В.Н. Бурков, Н.А. Коргин, Д.А. Новиков

МЕХАНИЗМЫ ПЛАНИРОВАНИЯ В ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Настоящая работа является учебным пособием для подготовки к экзамену по курсу "Механизмы планирования" для аспирантов, обучающихся по специальности 05.13.10 – "Управление в социальных и экономических системах" (см. программу курса и задачи к экзамену на сайте www.mtas.ru).

СОДЕРЖАНИЕ

1. Задача планирования. Принцип открытого управления 2
2. Механизмы распределения ресурса 8
3. Механизмы активной экспертизы 21
4. Механизмы внутренних цен 26
5. Конкурсные механизмы 30
6. Механизмы обмена 36
7. Литература..44

1. Задача планирования. Принцип открытого управления

Рассмотрим двухуровневую многоэлементную *организационную систему* (ОС), состоящую из управляющего органа – *центра* – и n управляемых субъектов – *агентов*. Стратегией каждого из агентов является сообщение центру некоторой информации s_i Î W_i, i Î $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множеству агентов. Центр на основании сообщенной ему информации назначает агентам *планы* $x_i = p_i(s)$ Î X_i Í $\hat{A}^1$, где p_i: W ® X_i – *процедура* (*механизм*) *планирования*, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ Î $W = \prod_{i\in I} \Omega_i$ – вектор сообщений всех агентов. *Функция предпочтения* агента, отражающая интересы агента в задачах планирования: $j_i(x_i, r_i)$: $\hat{A}^2$ ® $\hat{A}^1$ зависит от соответствующей компоненты назначенного центром плана и некоторого параметра – *типа* агента. Под типом агента обычно понимается точка максимума его функции предпочтения, то есть наиболее выгодное с его точки зрения значение плана.

Условно, между задачами планирования и стимулирования [9] можно провести следующую аналогию (см. таблицу 1 ниже).

Таблица 1

Задачи стимулирования и планирования

	Стимулирование	Планирование
Стратегия агента	y Î A'	s Î W
Управление	$s(y)$	$p(s)$
Предпочтения агента	$f(y, s)$	$j(s, p)$

На момент принятия решений каждому агенту известны: процедура планирования, значение его собственного типа r_i Î $\hat{A}^1$ (*идеальной точки, точки пика*), целевые функции и допустимые множества всех агентов. Центру известны зависимости $j_i(x_i$, ×) и множества возможных сообщений агентов, и неизвестны точные значения типов агентов. Последовательность функционирования следующая: центр выбирает процедуру планирования и сообщает ее агентам, агенты при известной процедуре планирования сообщают центру информацию, на основании которой и формируются планы.

Так как решение, принимаемое центром (назначаемые агентам планы), зависит от сообщаемой агентами информации, последние могут воспользоваться возможностью своего влияния на эти решения, сообщая такую информацию, чтобы получить наиболее выгодные для себя планы. Понятно, что при этом полученная центром информация в общем случае может не быть истинной. Следовательно, возникает *проблема манипулирования*.

Как правило, при исследовании механизмов планирования, то есть в ОС с сообщением информации, вводится предположение, что функции предпочтения агентов *однопиковые* с точками пика $\{r_i\}_{i\ \hat{\imath}\ I}$, то есть функции предпочтения непрерывны, строго монотонно возрастают до единственной точки максимума r_i и строго монотонно убывают после нее. Это предположение означает, что предпочтения агентов на множестве допустимых планов таковы, что существует единственное наилучшее для него значение плана – точка пика, степень же предпочтительности остальных планов монотонно убывает по мере удаления от идеальной точки – точки пика.

Будем считать, что агенты ведут себя некооперативно, выбирая доминантные или равновесные по Нэшу стратегии. Пусть s^* – вектор равновесных стратегий[1]. Очевидно точка равновесия в общем случае зависит от вектора типов всех агентов $s^* = s^*(r)$, где $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ – вектор точек пика.

