;\ p_2 = b_2 = 0{,}2;\ p_3 = b_3 = 0{,}3;\ p_4 = b_4 = 0{,}4;$$

$$a_1^0 = \frac{1 + 2b_1}{6} = 0{,}2;\ a_2^0 = \frac{1 + 2b_2}{6} = \frac{7}{30};\ a_3^0 = \frac{4}{15};\ a_4^0 = 0{,}3.$$

Условия (4) по-прежнему выполняются. Суммарный социальный эффект составит:

$$\frac{\Phi}{R} = 3\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i^0}{p_i}\left(1 - 3a_i^0\right) =$$

$$= 3\left[\frac{0{,}2 \cdot 0{,}4}{0{,}1} + \frac{7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5}{30} + \frac{8}{45} + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 2{,}5\right] = 4\frac{5}{24} > 4\frac{1}{6}.$$

Поскольку социальный эффект опять увеличился, необходимо проверить случай *n = 5*. Имеем:

$$p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}3;\ p_4 = 0{,}4;\ p_5 = 0{,}5;$$

$$b_1 = 1/15;\ b_2 = 2/15;\ b_3 = 1/5;\ b_1 = 4/15;\ b_2 = 1/3;$$

$$a_1^0 = \frac{1+3b_1}{8} = \frac{6}{40};\ a_2^0 = \frac{7}{40};\ a_3^0 = \frac{8}{40};\ a_4^0 = \frac{9}{40};\ a_5^0 = \frac{10}{40}.$$

Условие (4) не выполняется для пятой фирмы. Поэтому оптимальное решение включает четыре фирмы-претендента с суммарным социальным эффектом $4^5/_{24}$. За счет выбора оптимального механизма смешанного финансирования удалось увеличить социальный эффект примерно на 25% при том же объеме бюджетного финансирования.

Рассмотрим теперь нелинейный случай. Примем, что эффект от реализации проектов для *i*-ой фирмы составляет

$$(8)\quad j_i(S_i) - y_i = \frac{1}{a} S_i^a r_i^{1-a},\ 0 < a < 1.$$

В этом случае интересы фирмы описываются выражением

$$(9)\quad j_i(S_i) - y_i = \frac{1}{a} S_i^a r_i^{1-a} - (S_i - x_i).$$

Проведем анализ механизма прямых приоритетов

$$p_i(S) = \frac{S_i}{\sum_j S_j}.$$

Примем, что имеет место гипотеза слабого влияния, согласно которой фирмы не учитывают влияния своей заявки на общий множитель $\left(\sum s_j\right)^{-1}$. В этом случае равновесная заявка *i*-ой фирмы определяется из условия

$$(10)\quad \left(\frac{r_i}{S_i}\right)^{1-a} = 1 - \frac{1}{S}$$

или

$$(11)\quad S_i = r_i \left(1 - \frac{1}{S}\right)^{-\frac{1}{1-a}},$$

где S определяется из уравнения

$$(12)\quad H = S\left(1 - \frac{1}{S}\right)^{\frac{1}{1-a}},\ H = \sum_j r_j.$$

Нетрудно видеть, что уравнение (12) всегда имеет единственное решение $S^* > 1$. Покажем, что всегда имеет место $S^* > H$. Это следует из очевидного неравенства в случае $H > 1$:

$$\left(1 - \frac{1}{H}\right)^{\frac{1}{1-a}} < 1 \cdot$$

Таким образом, механизм смешанного финансирования обеспечивает привлечение средств частных фирм большее, чем в случае непосредственного финансирования фирмами проектов. Действительно, при непосредственном финансировании фирма i получает максимум прибыли при объеме финансирования $S_i = r_i$. Поэтому суммарное привлечение средств частных фирм в случае прямого финансирования составит ровно H.

Интересно оценить отношение $u = S / H$ в зависимости от параметра a. Делая в (12) замену переменных $S = u\,H$, получим уравнение для u:

(13) $$u\left(1 - \frac{1}{uH}\right)^{\frac{1}{1-a}} = 1 \cdot$$

Анализ этого уравнения показывает, что с ростом a растет u. Таким образом, эффект от механизма смешанного финансирования тем больше, чем больше параметр a в функциях эффекта фирм.

Рассмотрим теперь задачу выбора оптимального механизма смешанного финансирования для линейного случая на множестве механизмов смешанного финансирования следующего вида:

(14) $$p_i(S) = \frac{S_i^b}{\sum_j S_j^b},\ i = \overline{1,n}\ .$$

Прибыль фирмы в этом случае будет равна

(15) $$j_i(S_i) - \left(S_i - p_i(S)\right) = a_i S_i - \left(S_i - \frac{S_i^b}{\sum_j S_j^b} \right).$$

Равновесная заявка определяется из системы уравнений

(16) $$\frac{b\ S_i^{b-1}}{\sum_j S_j^b} = 1 - a_i,\ i = \overline{1,n}\ .$$

В данном случае мы также предполагаем выполненной гипотезу слабого влияния. Из (16) получаем: $S_i = \left[\frac{1}{b}(1-a_i)\sum_j S_j^b \right]^{\frac{1}{b-1}}$,

где $S(b) = \sum_j S_j^b$ определяется из уравнения

$$S(b) = \left[\frac{1}{b} S(b) \right]^{\frac{b}{b-1}} \sum_{j=1}^{n} (1-a_j)^{\frac{b}{b-1}} .$$

Имеем $S(b) = b\left[\sum_{j=1}^{n} (1-a_j)^{\frac{b}{b-1}} \right]^{-b-1}$. Окончательно получаем

$$S_i = b\ \frac{(1-a_i)^{\frac{1}{b-1}}}{\sum_j (1-a_i)^{\frac{b}{b-1}}} .$$

Суммарное финансирование проектов всеми фирмами составит $S = b\ \frac{\sum_j (1-a_i)^{\frac{1}{b-1}}}{\sum_j (1-a_i)^{\frac{b}{b-1}}}$. В случае, если все фирмы одинаковы, то есть $a_i = a,\ i = \overline{1,n}$, имеем: $S = \frac{b}{1-a}$, то есть с ростом b растет и суммарное финансирование. Отсюда следует, что оптимальный механизм по сути дела соответствует конкурсному механизму, когда в первую очередь средства выделяются фирме, предложившей максимальную заявку. Заметим, что проведенный анализ не учитывал важного практического ограничения, когда фирма получает финансирование не более заявленного. Анализ при учете этого условия, так же, как и анализ случая разных фирм, является более сложным и требует дополнительных исследований.

10. ПРОТИВОЗАТРАТНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

В настоящем разделе рассматривается класс финансовых механизмов, используя которые центр может эффективно управлять агентами-монополистами.

Противозатратными называются такие механизмы управления, которые побуждают каждого агента максимально повышать эффективность своей деятельности, выполнять соответствующую работу (задания) с высоким качеством и минимальными затратами. Понятно, что в случае большого числа более или менее однородных агентов, конкуренция между ними не позволит каждому отдельно взятому агенту завышать себестоимость продукции и цену. В случае наличия монополистов необходимо использовать специальные механизмы управления, обеспечивающие невыгодность завышения затрат.

В основе использования противозатратных механизмов лежит следующая общая идея. Предположим, что целевая функция агента зависит от переменных двух типов: переменные первого типа – параметры, выбираемые самим агентом (например, затраты живого и общественного труда, объем выпуска и т.д.); переменные второго типа – параметры, устанавливаемые центром (например, норматив рентабельности, коэффициенты ценообразования и т.д.). Задача центра заключается в выборе таких значений параметров второго типа, чтобы целевая функция агента вела себя требуемым образом (например, возрастала или убывала по соответствующим параметрам первого типа).