Соответствующим механизму $p(\cdot)$: W ® $\hat{A}^n$ *прямым механизмом* планирования $h(\cdot)$: $\hat{A}^n$ ® $\hat{A}^n$ называется механизм $h(r)=p(s^*(r))$, ставящий в соответствие вектору точек пика агентов вектор планов. Термин "прямой" обусловлен тем, что агенты сообщают непосредственно (прямо) свои точки пика (в исходном – непрямом – механизме $p(\cdot)$ они могли сообщать косвенную информацию) Если в соответствующем прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесной стратегией всех агентов, то такой механизм называется *эквивалентным прямым* (неманипулируемым) *механизмом*.

Рассмотрим возможные способы обеспечения достоверности сообщаемой информации. Наиболее очевидной является идея

---

[1] *Если равновесий несколько, то необходимо ввести соответствие отбора равновесий, позволяющее из любого множества равновесий выбрать единственное.*

введения системы штрафов за искажение информации (в предположении, что центру в конце концов становятся известными истинные значения параметров $\{r_i\}_{i \in I}$). В [3] показано, что введением «достаточно сильных» штрафов действительно можно обеспечить достоверность сообщаемых оценок. Если отказаться от предположения, что центру становятся известными $\{r_i\}_{i \in I}$, то возникает задача идентификации неизвестных параметров по имеющейся у центра информации и, следовательно, задача построения системы штрафов за косвенные показатели искажения информации [3].

Другим возможным способом обеспечения достоверности сообщаемой информации является использование *прогрессивных механизмов*, то есть таких механизмов, в которых функция φ_i монотонна по оценке s_i, $i \in I$. Понятно, что если при этом справедлива «гипотеза реальных оценок»: $s_i \le r_i$, $i \in I$, то доминантной стратегией каждого агента будет сообщение $s_i = r_i$, $i \in I$ [3].

Фундаментальным результатом теории активных систем является ***принцип открытого управления*** [2, 3, 5, 7, 10, 11] (см. также принцип выявления – revelation principle – [2, 8, 12, 13]). Основная идея принципа открытого управления (ОУ) заключается в том, чтобы использовать процедуру планирования, максимизирующую целевую функцию каждого агента, в предположении, что сообщаемая агентами оценка достоверна, то есть центр идет навстречу агентам, рассчитывая на то, что и они его не «обманут». Это объясняет другое название механизма открытого управления – «*механизм честной игры*». Дадим строгое определение.

Условие

$$\varphi_i(\pi_i(s), s_i) = \max_{x_i \in X_i(s_{-i})} \varphi_i(x_i, s_i),\ i \in I,\ s \in \Omega,$$

где $X_i(s_{-i})$ – устанавливаемое центром множество допустимых планов при заданной обстановке $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ для i-го агента, $i \in I$, называется *условием совершенного согласования*. Процедура планирования, максимизирующая целевую функцию центра $F(\pi, s)$ на множестве планов, удовлетворяющих условиям совершенного согласования, называется *законом открытого управления*.

Имеет место следующий факт – для того, чтобы сообщение достоверной информации было доминантной стратегией агентов необходимо и достаточно, чтобы механизм планирования был механизмом открытого управления [2, 3, 5, 11].

Приведенное утверждение не гарантирует единственности ситуации равновесия. Конечно, если выполнено условие благожелательности (если $s_i = r_i,\ i\ \hat{I}\ I$ – доминантная стратегия, то агенты будут сообщать достоверную информацию), то использование закона ОУ гарантирует достоверность сообщаемой агентами информации. Приведем достаточное условие существования единственной ситуации равновесия вида $s_i = r_i,\ i\ \hat{I}\ I$, в системе с законом ОУ. Обозначим: $E_i(s_i) = \mathrm{Arg}\max\limits_{x_i \in X_i} j_i(x_i, s_i)$ – множество согласованных планов i-го агента. Будем считать, что для i-го агента выполнено *условие равноправия функций предпочтения*, если имеет место:

$$'' \ s_i^1 \ ^1 \ s_i^2 \ \hat{I} \ W_i \ \ E_i(s_i^1) \ Ç \ E_i(s_i^2) = Æ,$$

то есть при любых допустимых несовпадающих оценках s_i^1 и s_i^2 соответствующие множества согласованных планов не пересекаются. Справедливо следующее утверждение [3]: условие равноправия функций предпочтения для всех агентов является достаточным условием единственности ситуации равновесия.

Приведем ряд необходимых и достаточных условий сообщения достоверной информации как доминантной стратегии.

Необходимым и достаточным условием сообщения достоверной информации как доминантной стратегии при любых идеальных точках $r\ \hat{I}\ W$ является существование множеств $X_i(s_{-i})$, для которых выполнены условия совершенного согласования [2, 3].

Напомним, что $X_i(s_{-i})$ – множество допустимых планов i-го агента, которое в соответствии с условиями приведенного выше результата зависит от сообщений остальных агентов s_{-i} и не зависит от сообщения s_i i-го агента. Рассмотрим механизм с сильными штрафами за отклонение состояния от плана, то есть механизм с полной централизацией планирования [3]. Пусть множество допустимых планов представимо в виде:

$$\$ \ D_i(s_{-i}): X_i(s_{-i}) = X_i \ Ç \ D_i(s_{-i}) \ ^1 \ Æ.$$

В [3] доказана теорема о том, что для того, чтобы механизм с сильными штрафами обеспечивал сообщение достоверной информации как доминантной стратегии при любых точках пика, необходимо и достаточно, чтобы: 1) существовали *децентрализующие множества* $D_i(s_{-i})$; 2) выполнялись условия совершенного согласования. Данное утверждение можно переформулировать следующим образом: если в исходном механизме планирования существует равновесие в доминантных стратегиях, то в соответствующий прямой механизм будет неманипулируем.

Интересным и перспективным представляется предложенный в [11] *геометрический подход* к получению достаточных условий неманипулируемости путем анализа конфигураций *множеств диктаторства* (*диктаторами* называют агентов, получающих абсолютно оптимальные для себя планы), определяемых как множества таких значений типов агентов, что определенные агенты получают планы строго меньшие оптимальных для них планов, равные оптимальным, и строго большие. В рамках этого подхода уже удалось получить ряд конструктивных условий индивидуальной и коалиционной неманипулируемости механизмов планирования в ОС.

Достоверность сообщаемой информации при использовании принципа ОУ при условии, что множество допустимых планов агента не зависит от сообщаемой им оценки, интуитивно обосновывает рассмотрение систем с большим числом элементов. Пусть часть плановых показателей l является общей для всех агентов, то есть номенклатура плана имеет вид $p = (l, \{x_i\}_{i \in I})$. Если искать управления l, выгодные для всех агентов (как это делается при использовании принципа согласованного планирования), то возникает принципиальный вопрос о существовании решения. Такого рода проблем не возникает в системах с большим числом элементов, когда влияние оценки отдельного агента на общее управление мало. Если при сообщении своей оценки s_i каждый агент не учитывает ее влияния на $l(s)$, то считается выполненной *гипотеза слабого влияния* (ГСВ). При справедливости ГСВ необходимо согласовывать планы только по индивидуальным переменным. В [3] доказано, что, если выполнена ГСВ и компоненты $x(s)$ плана удовлетворяют условиям совершенного согласования, то сообщение достоверной информации является доминантной стратегией.

До сих пор мы интересовались, в основном, условиями сообщения достоверной информации. Возникает закономерный вопрос: как соотносятся такие свойства механизма функционирования как неманипулируемость и оптимальность? Иначе говоря, всегда ли среди оптимальных механизмов найдется неманипулируемый и, соответственно, всегда ли среди неманипулируемых механизмов содержится хоть один оптимальный. Получить ответ на этот вопрос необходимо, так как, быть может, не обязательно стремиться к обеспечению достоверности информации, лишь бы механизм имел максимальную эффективность. Поэтому приведем ряд результатов по оптимальности (в смысле максимальной эффективности) механизмов открытого управления (см. также условия неманипулируемости e-согласованных механизмов в [3]).

Известно [3], что в ОС с одним агентом для любого механизма существует механизм открытого управления не меньшей эффективности. Качественно, этот факт объясняется тем, что для единственного агента децентрализующим множеством будет все множество его допустимых планов (другими словами, у одного агента всегда есть доминантная стратегия).

Для систем с б*о*льшим числом элементов результат об оптимальности механизмов открытого управления справедлив лишь для ряда частных случаев. Например, аналогичные результаты были получены для механизмов распределения ресурса, для механизмов выработки коллективных экспертных решений (задач активной экспертизы) и механизмов внутренних цен, рассматриваемых ниже, а также для ряда других механизмов планирования (см. обзоры в [2, 11]).