Рассмотрим в качестве примера задачу синтеза противозатратного механизма ценообразования. Себестоимость продукции, производимой агентом

(1) $C = S + a$,

складывается из затрат живого труда – a (трудозатраты) и затрат общественного труда – S (материальные затраты, включающие затраты на материалы, амортизацию оборудования т.д.). Цена продукции определяется

(2) $Ц = (1 + r)\ C$,

где r – норматив рентабельности. Прибыль агента:

(3) $П = Ц – C = r\ C$.

Отметим, что условия (1)-(3) записаны для единицы продукции. В предположении постоянства дохода на масштаб производства эти выражения справедливы для любого объема выпуска.

Если бы центр имел в своем распоряжении некоторый «прибор», точно определяющий *минимально необходимые затраты* (МНЗ) на производство единицы продукции, то задача ценообразования была бы решена. Однако, МНЗ известны только агенту, и он, в силу активности, может сообщить себестоимость, превышающую МНЗ, так как при постоянном нормативе рентабельности r агент заинтересован в завышении себестоимости. Значит, в рассматриваемом примере агент заинтересован в завышении себестоимости, то есть механизм не обладает свойством противозатратности. Для того, чтобы добиться противозатратности, можно, например, сделать норматив рентабельности зависящим от эффективности деятельности агента. Что понимать под эффективностью агента?

Будем считать, что продукт, производимый агентом (отметим, что этот продукт может быть как материальным продуктом, так и интеллектуальной продукцией или услугой), характеризуется себестоимостью производства C, устанавливаемой агентом, и эффектом $\boldsymbol{l}$, определяемым потребителем или центром. Понятно, что эффективность должна расти с ростом эффекта и убывать с ростом себестоимости. Одной из простейших зависимостей, удовлетворяющих этим требованиям, является:

(4) $Э = \mathbf{l} / C$.

Выберем $r = r(Э)$ и определим, какова должна быть зависимость $r(x)$, чтобы механизм обладал свойством противозатратности. Для этого необходимо, чтобы прибыль $П$ агента убывала с ростом затрат, то есть выполнялось:

(5) $\dfrac{dП}{dC} \leq 0.$

В то же время, цена продукции должна расти с ростом себестоимости, то есть должно выполняться:

(6) $\dfrac{dЦ}{dC} \geq 0.$

Условия (5)-(6) называются *условиями противозатратности*. Раскрыв их, можно получить следующие ограничения:

$$(7)\ 0 < Э\frac{dr(Э)}{dЭ} - r(Э) < 1.$$

Накладывая ограничение $r(1) = 0$ (продукт, для которого эффект равен затратам, не должен приносить прибыли), получим общий вид зависимости, обеспечивающей противозатратность (по прибыли) механизма ценообразования:

$$(8)\ r(Э) = Э\int_1^Э \frac{h(x)}{x^2}dx,$$

где $h(x)$ – произвольная функция, принимающая значения в интервале (0; 1). Чем ближе $h(x)$ к нулю, тем сильнее влияет уменьшение затрат на снижение цены и тем слабее влияет уменьшение затрат на рост прибыли. Наоборот, чем ближе $h(x)$ к единице, тем слабее влияет уменьшение затрат на снижение цены, но тем сильнее влияет уменьшение затрат на рост прибыли агента. Поэтому в каждом конкретном случае центр должен подбирать соответствующую зависимость.

Мы рассмотрели один из противозатратных механизмов (противозатратный по прибыли механизм ценообразования). Перечислим некоторые другие возможные случаи.

Полученные выше выводы справедливы для плановых показателей (прибыли, фонда материального поощрения и т.д.). Если фактические доходы формируются по рассмотренным нормативам, то затратные тенденции сохраняются. Для исключения этих тенденций необходимо вводить отдельный норматив отчислений в фонд материального поощрения от сверхплановой прибыли.

Подбором нормативов можно также добиться устранения номенклатурного сдвига (при одной и той же себестоимости, но различных соотношениях трудовых и общественных затрат).

Если фонд оплаты труда складывается из фонда заработной платы ($a\ П$, где a – некоторый коэффициент) и фонда материального поощрения ($b\ П$, где b – некоторый коэффициент), то даже при постоянном коэффициенте r, противозатратность может быть достигнута путем установления переменного коэффициента $\beta = b(\boldsymbol{l} / C)$.

В случае образования прибыли от трудозатрат, когда в отличие от (1)-(3), $Ц = (1 + r(Э))\ a + S$, $П = r(Э)$, а противозатратный механизм строится аналогичным образом.

Во многих не рассмотренных выше случаях при снижении затрат экономия трудовых и материальных ресурсов может быть использована для дальнейшего увеличения производства (например, объема выпуска продукции), то есть для получения дополнительной прибыли.

Требование противозатратности по оплате труда, то есть требование возрастания фонда оплаты труда при уменьшении затрат, является достаточно сильным. На самом деле, для создания противозатратного эффекта важно, чтобы при уменьшении затрат увеличивался не фонд оплаты в целом, а оплата труда тех работников, которые обеспечили это снижение затрат. Оказывается, возможно создать сильно противозатратный механизм управления, при использовании которого эффективно трудящиеся работники нетерпимы к присутствию лентяев и бездельников.

Рассмотренные выше механизмы конкурсного распределения ресурса обладают тем качеством, что конкурсность существенно усиливает противозатратные свойства механизма. Существует точка зрения, что конкурсные механизмы, например, формирования договорных цен, являются альтернативными противозатратным механизмам, описанным выше в настоящем разделе. Такая точка зрения ошибочна. На самом деле, конкурсные механизмы эффективно работают в случае «претендентов равной силы» и при наличии монополистов могут оказаться не очень эффективными (см. пятый раздел). Поэтому конкурсные и противозатратные механизмы (ориентированные именно на монопольную ситуацию) являются не исключающими, а, скорее, взаимодополняющими друг друга. Противозатратные механизмы играют антимонопольную роль, «включаясь» при наличии монополиста и «отключаясь» при эффективной работе конкурсных механизмов. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим следующий пример.

Пусть центр организует конкурс между m агентами на выполнение проекта эффективностью (с полезным эффектом) L. Обозначим C_i – себестоимость работ i-го агента. Будем считать, что агенты заинтересованы в максимизации прибыли и что задана противозатратная по прибыли процедура формирования цены:

(9) $Ц_i = (1 + r(Э_i))\, C_i$, $Э_i = L / C_i$, $i = \overline{1,m}$.

Обозначим x_i – гарантированный норматив рентабельности i-го агента (агент может найти другие договора, обеспечивающие ему прибыль не меньше x_i на каждую единицу затрат). Очевидно, агенту выгодно браться за работу, если ее цена окажется не меньше, чем $A_i = (1 + x_i)\, C_i$. Будем считать, что $r_i(Э_i) > x_i$, $i = \overline{1,m}$, то есть заключение договора с центром выгодно всем агентам. Если бы был один агент-монополист (например, с номером i), то, очевидно, договор был бы заключен по цене b_i. В случае нескольких агентов они начинают соревноваться. Пусть агенты упорядочены по возрастанию A_i, то есть: A_1 £ A_2 £ ... £ A_m.

Легко показать, что победителем конкурса будет первый агент (имеющий минимальную цену $\{A_i\}$), причем цена определяется выражением

(10) $Ц^* = \min\{Ц_1; A_2\}$.

Действительно, если $Ц_1$ £ A_2, то при цене $Ц^*$ остальным агентам договор по этой цене невыгоден (первый агент является монополистом и «работает» противозатратная часть механизма). В более сложной ситуации, когда организуется конкурс на выполнение нескольких проектов, в равновесии договорные цены победителей конкурса определяются по аналогии с (10).