Полученные в теории активных систем результаты о связи оптимальности и неманипулируемости механизмов вселяют некоторый оптимизм, в том смысле, что эти два свойства не являются взаимно исключающими. В то же время ряд примеров (см., например, [2, 10, 11]), свидетельствуют о неоптимальности в общем случае механизмов, обеспечивающих сообщение агентами достоверной информации. Вопрос о соотношении оптимальности и неманипулируемости в общем случае остается открытым.

Завершив краткое описание общих проблем синтеза эффективных и неманипулируемых механизмов планирования в ОС, перейдем к рассмотрению ставших уже хрестоматийными механизмов планирования в многоэлементных ОС, для которых оптимален принцип открытого управления.

2. Механизмы распределения ресурса

Рассмотрим постановку задачи распределения ресурса в двухуровневой организационной системе. Пусть в распоряжении центра имеется ресурс в количестве R. Стандартная постановка задачи распределения ресурса подразумевает нахождение такого его распределения между агентами, которое максимизировало бы некоторый критерий эффективности – например, суммарную эффективность использования ресурса агентами. Если эффективность использования ресурса агентами не известна центру, то он вынужден использовать сообщения агентов, например, о требуемых количествах ресурса. Понятно, что, если имеется дефицит ресурса, то возникает проблема манипулируемости – агенты могут сообщать центру недостоверную информацию, стремясь получить оптимальное для себя количество ресурса.

Рассмотрение вопроса о неманипулируемости начнем с простейшего примера. Предположим, что центр должен распределить ресурс между двумя агентами. Обозначим r_i – точку пика – количество ресурса, при котором значение функции предпочтения i-го агента максимально ($i = 1, 2$). Пусть решение об объеме выделяемого ресурса принимается центром на основании заявок агентов s_1 и s_2, где s_i – сообщаемая i-ым агентом заявка на ресурс. Понятно, что если $s_1 + s_2 \le R$, $r_1 + r_2 \le R$, то проблем не возникает (достаточно положить $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$). Что делать центру, если имеется *дефицит ресурса*, то есть если $r_1 + r_2 > R$? Предположим, что заявки агентов ограничены: $0 \le s_i \le R = 1,\ i = 1, 2,$ то есть, как минимум, агент может отказаться от ресурса (сообщив $s_i = 0$), или запросить весь ресурс, сообщив $s_i = 1$. Пусть центр использует следующий *механизм $p(\cdot)$ распределения ресурса* (в общем случае – механизм планирования):

$$x_i = p_i(s_1, s_2) = \frac{s_i}{s_1 + s_2} R, \quad i = 1, 2.$$

Такой принцип распределения называется *принципом пропорционального распределения* – ресурс распределяется пропорционально заявкам агентов. Отметим, что количество ресурса, получаемое каждым агентом, зависит от его собственной заявки и от заявки другого агента, то есть, имеет место игра. Центр в этой игре выступает метаигроком, то есть игроком, выбирающим правила – механизм $p(\cdot)$.

Рассмотрим, какие заявки будут сообщать агенты. Возможны следующие случаи:

1. $r_1 = +\infty$, $r_2 = +\infty$, то есть оба агента заинтересованы в получении максимального количества ресурса («чем больше, тем лучше»). В этом случае равновесные заявки равны $s_1^* = s_2^* = 1$. Равновесие понимается в смысле Нэша (то есть такой точки, одностороннее отклонение от которой не выгодно ни одному из агентов). Действительно, сообщить $s_i > 1$ агент не может. Сообщая $s_i < 1$, i-ый агент получит строго меньшее количество ресурса (при условии, что $s_j = s_j^* = 1$, $j \neq i$), то есть, отклоняясь один, он уменьшит (не увеличит) значение своей функции предпочтения. В этом случае

$$x_1^* = p_1(s_1^*, s_2^*) = x_2^* = p_2(s_1^*, s_2^*) = R/2 = 1/2.$$

Легко видеть, что ситуация равновесия не изменится, если $r_1 > 1/2, r_2 > 1/2$.

2. $r_1 \leq 1/2$, $r_2 > 1/2$. В этом случае заявка s_2^*, очевидно, равна 1, а $s_1^* = r_1 / (1 - r_1)$ (легко видеть, что $s_i^* \in (0; 1)$ $\forall$ $r_1 < 1/2$). При этом $x_1^* = r_1$, $x_2^* = 1 - r_1$, то есть первый агент является *диктатором*, то есть получает оптимальное для себя количество ресурса (ср. с механизмами активной экспертизы – раздел 3).

Чем же характерно число $x_i = 1/2$? Если $r_i \leq 1/2$ $(r_1 + r_2 > R)$, то i-ый агент становится диктатором и получает ровно столько, сколько ему нужно. Заметим, что $1/2 = p_i(1, 1)$, то есть это количество ресурса, получаемое в случае, когда оба агента сообщили максимальные заявки.

Более того, механизм является манипулируемым – равновесные заявки агентов не совпадают с их истинными потребностями. Можно ли избавиться от этого манипулирования? Оказывается – да! Рассмотрим следующий механизм.

Для анализируемого примера сконструируем соответствующий прямой механизм (см. раздел 1). Предположим, что агенты сообщают центру не заявки $s_i \in [0, 1]$, а непосредственно оценки $\tilde{r}_i$ параметров r_i своих функций предпочтения $\varphi_i(x_i, r_i)$. Получив оценки $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, центр определяет точку равновесия $(s_1^*(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2);$ $s_2^*(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2))$ в соответствии со следующей процедурой:

1. Если у обоих агентов $\tilde{r}_i > 1/2$, то $s_1^* = s_2^* = 1$.

2. Если у одного из агентов $\tilde{r}_i \le 1/2$ ($\tilde{r}_j > 1/2$, $j \ne i$, $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 > 1$), то $s_i^* = r_i / (1 - r_i)$, $s_j^* = 1$.

3. Если $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 \le 1$, то $s_1^* = \tilde{r}_1$, $s_2^* = \tilde{r}_2$.

Далее центр выделяет ресурс в соответствии с исходным механизмом пропорционального распределения, подставляя в него зависимость $s^*(r)$, то есть, используя соответствующий прямой механизм – см. раздел 1. Понятно, что в соответствующем прямом механизме каждый из агентов получает в точности то же количество ресурса, что и в исходном механизме, значит эффективности этих механизмов совпадают. Исследуем теперь, является ли соответствующий прямой механизм неманипулируемым, то есть, является ли сообщение $\tilde{r}_i \equiv r_i$, $i = 1, 2$, равновесием Нэша. Рассмотрим следующие случаи:

1. Если у обоих агентов $r_i > 1/2$, то, сообщая $\tilde{r}_i \equiv r_i$, они получат ровно по половине ресурса. Распределение изменится только если $\tilde{r}_i < 1/2$, в этом случае $x_i^* < 1/2$ – то есть выигрыш i-го агента уменьшится, а значит, такое отклонение ему невыгодно.

2. Если $r_i \le 1/2$, $r_j > 1/2$, то i-му агенту отклонение невыгодно, так как он получает оптимальное для себя количество ресурса r_i. Для j-го агента, который в этой ситуации получает меньше ресурса, чем ему необходимо, отклонение также невыгодно, так как, если он сообщит $\tilde{r}_j < r_j$, то центр «восстановит» $s_j^*(r_i, \tilde{r}_j) \le 1$ и полученное им количество ресурса не увеличится.

3. Если $r_1 + r_2 \le 1$, то $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$, то есть каждый агент получает оптимальное для себя количество ресурса, и искажение информации ему ничего не дает (предполагается, что если при сообщении достоверной информации и ее искажении агент получает одно и то же количество ресурса, то он предпочтет сообщить правду).