11. МЕХАНИЗМЫ САМООКУПАЕМОСТИ

Одной из задач, стоящих перед руководством организации или проекта, является минимизация затрат на выпуск продукции или реализацию проекта. Если технология производства или проект включают n операций и заданы их стоимости $\{b_i\}_{i=1}^{n}$, то общие затраты равны $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Отметим, что величина b не зависит от порядка выполнения операций.

Если центр имеет в своем распоряжении на момент начала проекта сумму R_0 и R_0 ³ b, то имеющихся средств хватит на выполнение всех операций в любой допустимой последовательности. Если же $R_0 < b$, то возникает задача разработки *механизма самоокупаемости* (самофинансирования), определяющего оптимальную допустимую последовательность выполнения операций, в которой выполнение операций частично финансируется за счет доходов от уже выполненных операций.

Пусть *i*-я операция описывается кортежем (b_i, a_i, t_i), где a_i ³ *0* – доход от *i*-ой операции, t_i – ее продолжительность. Будем различать прибыльные (a_i ³ b_i) и убыточные ($a_i < b_i$) операции. Тогда, в случае нехватки исходных средств, некоторые операции могут выполняться за счет доходов от уже выполненных операций. Идеалом, в некотором смысле, является полностью автономная совокупность операций (проект), для которой самофинансирование позволяет выполнить их целиком, без привлечения внешних источников.

Для простоты предположим, что не существует технологических ограничений на последовательность выполнения операций – каждая операция может начинаться в момент окончания другой операции, причем произвольное число операций может вестись параллельно.

Обозначим t_i ³ *0* – время начала *i*-ой операции, *R* – величину заемных средств. Предположим, что центр может получить беспроцентные кредиты в любом объеме и в произвольный момент времени (дисконтирование отсутствует).

Финансовый баланс в момент времени *t* имеет вид:

$$(1)\quad f(t) = R_0 + R - \sum_{i=1}^{n} b_i I(t \geq t_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i I(t \geq T_i + t_i),$$

где $I(t \geq t_i) = \begin{cases} 1, & t \geq t_i \\ 0, & t < t_i \end{cases}$ – функция-индикатор.

Понятно, что для возможности выполнения операций финансовый баланс должен быть неотрицательным в любой момент времени, то есть для допустимого баланса должно выполняться *f*(*t*) ³ *0* " *t* Î [*0*, *t*], где *t* – общее время выполнения комплекса операций (проекта).

В рамках описанной модели возникает целый ряд оптимизационных задач.

Например, можно решать задачу выбора последовательности выполнения операций (то есть времен начала их выполнения), минимизирующей суммарную величину привлеченных средств:

$$(2)\quad \begin{cases} R \to \min\limits_{\{t_i\}} \\ f(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases}.$$

Может быть поставлена задача минимизации времени выполнения проекта $T = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{t_i + t_i\}$ только за счет собственных средств, или с фиксированным значением привлеченных средств (отметим, что при последовательном выполнении операций время завершения проекта не зависит от порядка выполнения операций):

$$(3)\ \begin{cases} T \to \min\limits_{\{t_i\}} \\ R = const, \quad f(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases}.$$

Таким образом, возможны самые разные постановки. Во всех оптимизационных задачах требуется найти оптимальную последовательность выполнения операций, то есть оптимальный механизм самофинансирования. При введении дисконтирования, по аналогии с (3), можно максимизировать конечную (дисконтированную) прибыль и т.д. При наличии технологических ограничений, они должны быть добавлены в ограничения задач (2)-(3).

Следует отметить, что на сегодняшний день не существует универсальных и эффективных методов решения задач из рассматриваемого класса. Понятно, что, так как число допустимых вариантов (последовательностей) конечно, то все они могут быть найдены простым перебором. Однако, даже при не очень большом числе операций (порядка нескольких десятков) простой перебор оказывается чрезвычайно трудоемким. Поэтому при решении задач сетевого планирования используют методы целенаправленного перебора, ветвей и границ и др. Рассмотрим в качестве примера использование для решения задачи (3) следующего эвристического алгоритма.

1. Определяем все комбинации операций, которые могут быть начаты (являются допустимыми с точки зрения бюджетного ограничения) в нулевой момент времени.

2. Для каждого из допустимых вариантов определяем в момент окончания одной из операций, какие из еще невыполненных операций могут быть начаты. Если ни одна из операций не может быть начата, то для данного варианта ждем момента окончания следующей операции и т.д. до тех пор, пока все операции не закончатся и/или ни одна не сможет быть начата.

Применение шагов 1 и 2 дает все допустимые с точки зрения балансового ограничения варианты (получаем дерево вариантов). Среди висячих вершин могут оказаться и те, которым соответствует выполнение не всех операций. Сравнивая продолжительности тех вариантов – висячих вершин, которые соответствуют выполнению всех операций проекта, определяем решение задачи (3) – варианты минимальной продолжительности.

В общем случае описанный выше алгоритм менее трудоемок, чем простой перебор, так как сразу отсеиваются неудовлетворительные варианты и не рассматриваются деревья, для которых они являются корневыми вариантами. Можно предложить и другие эвристические алгоритмы численного решения задачи (3), быстродействие которых зависит от соотношения исходных параметров.

Аналитические методы получения оптимального решения существуют лишь для задачи (2), алгоритм решения которой описывается ниже.

Рассмотрим $(n+1)$-вершинный граф, в котором вершины $1, 2, \dots, n$ соответствуют операциям, вершина 0 – нулевая операция. Предположим, что с нулевой вершины начинается реализация проекта, ее затраты и доход равны 0 $(a_0 = 0)$. Пусть $m = (0, i_1, i_2, \dots, i_n, 0)$ – произвольный *гамильтонов контур*, то есть контур, проходящий через все вершины графа ровно один раз.

Обозначим $M_j(m) = \sum_{k=1}^{j} \left(b_{i_k} - a_{i_{k-1}} \right)$ – сумму длин первых j дуг контура m. Заход некоторой дуги в вершину i $(i = \overline{1,n})$ требует затрат b_i, исход дуги из вершины i соответствует получению дохода a_i. Так как в рассматриваемой модели все операции могут выполняться одновременно (не существует технологических ограничений на последовательность их выполнения), то, очевидно, минимуму привлеченных средств будет соответствовать последовательное выполнение операций (время реализации всего проекта при этом равно $T = \sum_{i=1}^{n} t_i$), а граф, построенный для нашей задачи, будет полным и симметричным.

Таким образом, задача свелась к определению оптимальной последовательности выполнения операций, то есть такой последовательности, при которой величина привлеченных средств будет минимальной. Последовательному выполнению всех операций (ни одна из операций не выполняется дважды) соответствует некоторый гамильтонов контур. Если под длиной дуги $\boldsymbol{l}_{ij}$ понимать разность между затратами на выполнение j-ой операции и доходом от i-ой операции, то есть $\boldsymbol{l}_{ij} = b_j - a_i$, то легко видеть, что полученный граф является псевдопотенциальным. Действительно, любой гамильтонов контур соответствует выполнению всех операций. Независимо от последовательности суммирования длин дуг, получим инвариантную (не зависящую от последовательности, то есть контура) величину $\left(b - \sum_{i=1}^{n} a_i \right)$. Тогда величина $M_j(m)$ есть взятый с обратным чистый доход от выполнения первых $(j - 1)$ операций контура m и начала j-ой операции.

С другой стороны, $M_j(m)$ может интерпретироваться как нехватка собственных средств на выполнение j-ой (в контуре m) операции. Если $M_j(m) > 0$, то именно такую величину придется занимать у третьей стороны. Если $M_j(m)$ £ 0, то собственных средств центра хватает на выполнение j-ой операции.