Таким образом, мы показали, что в рассматриваемом примере можно построить соответствующий прямой механизм распределения ресурса, который является неманипулируемым и имеет ту же эффективность, что и исходный механизм. Попробуем теперь обобщить этот важный результат на случай произвольного механизма распределения ресурса. Пусть в распоряжении центра имеется ресурс в количестве R, который он должен распределить между n агентами, имеющими функции предпочтения $\varphi_i(x_i, r_i)$, $i \in I$. Предположим, что на заявки, подаваемые агентами, наложены ограничения $s_i \leq D_i$, $i \in I$. Обозначим $\{r_i\}_{i \in I}$ – точки максимума функций предпочтения агентов и будем рассматривать случай, когда имеет место дефицит ресурса, то есть $\sum_{i=1}^{n} r_i > R$. Пусть центр использует непрерывную и строго монотонную процедуру распределения $p(\cdot)$: $x_i = p_i(s)$, удовлетворяющую следующим свойствам:

1. Весь ресурс распределяется полностью, то есть $\sum_{i=1}^{n} p_i(s) = R$ при любых s: $\sum_{i=1}^{n} s_i > R$ (*свойство сбалансированности*);

2. Если агент при данной процедуре получил некоторое количество ресурса, то он всегда может получить любое меньшее количество;

3. Если количество ресурса, распределяемое центром между заданным множеством агентов, увеличивается, то каждый из агентов из этого множества при той же процедуре распределения в равновесии получит не меньше, чем при прежнем количестве ресурса.

Перечисленные выше свойства механизма распределения ресурса представляются достаточно естественными. Действительно, этим свойствам удовлетворяют большинство используемых на практике механизмов.

Множество всех агентов I можно разбить на два подмножества: Q и P ($Q \cap P = \varnothing$; $Q \cup P = I$). Множество *приоритетных потребителей* Q (*диктаторов*) характеризуется тем, что все они получают ровно оптимальное для себя количество ресурса (напомним, что в точке r_i функция предпочтения i-го агента достигает глобального максимума). Агенты, входящие в множество P, характеризуются тем, что они получают количество ресурса, строго меньшее оптимального, то есть $x_i(s^*) < r_i$, $i \in P$, где s^* – равновесные сообщения агентов. Легко показать, что $s_i^* = D_i$, $\forall\ i \in P$.

Построим теперь соответствующий прямой механизм, то есть механизм, использующий сообщение агентами оценок $\{\tilde{r}_i\}$. Понятно, что для этого достаточно определить множество приоритетных потребителей. Для этого предлагается использовать следующий <u>алгоритм</u>:

1. Положим $Q = Æ$, $P = I$, и определим $x_i(D)$, $i \in I$, где $D = (D_1, ..., D_n)$, то есть, предположим, что все агенты сообщили максимальные заявки. Если $x_j(D)$ ³ $\tilde{r}_j$, то $Q: = Q$ È $\{j\}, j$ Î I.

2. Полагаем " i Î P $S_i = D_i$ и распределяем между ними ресурс $R - \sum_{j \in Q} \tilde{r}_j$, подставляя в процедуру распределения ресурса такие заявки агентов из множества Q, чтобы все они получали оптимальное для себя количество ресурса (это возможно в силу второго свойства процедуры распределения ресурса). Если появляются новые приоритетные потребители, то включаем их в множество Q и повторяем шаг 2.

Очевидно, алгоритм сходится за конечное число шагов. Обсудим его содержательные интерпретации. На первом шаге центр вычисляет, сколько получит каждый агент, если все сообщат свои максимальные заявки. Понятно, что если кто-то при этом получает больше, чем ему нужно (больше, чем r_j), то излишком ресурса ($x_j(D) - \tilde{r}_j$) он, в силу свойств 2 и 3 процедуры $p(\cdot)$, может поделиться с теми агентами, которым ресурса не хватает. Дальше приоритетным агентам выделяется ровно оптимальное количество ресурса, а остаток делится между агентами, не попавшими в число приоритетных.

Прямой механизм, определяемый приведенным выше алгоритмом, использует сообщения $\{\tilde{r}_i\}$ и приводит к тому же распределению ресурса, что и исходный механизм $p(\cdot)$. Более того, по аналогии с рассмотренным примером легко показать, что прямой механизм является неманипулируемым, то есть сообщение достоверной информации агентами является равновесием Нэша [3]. А так как эквивалентный прямой механизм приводит к тому же распределению ресурса, что и исходный, значит он имеет ту же эффективность, что и исходный механизм.

Таким образом, установлен следующий факт – для любого механизма распределения ресурса, удовлетворяющего введенным предположениям, существует эквивалентный прямой (неманипулируемый) механизм не меньшей эффективности. Значит, оптимальный механизм содержится в классе неманипулируемых механизмов, то есть, строя механизм, в котором все агенты сообщают правду, центр не теряет эффективности.

Анонимные механизмы. Обширным классом механизмов распределения ресурса являются *анонимные механизмы*, то есть механизмы, в которых любая перестановка агентов не изменяет назначаемых любому агенту (с учетом перестановки) планов. Для механизмов распределения ресурса это означает, что в анонимном механизме множества возможных сообщений агентов одинаковы: $W_{ij} = [0; D]$, а процедура планирования симметрична по заявкам агентов. Следует отметить, что анонимность механизма вовсе не подразумевает идентичности агентов. Сами агенты могут различаться сколь угодно сильно – единственным (и достаточно демократическим) требованием, предъявляемым к анонимному механизму планирования, является симметричность процедуры планирования.

В [1] доказано следующее свойство анонимных механизмов распределения ресурса: любой анонимный механизм распределения ресурса эквивалентен механизму пропорционального распределения. Справедливость этого утверждения следует из того факта, что все анонимные механизмы эквивалентны (в [1] доказано, что любой анонимный механизм эквивалентен *механизму последовательного распределения ресурса* – см. ниже), а механизм пропорционального распределения является анонимным.

Опишем более подробно некоторые распространенные классы механизмов распределения ресурса.

Приоритетные механизмы. В приоритетных механизмах распределения ресурса, как следует из их названия, при формировании планов (решении о том, сколько ресурса выделить тому или иному агенту) в существенной степени используются показатели приоритета агентов. Приоритетные механизмы в общем случае описываются следующей процедурой:

$$x_i(s) = \begin{cases} s_i, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j \le R \\ \min\{s_i, g h_i(s_i)\}, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j > R \end{cases},$$

где n – число агентов, $\{s_i\}_{i \hat{I} I}$ – их заявки, $\{x_i\}_{i \hat{I} I}$ – выделяемые количества ресурса, R – распределяемое количество ресурса,

$\{h_i(s_i)\}_{i\ Î\ I}$ – функции приоритета агентов, g – некоторый параметр. Операция взятия минимума содержательно означает, что агент получает ресурс в количестве, не большем заявленной величины. Параметр g играет роль нормировки и выбирается из условия выполнения балансового (бюджетного) ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{s_i, g\, h_i(s_i)\} = R,$$

то есть подбирается таким, чтобы при данных заявках и функциях приоритета в условиях дефицита распределялся в точности весь ресурс R.

Приоритетные механизмы, в зависимости от вида функции приоритета, подразделяются на три класса – *механизмы прямых приоритетов* (в которых $h_i(s_i)$ – возрастающая функция заявки s_i, i Î I), *механизмы абсолютных приоритетов*, в которых приоритеты агентов фиксированы и не зависят от сообщаемых ими заявок[1], и *механизмы обратных приоритетов* (в которых $h_i(s_i)$ – убывающая функция заявки s_i, i Î I). Рассмотрим последовательно механизмы прямых и обратных приоритетов.

Механизмы прямых приоритетов. Если функции предпочтения $j_i(x_i, r_i)$ агентов являются строго возрастающими функциями x_i (агенты заинтересованы в получении максимально возможного количества ресурса), то, так как в механизме прямых приоритетов x_i – возрастающая функция заявки s_i, то все агенты будут сообщать максимальные заявки на ресурс. Это явление – тенденция роста заявок – широко известно в экономике. Поэтому механизмы прямых приоритетов, использующие принцип – «больше просишь – больше получишь» подвергались и подвергаются справедливой критике.

Если функции предпочтения агентов имеют максимумы в точках $\{r_i\}_{i\ Î\ I}$, то анализ несколько усложнится, однако качественный

[1] *Так как в механизмах абсолютных приоритетов планы, назначаемые агентам, не зависят от их заявок, то в рамках гипотезы благожелательности можно считать любой механизм абсолютных приоритетов неманипулируемым. Недостатком этого класса механизмов можно считать то, что в них центр никак не использует информации, сообщаемой агентами.*

вывод останется прежним – при наличии малейшего дефицита $\Delta = \sum_{i=1}^{n} r_i - R$ имеет место тенденция роста заявок.