Предположим теперь, что задача центра заключается в определении последовательности выполнения операций, при которой максимальная величина однократного заема внешних средств минимальна при условии, что собственные средства отсутствуют (то есть $R_0 = 0$). Формально эту задачу можно представить в следующем виде: определить гамильтонов контур m, имеющий минимальное значение $M(m) = \max_{j=\overline{1,n}} M_j(m)$.

Решение этой задачи дается следующей теоремой: существует оптимальное решение задачи

(4) $M(m)$ ® $\min_{m}$,

в котором сначала идут вершины с g_i ³ 0 в порядке возрастания величин b_i, а затем вершины с g_i £ 0 в порядке убывания величин a_i.

Обозначим $M_{min} = \min_{m} M(m)$, а $m = (0, i_1, i_2, \dots , i_n, 0)$ – оптимальный гамильтонов контур (решение задачи (4)). Тогда для него имеет место следующая система неравенств:

$$
(5)\quad \begin{cases} M_{min} \geq b_{i_1} \\ M_{min} + g_{i_1} \geq b_{i_2} \\ M_{min} + g_{i_1} + g_{i_2} \geq b_{i_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ M_{min} + g_{i_1} + \dots + g_{i_{n-1}} \geq b_i \end{cases} ,
$$

причем

$$
(6)\quad M_{\min} = \max\left[b_{i_1}, \max_{1 \le k < n}\left(b_{i_{k+1}} - \sum_{j=1}^{k} g_{i_j} \right) \right].
$$

Система неравенств (5) и выражение (6) могут интерпретироваться следующим образом. Первое неравенство утверждает, что минимальная величина привлеченных средств не может быть меньше, чем затраты на операцию, выполняемую первой. Действительно, мы предположили, что величина собственных средств равна нулю (если она не равна нулю, то на нее уменьшится M_{min}). Следовательно, на первую операцию придется затратить b_{i_1}, так как никакие операции еще не выполнялись (нет доходов от их выполнения). Второе неравенство требует, чтобы затраты b_{i_2} на выполнение второй операции были меньше, чем заемные средства M_{min} плюс доход от выполнения первой операции g_{i_1} (и т.д. для всех операций).

Итак, **оптимальное решение** имеет следующую структуру:

- упорядочим прибыльные операции (для которых g_i ³ 0) в порядке возрастания затрат (величин b_i) и включим их в последовательность (гамильтонов контур);

- добавим к полученной последовательности убыточные операции (для которых g_i £ 0) в порядке убывания доходов (величин a_i).

Таким образом, оптимальной является следующая последовательность: выполнять сначала прибыльные операции в порядке возрастания затрат (сначала более дешевые и т.д.), затем выполнять убыточные операции в порядке убывания дохода (сначала – приносящие наибольший доход, и т.д.).

Минимальная величина заемных средств при этом определяется выражением (6). Содержательная интерпретация этого выражения следующая: как минимум, придется занимать либо величину затрат первой операции (если при этом дохода от нее и последующих операций будет хватать на реализацию невыполненных или если заем не будет превосходить b_{i_1}), либо максимум по остальным операциям из нехватки собственных средств на их выполнение.

Найденное решение минимизирует максимальную величину однократного заема. Суммарная же величина заемных средств при использовании полученного решения равна (при $R_0 = 0$):

$$R = b_{i_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \max\left(b_{i_{k+1}} - \sum_{j=1}^{k} g_j, 0 \right).$$

Итак, мы нашли последовательность выполнения операций, минимизирующую максимальную величину внешнего займа. Легко показать, что найденное решение (последовательность выполнения операций) минимизирует также суммарную величину привлеченных средств.

12. МЕХАНИЗМЫ СТРАХОВАНИЯ

Прежде чем рассматривать механизмы страхования, опишем основные известные способы учета отношения людей к риску. Пусть некоторому индивидууму предлагают вложить деньги с высокой доходностью, но и с высоким риском. Предположим, что p – вероятность неполучения дохода (доход равен нулю), $(1 - p)$ – вероятность получения дохода x. Ожидаемый доход составит, очевидно, $Ex = (1 - p)\, x$. Зададимся вопросом – какую сумму x_0 индивидуум готов заплатить за участие в такой лотерее?

Принято условно разделять субъектов на три группы:

- *нейтральные к риску* (risk-neutral) – готовые участвовать в лотерее за ожидаемый выигрыш, то есть $x_0 = (1 - p)\, x$;
- *несклонные к риску* (risk-averse) – готовые внести за участие в лотерее сумму строго меньшую ожидаемого дохода, то есть $x_0 < (1 - p)\, x$;

- *склонные к риску* – готовые участвовать в лотерее даже при условии, что ожидаемый выигрыш меньше их взноса, то есть $x_0 > (1 - p)\,x$.

Примерные графики зависимости $x_0(x)$ для нейтральных, склонных и несклонных к риску людей приведены на рисунке 20.

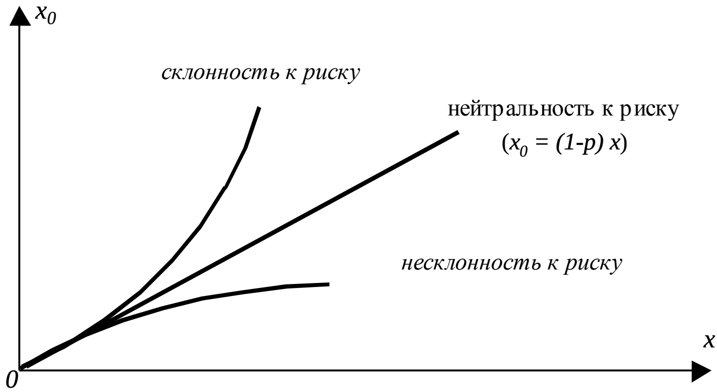

Рис. 20. Зависимость взноса от выигрыша

Числовой характеристикой предпочтений людей на множестве альтернатив, зависящих от случайных величин, выступает полезность. Если обозначить: x – альтернативу (например, размер денежного выигрыша в лотерее), $u(x)$ – функцию полезности, определенную на множестве альтернатив, то люди, нейтральные к риску, имеют линейные функции полезности ($u' = Const > 0$, $u'' = 0$; полезность определяется с точностью до монотонного линейного преобразования), склонные к риску – выпуклые ($u' > 0$, $u'' > 0$), а несклонные – вогнутые ($u' > 0$, $u'' < 0$) функции полезности.

Графическая интерпретация функций полезности субъектов, имеющих различное отношение к риску, позволяет привести следующий пример. Представим себе, что субъект обладает некоторой суммой денег M_0, и ему предлагают принять участие в лотерее, в которой он с равными вероятностями выигрывает сумму DM и проигрывает такую же сумму. Если функция полезности линейна ($u(x) = x$), то прирост полезности от выигрыша $Du_1 = DM$ по абсолютной величине равен уменьшению полезности от проигрыша $Du_2 = DM$ – субъект нейтрален к риску. Если же функция полезности вогнута, то прирост полезности Du_1 от выигрыша по абсолютной величине строго меньше уменьшения полезности Du_2 при проигрыше – субъект с такой функцией полезности предпочтет не рисковать (не станет принимать участие в рассматриваемой лотерее). Аналогично, для субъекта, склонного к риску (имеющего выпуклую функцию полезности), прирост полезности от выигрыша превысит уменьшение полезности при проигрыше.

Таким образом, вид функции полезности отражает «глобальное»[1] отношение к риску. Известны (и подтверждены многочисленными исследованиями) следующие факты: коммерческие лотереи, рискованные финансовые операции и т.д. рассчитаны на людей, склонных к риску; *страхователи*, как правило, не склонны к риску и получают от «передачи» *страховщику* своего риска гораздо большую «полезность», чем просто компенсацию ожидаемых потерь, упущенного дохода и т.д.; страховщики, в большинстве случаев, нейтральны к риску (снижение рисков у страховщиков достигается за счет агрегирования большого числа мелких рисков и их диверсификации).

Рассмотрим некоторые свойства механизмов страхования, возникающие как следствие активного поведения страхователей (агентов) и/или страховщика (центра).

Основная цель страхования заключается в перераспределении рисков – если у нескольких экономических объектов/субъектов существует небольшой риск возникновения страхового случая, при котором они несут существенные издержки, то им может оказаться выгодным «объединить усилия» – создать фонд, используемый для возмещения (как правило, частичного) потерь. В роли аккумулятора могут выступать сами экономические объекты (взаимное страхование, имеющее наименьшую коммерческую направленность), государство (государственное страхование) или частные страховые компании (коммерческое страхование).

Страховой случай является недетерминированной величиной, и даже при известном распределении вероятностей, несмотря на использование в моделях страхования ожидаемых значений, вероятность разорения страховщика при работе с малым числом одно-

---

[1] *Распространенной «локальной» (дифференциальной) характеристикой отношения к риску является логарифмическая производная производной функции полезности, взятая с обратным знаком.*

родных страхователей выше, чем при страховании многих. Это очевидное свойство – увеличение стабильности страхового портфеля с ростом числа страхователей у одного и того же страховщика, лежит, фактически, в основе всего страхового дела.

При анализе моделей теории контрактов был сделан вывод, заключающийся в том, что при нейтральных к риску страховщике и страхователе страхование, как таковое, теряет смысл – страхователь отдает в страховой фонд столько, сколько из него и получает (при этом может нарушиться требование обязательной полной компенсации ущерба и необходимо использовать другие механизмы определения страхового взноса). Приведем иллюстрирующий это утверждение пример.

Рассмотрим набор $I = \{1, 2, ..., n\}$ страхователей у которых страховые случаи независимы и происходят с вероятностями $\{p_i\}$. Соответственно может произойти один страховой случай, два и т.д. до n.

Обозначим H_i – доход i-го страхователя в благоприятной ситуации, доход равен нулю при страховом случае, r_i – страховой взнос, h_i – страховое возмещение, p_i – вероятность наступления страхового случая, c_i – затраты.

Тогда ожидаемое значение целевой функции i-го страхователя имеет вид:

(1) $f_i = (1 - p_i)H_i + p_i h_i - c_i - r_i,\ i \in I.$

Страховщик получает в свой фонд сумму $\sum_{i=1}^{n} r_i = \tilde{R}$ и выплачивает в среднем $R = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i$. Определим, каким требованиям должен удовлетворять механизм страхования.

1. Система страхования не должна побуждать страхователя «способствовать» наступлению страхового случая (например, страховое возмещение в случае пожара не должно превышать стоимости сгоревшего объекта и т.д.). Это значит, что в благоприятном случае целевая функция страхователя должна принимать большее значение, чем в страховом, то есть $h_i \le H_i,\ i \in I$.

Введенное ограничение отражает свойство *морального риска* (moral hazard), учет которого необходим при исследовании механизмов страхования. Действительно, людям свойственно изменять свое поведение, избавившись от риска (точнее – переложив его на плечи других людей или организаций). Так, например, человек, застраховавший свою машину от угона, станет менее внимателен к ее безопасности; человек, застраховавший свою дачу от пожара, вряд ли будет покупать новые огнетушители и т.д.

Второе свойство, характерное для механизмов страхования – проблема *некорректного отбора* (adverse selection): потенциальные страхователи могут обладать информацией, недоступной для страховщика. Так, например, страхование от несчастного случая гораздо более привлекательно для человека рассеянного и забывчивого, чем для аккуратного и внимательного.

2. Страхование должно иметь смысл для страхователя, то есть (более слабое условие суммарного баланса приведено ниже):

$$r_i \leq p_i \; h_i \;, i \in I.$$

3. Потребуем, чтобы значения целевых функций страхователей в любой ситуации были неотрицательны:

$$H_i - c_i - r_i \geq 0, \;\; h_i - c_i - r_i \geq 0, \;\; i \in I.$$

4. Страхование должно иметь смысл для страховщика, то есть:

$$(2) \;\; \sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n} h_i \, p_i \geq 0 \,.$$

Последнее условие означает, что ожидаемые страховые выплаты не должны превосходить суммы страховых взносов. Это, однако, не гарантирует защищенности страховщика от разорения. К четвертому ограничению можно добавить условие того, что вероятность выплат, превосходящих страховой фонд не должна превышать некоторой, наперед заданной, достаточно малой величины. Отметим также, что нулевое значение в правой части неравенства соответствует взаимному страхованию (нагрузки к неттоставкам минимальны – равны нулю). В случае коммерческого страхования страховщик должен обеспечить средства для собственной деятельности, то есть получить ненулевой ожидаемый доход.

Если страховщик, как это часто делается на практике, устанавливает единые для всех страхователей условия страхования, то можно ввести норматив $a \geq 0$ отчислений в страховой фонд: $r_i = a \, h_i$ и норматив $b \geq 0$ страхового возмещения $h_i = b \, H_i$, $i \in I$. Тогда ограничения пунктов 1 – 4 примут вид:

$$
(3)\quad \begin{cases} b \le 1 \\ b - 1 \ge \dfrac{c_i}{H_i} \\ a \le 1 - \max\limits_i \left\{ \dfrac{c_i}{H_i} \right\} \\ a \le b \cdot \min\limits_i \{ p_i \} \\ a \sum\limits_{i=1}^{n} H_i \ge b \sum\limits_{i=1}^{n} p_i h_i \end{cases} .
$$

Можно показать, что для рассматриваемого класса механизмов область допустимых механизмов страхования, описываемая системой неравенств (3), может оказаться пуста. Кроме того, если взять, например, двух страхователей с одинаковыми доходами, но с существенно разными рисками, то и взносы и возмещение будут одинаковы, что вряд ли справедливо по отношению к страхователю с меньшим уровнем риска. Значит следует рассмотреть механизм, в котором страховой взнос зависит и от риска.

Рассмотренные выше модели объединяет одно свойство: в целевых функциях страхователя и страховщика используются ожидаемые значения, и неявно предполагая, что все участники организационной системы (страховщик и страхователи) при выборе стратегии своего поведения ориентируются именно на усредненные значения. Откажемся от этого предположения и рассмотрим случай, когда страхователи несклонны к риску.

Опишем модель с одним страхователем и одним страховщиком. Пусть страхователь не склонен к риску и имеет строго монотонно возрастающую непрерывно дифференцируемую вогнутую функцию полезности $u(\cdot)$, а страховщик нейтрален к риску и имеет линейную функцию полезности.

Предположим, что возможны два значения дохода $x \in R^1$ страхователя: $0 < x_1 < x_2$, реализующиеся, соответственно, с вероятностями $(1 - p)$ и p ($p \in [0; 1]$), то есть вероятность наступления страхового случая (который заключается в получении страхователем меньшего дохода) равна $(1 - p)$. Ожидаемая полезность центра имеет вид:

(4) $\Phi = r - h(1 - p)$,

где r ³ 0 – страховой взнос, h ³ 0 – страховое возмещение. В случае заключения страхового контракта страхователь либо получает доход: $\tilde{x}_1 = x_1 - r + h$ – при наступлении страхового случая, либо доход: $\tilde{x}_2 = x_2 - r$ – если страхового случая не происходит.

Ожидаемая полезность страхователя без заключения страхового контракта равна: $U = u(x_1)(1 - p) + u(x_2)p$, а при заключении страхового контракта: $\tilde{U} = u(\tilde{x}_1)(1 - p) + u(\tilde{x}_2)p$.

Будем считать, что центр заключает страховой контракт только в том случае, если этот контракт обеспечивает ему некоторую неотрицательную ожидаемую полезность H, то есть $\Phi = H > 0$ (условие участия).

Под некоммерческим страхованием будем понимать страхование, при котором ожидаемая полезность страховщика в точности равна нулю, то есть $H = 0$. Под коммерческим страхованием будем понимать страхование, обеспечивающее страховщику строго положительное значение ожидаемой полезности.

Страховой контракт в рассматриваемой модели описывается кортежем $\{h, r, H, x_1, x_2, p, u(x)\}$, причем параметры x_1, x_2, p, $u(x)$ являются параметрами собственно страхователя, а h, r и H (или, что тоже самое $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$) – параметры механизма страхования, выбираемые страховщиком.

Под *допустимым страховым контрактом* понимают такой набор неотрицательных чисел $\{h, r, H\}$, что выполняется Φ ³ H и страхование выгодно для страхователя, то есть допустимым является страховой контракт, выгодный и для страховщика, и для страхователя. Последнее условие означает, что в случае заключения страхового контракта, предлагаемого страховщиком, ожидаемая полезность страхователя будет не меньше, чем без участия в данном контракте (или в более общем случае, чем при участии в другом контракте).

Найдем ограничения на параметры страхового контракта, то есть область возможных значений (h, H), при которых страхование выгодно для страхователя. Подставляя условие $\Phi = H$ в целевую функцию центра, выразим величину страхового взноса через страховое возмещение и ожидаемый доход страховщика. Получим

(5) $\tilde{x}_1 = x_1 + ph - H$,

(6) $\tilde{x}_2 = x_2 - (1 - p)\,h - H$.

Вычислим ожидаемые значения дохода страхователя: $Ex = (1 - p)x_1 + px_2$ – без заключения страхового контракта; $E\tilde{x} = (1 - p)\tilde{x}_1 + p\tilde{x}_2$ – при заключении страхового контракта.

Легко видеть, что $E\tilde{x} = Ex - H$. Введем в рассмотрение следующие функции и величины (при $Dx = x_1 - x_2 = 0$, как и при $h = Dx$ задача вырождается):

$$U(x) = \frac{[u(x_2) - u(x_1)]x + u(x_1)x_2 - u(x_2)x_1}{x_2 - x_1}, \;\; x \in [x_1, x_2];$$

$$\tilde{U}(x) = \frac{[u(\tilde{x}_2) - u(\tilde{x}_1)]x + u(\tilde{x}_1)\tilde{x}_2 - u(\tilde{x}_2)\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1}, \;\; x \in [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2];$$

$x'(p) = \max\{x \in R^1 | u(x) \le U(Ex)\} = u^{-1}(U)$, где $u^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к функции полезности страхователя. Так как Ex Î $[x_1; x_2]$, то в силу вогнутости функции полезности " p Î $[0; 1]$ $x'(p) \in [x_1; Ex]$. Содержательно, при $x = Ex$ (соответственно, при $x = E\tilde{x}$) $U(x)$ ($\tilde{U}(x)$) – ожидаемая полезность страхователя от участия в лотерее между альтернативами x_1 и x_2 ($\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$) с вероятностями $(1 - p)$ и p, соответственно.

Величина $Du = u(x) - U(x)$ ³ 0 может интерпретироваться как премия за риск, измеренная в единицах полезности и характеризующая минимальную величину дополнительных гарантированных выплат страхователю, при которой он будет безразличен (с точки зрения ожидаемой полезности) между участием в лотерее и безусловным получением дохода, равного Ex. Положительность Du обусловлена неприятием риска страхователем. Для нейтрального к риску страхователя премия за риск тождественно равна нулю. Если же страхователь склонен к риску, то есть имеет выпуклую функцию полезности, то, повторяя приведенные выше рассуждения, можно сделать вывод, что премия за риск будет неположительна, то есть такой страхователь готов заплатить за возможность участия в лотерее (в общем случае дифференциальной мерой склонности к риску может считаться, например, логарифмическая производная функции полезности). Поэтому $x'(p)$ – действие, эквивалентное (с точки зрения ожидаемой полезности) для страхователя участию в лотерее (см. рисунок 21).

Условие выгодности для страхователя заключения страхового контракта имеет вид:

(7) $\tilde{U}\left(E\tilde{x}\right) \geq U\left(Ex\right)$.

Условие (7), совместно с *Ф ³ H*, является критерием допустимости страхового контракта. Однако, его использование при решении задачи синтеза оптимального страхового контракта достаточно затруднительно – ограничения, накладываемые на параметры механизма могут оказаться чрезвычайно громоздкими. Поэтому приведем простые конструктивные и содержательно интерпретируемые достаточные условия.

Из свойств вогнутых функций следует, что достаточным для выполнения (7) в случае коммерческого страхования является следующая система неравенств:

(8) $x_1 \leq x'\left(p\right) \leq \tilde{x}_1 \leq Ex \leq \tilde{x}_2$;

а в случае некоммерческого страхования достаточно выполнения следующего условия:

(9) $x_1 \leq \tilde{x}_1 \leq Ex \leq \tilde{x}_2 \leq x_2$.

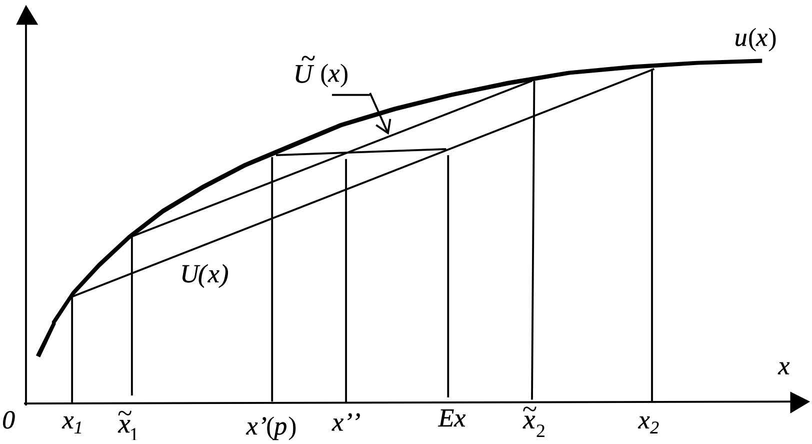

Рис. 21. Полезность и ожидаемая полезность страхователя

Рассмотрим для начала простейший случай – некоммерческое страхование. Для некоммерческого страхования (при $H = 0$) $E\tilde{x} = Ex$. Остальные условия системы неравенств (9) также выполнены, причем для любого механизма (для исключения морального риска, когда наступление страхового случая становится выгодным для страхователя, и обеспечения $\tilde{x}_1$ £ $\tilde{x}_2$, логично потребовать выполнения условия h £ Dx).

Выгодность для страхователя некоммерческого страхования можно обосновать и не прибегая к системе неравенств (8)-(9). Покажем, что имеет место (7). Действительно, независимо от величины страхового возмещения, в силу вогнутости функции $u(x)$ справедлива следующая оценка:

$$\left[u(x_1 + ph) - u(x_1)\right](1 - p) + \left[u(x_2 + h(1 - p)) - u(x_2)\right]p \geq$$
$$\geq p(1 - p)h\left[u'(x_1 + ph) - u'(x_2 - h(1 - p))\right] \geq 0.$$

Таким образом, мы пришли к следующему выводу: в рамках рассматриваемой модели некоммерческое страхование всегда выгодно для нейтрального или склонного к риску страхователя. Это утверждение вполне соответствует интуитивному пониманию страхования как перераспределения риска: при использовании взаимовыгодного механизма некоммерческого страхования страхователь перекладывает на страховщика часть риска, что выгодно им обоим, так как страхователь не склонен к риску, а страховщик нейтрален к риску.

Определим наиболее выгодное для страхователя значение величины страхового возмещения. Из анализа зависимости $\tilde{U}(h)$ следует, что, несмотря на то, что $r = h\,(1 - p)$ и страховой взнос растет с ростом страхового возмещения, оптимальное значение h совпадает с максимально возможным – Dx. При этом $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = E\tilde{x} = Ex$ и страхователь, фактически, исключает неопределенность и получает ожидаемую полезность, равную $u(Ex)$. Очевидно, что $u(Ex)$ ³ $E\,u(x)$, то есть страхование действительно выгодно для страхователя, а страховщик безразличен между участием и неучастием в страховом контракте.

Интересно отметить следующие свойства рассмотренного механизма некоммерческого страхования: параметры механизма (ограничения и оптимальные значения) не зависят от функции полезности страхователя; параметры механизма (ограничения и оптимальные значения) зависят только от Dx и не зависят от величин дохода по отдельности; страховое возмещение не превосходит возможных потерь Dx от наступления страхового случая; при предельном переходе к детерминированной модели имеем: если $Dx = 0$, то $h = r = 0$, если $p = 0$, то $h = r = Dx$, если $p = 1$, то $h = Dx$, $r = 0$ (но страховое возмещение выплачивается с нулевой вероятностью); при фиксированном страховом возмещении величина страхового взноса растет с ростом вероятности наступления страхового случая; при фиксированной вероятности страхового случая величина страхового взноса растет с ростом страхового возмещения; если страхователь нейтрален к риску, то страхование (перераспределение риска с нейтральным к риску центром) не имеет смысла: его ожидаемая полезность одинакова при любых значениях страхового возмещения.

Рассмотрим теперь механизм *коммерческого страхования*. Система неравенств (8) позволяет найти ограничения на величину страхового возмещения в зависимости от ожидаемого дохода страховщика для случая коммерческого страхования. Последовательно учитывая следующие условия: $x_1 \leq \tilde{x}_1$, $\tilde{x}_1 \leq Ex$, $Ex \leq \tilde{x}_2$, получаем:

(10) H £ $p\ h$,

(11) H ³ $p\ [h - Dx]$,

(12) H £ $(1 - p)$x$[Dx - h]$.

Из (11) и (12) следует, что выполнено

(13) h £ Dx,

что исключает моральный риск, причем всегда имеет место: $\tilde{x}_2 < x_2$. Более того, к ограничениям (10)-(13) добавляется следующее условие: $x_1 \leq x'(p) \leq \tilde{x}_1$ (см. также (8)). В приведенном на рисунке 21 частном случае последнее условие нарушено.

Если функция полезности страхователя линейна, то $x'(p) = Ex$ и (8) может иметь место только при $x'(p) = \tilde{x}_1 = Ex$, что в силу (13) приводит к H º 0, то есть в случае нейтрального к риску страхователя коммерческое страхование невозможно (нельзя получить прибыль от перераспределения риска).

Назначение граничных значений параметров механизма оптимально для страховщика (в смысле максимальной эффективности, понимаемой как значение его ожидаемой полезности). Обоснование этого утверждения следующее.

Из определений $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ получаем:

$$\Phi = p(x_2 - \tilde{x}_2) - (1 - p)(\tilde{x}_1 - x_1).$$

Видно, что эффективность механизма F монотонна по $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$, причем, чем меньше значения этих параметров, тем выше эффективность. С другой стороны, минимально возможные их значения определяются именно (8). Таким образом, достаточно выбрать параметры механизма, удовлетворяющие следующим соотношениям:

(14) $\tilde{x}_1 = x'(p)$, $\tilde{x}_2 = Ex$.

Вспомним, что условия (8) являются достаточными. Механизм, удовлетворяющий (14) является допустимым, но не гарантирует достижения максимально возможной ожидаемой полезности страховщика на множестве всех допустимых (выгодных для страхователя) механизмов. Содержательно, (14) соответствует тому, что страхователю предлагается вместо исходной лотереи принять участие в новой лотерее, в которой его полезность от минимально возможного дохода не меньше, чем полезность от ожидаемого дохода в исходной лотерее. Понятно, что для страхователя это выгодно. Страховщик при этом получит неотрицательную ожидаемую полезность (строго большую нуля, если p ¹ 0, p ¹ 1, Dx ¹ 0). Но эта оценка в общем случае улучшаема. То есть использование условий типа (14) упрощает анализ и позволяет найти параметры механизма без трудоемких вычислений, но за простоту приходится «платить» возможной потерей эффективности.

Рассмотрим в качестве иллюстрации частный случай, в котором доход страхователя при наступлении страхового случая равен нулю, а страховое возмещение при этом равно x_2, то есть $x_1 = 0$, $h = x_2$. Обозначим страховую ставку b. Страховая ставка складывается из нетто ставки b_0 и нагрузки x, то есть $b = b_0\,(1+x)$. Из принципа эквивалентности следует, что $b_0 = 1 - p$. Записывая условия выгодности страхового контракта для страхователя можно получить следующую оценку максимального значения нагрузки x_{max} (очевидно, что страховщик заинтересован в максимизации нагрузки):

(15) $x_{max} = \dfrac{px_2 - u^{-1}(pu(x_2))}{(1-p)x_2}$.

Легко видеть, что x_{max} возрастает по p и x_2 и вогнута по x_2. Содержательные интерпретации такой монотонности очевидны. Если страхователь нейтрален к риску, то $x_{max} = 0$, то есть страховщик не может получить прибыль от заключения страхового контракта со страхователем, который также как и он сам относится к риску. Если функция полезности страхователя строго вогнута, то значение x_{max} строго положительно. Например, при $u(x) = \sqrt{x}$ из (15) следует, что $x_{max} = p$.

Из проведенного анализа механизма страхования видно, что выгодность перераспределения риска обусловлена различным к нему отношением страхователя и страховщика. Несклонность к риску страхователя понятна. Поэтому рассмотрим почему страховщик может быть нейтрален к риску и каковы качественные отличия механизмов страхования в многоэлементных системах от описанной выше одноэлементной модели.

Пусть ОС состоит из n страхователей (индекс $i = \overline{1, n}$ соответствует номеру страхователя). Суммарный страховой взнос элементов равен $\sum_{i=1}^{n} r_i$, ожидаемое страховое возмещение – $\sum_{i=1}^{n} (1 - p_i)\, h_i$. Задача синтеза оптимального страхового контракта заключается в поиске допустимого набора $\{r_i, h_i\}$, максимизирующего ожидаемую полезность центра:

$$\varPhi = \sum_{i=1}^{n} \left[p_i \left(x_{2_i} - \tilde{x}_{2_i} \right) - (1 - p_i)\left(\tilde{x}_{1_i} - x_{1_i} \right) \right],$$

где $h_i = \Delta x_i - \Delta \tilde{x}_i$, $r_i = x_{2_i} - \tilde{x}_{2_i}$.

Известно, что страхование выгодно при большом числе страхователей. Это объясняется, во-первых, тем, что с ростом числа страхователей вероятность разорения страховщика уменьшается (при этом, помимо ожидаемой полезности, необходимо анализировать и вторые моменты, то есть целевые функции и ограничения механизма могут отличаться от рассмотренных выше). Во-вторых, даже если страховщик не склонен к риску, страхование может оказаться выгодным для него. Поясним последнее утверждение.

Пусть имеются n одинаковых страхователей, а страховщик имеет ту же функцию полезности (предположим, что функции полезности строго вогнуты), что и страхователи. Если $n = 1$, то страхование никому не выгодно – перераспределять риск между агентами, одинаково к нему относящимися, бессмысленно. Из рассмотренных выше моделей следует, что страхование выгодно когда премии за риск страхователя и страховщика различаются. С ростом n при строго вогнутой функции полезности страховщика его премия за риск уменьшается, в то время, как у каждого из страхователей остается постоянной (система событий – возможных исходов при этом будет, естественно, более сложной, чем в одноэлементном случае). Иными словами перераспределение риска между двумя агентами взаимовыгодно, если один из них имеет «менее вогнутую» функцию полезности, чем другой.

Рассмотрим кратко основные подходы и результаты построения моделей *взаимного страхования*, исследуемых в теории активных систем. Пусть имеются n страхователей. Результатом деятельности каждого страхователя является случайная величина, принимающая одно из двух значений, соответствующих благоприятной ситуации и неблагоприятной ситуации (страховому случаю). Вероятность наступления страхового случая у i-го страхователя равна p_i и известна «страховщику», которым может являться объединение страхователей (в последнем случае получаем, что все вероятности известны всем страхователям, участвующим во взаимном страховании). Отметим, что рассматриваемая модель непосредственно обобщается на случай любого конечного числа возможных результатов деятельности страхователей. Для простоты пока положим, что страховой случай может наступить у одного и только одного страхователя.

Пусть при наступлении страхового случая у i-го страхователя требуется страховое возмещение в объеме h_i, отражающее, например, стоимость восстановительных работ и компенсационных выплат третьим лицам в результате ущерба, нанесенного аварией на предприятии, представленном данным страхователем.

Предположим, что величина h_i известна только i-му страхователю и неизвестна остальным. Тогда при разработке механизма страхования придется использовать либо некоторые оценки величин $\{h_i\}$, восстанавливаемые по косвенной информации (например, в результате проведения экологической экспертизы, или по имеющимся статистическим данным), либо оценки $\{s_i\}$, сообщаемые страхователями. Если требуется обеспечить полное гарантированное покрытие возможного ущерба, то для этого необходимо иметь резерв $R' = \max_i \{h_i\}$. Но так как $\{h_i\}$ неизвестны, то будем считать, что резерв (страховой фонд) определяется как $R' = \max_i \{s_i\}$.

Рассмотрим целевые функции страхователей. Страхователь с номером i получает доход H_i, выплачивает страховой взнос $r_i(s)$, где $s = (s_1, \dots, s_n)$ – вектор сообщений страхователей. В благоприятной ситуации страхователь несет затраты C_i, в неблагоприятной – $(C_i + h_i)$. В неблагоприятной ситуации страхователь получает страховое возмещение s_i. Таким образом ожидаемое значение целевой функции i-го страхователя определяется выражением:

(16) $f_i = H_i - r_i(s) - C_i + p_i (s_i - h_i)$, i Î $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть страховщик использует следующую процедуру для определения страхового взноса:

(17) $r_i(s) = \dfrac{(p_i s_i)}{\sum_{j=1}^{n} (s_j p_j)} R$, i Î I,

то есть каждый страхователь делает в страховой фонд взнос, пропорциональный своей заявке (очевидно, $\forall s \ \sum_{i=1}^{n} r_i(s) = R$, " i Î I $r_i(s)$ – возрастает по s_i). Максимум выражения $(p_i s_i - r_i(s))$ по s_i при фиксированной обстановке $s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ достигается при $\tilde{s}_i = \max_{j \neq i} \{s_j\}$. Очевидно, сообщение достоверной информации в общем случае не будет равновесием Нэша. Более того, равновесной оказывается каждая ситуация игры, в которой все агенты сообщают одинаковые заявки.

Легко видеть, что вместо (17) достаточно взять $r_i(s) = p_i s_i$. Тогда целевая функция страхователя не будет зависеть от s и в силу гипотезы благожелательности он сообщит $s_i = r_i$, i Î I. Итак, каждый страхователь вносит в страховой фонд (фонд взаимного страхования) взнос в точности равный ожидаемой нехватке средств. Но при этом сумма взносов может оказаться меньше требуемых выплат, то есть не исключена ситуация, в которой найдется страхователем с номером j, таким, что $h_j > \sum_{i=1}^{n} p_i h_i$. Такую возможность надо учитывать, и использовать ожидаемые значения следует очень аккуратно.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств механизмов страхования, обусловленных активностью их участников. Один аспект активности мы уже учли: страховщик и страхователь не станут заключать страховой контракт, если он не выгоден хотя бы одному из них.

Перечислим перспективные направления исследований механизмов управления, которые в подобных ситуациях может использовать страховщик.

Если центру известна нижняя оценка вероятности наступления страхового случая, то оптимальный страховой контракт может рассчитываться на основании этой оценки, что будет соответствовать использованию страховщиком принципа максимального гарантированного результата. В частности, возможно использование так называемых компенсационных процедур. Так как страхователю выгодно занижать оценку вероятности наступления страхового случая, то «встраивая» в механизм процедуру, снижающую доход страхователя от занижения оценки (то есть, компенсируя эффект от занижения) центр может добиться сообщения страхователем, если не достоверной информации, то, по крайней мере, более точной информации. В случае, когда число страхователей велико и все они работают в одинаковых условиях, можно устроить многоканальный конкурс страхователей (см. выше), результаты которого будут определяться сообщенными страхователями оценками вероятностей наступления страхового случая – сообщивший более «точную» (максимальную, минимальную и т.д.) оценку получает льготные условия страхования. Если условия деятельности различных страхователей отличаются, но все они имеют информацию друг о друге, то за счет сообщения этой информации при использовании механизмов теории реализуемости существующая неопределенность может быть уменьшена, а эффективность страхования – повышена.

В заключение настоящего раздела сделаем следующее замечание. Основные «технические» трудности анализа механизмов страхования возникают из-за нелинейности функции полезности страхователя. В то же время, именно эта нелинейность, отражающая его несклонность к риску, делает страхование возможным и взаимовыгодным для страхователя и страховщика. Поэтому для упрощения моделей рассмотрим возможные способы учета несклонности страхователя к риску, не использующие в явном виде функции полезности. Для этого введем в его целевую функцию рисковую премию, отражающую ценность страхового возмещения, получаемого при наступлении страхового случая.

Пусть g – составляющая целевой функции страхователя, независящая от случайных событий, Q – его дополнительные затраты, которые он несет при наступлении страхового случая (в экологическом страховании в качестве Q могут выступать затраты на ликвидацию последствий чрезвычайных ситуаций, проведение очистных мероприятий, компенсации третьим лицам, пострадавшим в результате загрязнения и т.д.), $Dh(h)$ – «ценность» страхового возмещения. Тогда ожидаемое значение целевой функции страхователя может быть записано как:

(18) $Ef = g - r + p\,(Dh(h) - Q)$,

где p – вероятность наступления страхового случая. Заключение страхового контракта будет выгодно для страхователя, если

(19) $p\,Dh(h)$ ³ r.

Из принципа эквивалентности следует, что нагрузка к неттоставке есть $(Dh(h) - h)$, следовательно, страховой контракт будет выгоден страховщику, если

(20) $Dh(h)$ ³ h.

Например, при $Dh(h) = h\,e^{x}$, где x ³ 0 – константа, отражающая несклонность страхователя к риску (нейтральности к риску соответствует равенство этой константы нулю), получаем, что при малых x из формулы Тейлора следует, что $Dh(h)$ » $h + x\,h$, то есть x может интерпретироваться как максимальная нагрузка к неттоставке.