Отметим, что процедура, рассматриваемая в качестве примера выше (механизм пропорционального распределения), является процедурой прямых приоритетов:

$$h_i(s_i) = s_i,\ i \hat{I}\ I,\ g(s) = R / \sum_{i=1}^{n} s_i .$$

Так как все анонимные механизмы прямых приоритетов эквивалентны механизму последовательного распределения ресурса (качественно, это свойство обусловлено тем, что, сообщая в анонимном механизме одинаковые заявки, агенты получают одинаковое количество ресурса), то для нахождения в них равновесных заявок и равновесного распределения ресурса центр может использовать следующую процедуру последовательного распределения:

1. Упорядочить агентов в порядке возрастания точек пика;
2. Выделить всем агентам ресурс в количестве, требуемом агентам с минимальной точкой пика (если имеющегося ресурса хватает, в противном случае распределить ресурс поровну) и исключить этого агента из рассмотрения;
3. Выделить оставшимся агентам оставшийся ресурс в соответствии со вторым шагом.

Легко убедиться, что данная процедура распределения ресурса (соответствующий прямой механизм) неманипулируема, то есть сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Приведем пример. Пусть $n = 5$ и $r_i = 0.1\ i,\ R = 1.$ Очевидно, что имеет место дефицит ресурса: $D = 0.5$. На первом шаге центр выделяет всем агентам по 0.1 единице ресурса, то есть количество, необходимое первому агенту. Остаток в 0.5 единиц ресурса распределяется между вторым, третьим, четвертым и пятым агентами. Так как $0.5 / 4 = 0.125 > r_2 – 0.1 = 0.1$, то все четыре агента получают по 0.1 единицы ресурса. Затем остаток, равный 0.1, распределяется между третьим, четвертым и пятым агентами, которые получают в равновесии (а это равновесие, так как даже третий агент получает меньше оптимального для него количества) по 0.23(3) единицы ресурса. Определив равновесное распределение ресурса, можно найти равновесные заявки агентов. Если центр использует механизм пропорционального распределения, то в равновесии третий, четвертый и пятый агенты сообщат максимально возможные заявки (равные единице), а первый и второй агенты – такие заявки, чтобы получить оптимальное для себя количество ресурса. Эти заявки могут быть найдены из системы из двух уравнений с двумя неизвестными: $s_1 / (3 + s_1 + s_2) = 0.1$, $s_2 / (3 + s_1 + s_2) = 0.2$, откуда $s_1^* = 3/7$, $s_2^* = 6/7$. Видно, что в исходном механизме все агенты искажают информацию, а в соответствующем прямом механизме говорят правду.

<u>Механизмы обратных приоритетов.</u> Механизмы обратных приоритетов, в которых $h_i(s_i)$ является убывающей функцией s_i, $i \in I$, обладают, несомненно, рядом преимуществ по сравнению с механизмами прямых приоритетов. Проведем анализ механизма обратных приоритетов с функциями приоритета:

$$h_i = A_i / s_i,\ i \in I,$$

где $\{A_i\}_{i \in I}$ – некоторые константы. Величина A_i характеризует потери ОС, если i-ый агент вообще не получит ресурса. Тогда отношение A_i / s_i определяет удельный эффект от использования ресурса. Поэтому механизмы обратных приоритетов иногда называют механизмами распределения ресурса пропорционально эффективности (ПЭ-механизмами).

Пусть имеются три агента ($n = 3$), $A_1 = 16$, $A_2 = 9$, $A_3 = 4$; $R = 18$. Предположим сначала, что целью агентов является получение максимального количества ресурса. Определим ситуацию равновесия Нэша. Легко заметить, что функция $x_i(s) = \min\{s_i, g(A_i / s_i)\}$ достигает максимума по s_i в точке, удовлетворяющей условию $s_i = g(A_i / s_i)$. Следовательно, $x_i^* = s_i^* = \sqrt{g A_i}$. Определим параметр g из балансового ограничения $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sqrt{g} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i} = R$. Тогда $g = \left(R \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i} \right)^2$. Для рассматриваемого примера $g = 4$, а равновесные заявки, определяемые из условия

$$x_i^* = S_i^* = R \frac{\sqrt{A_i}}{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{A_j}},$$

равны $s_1^* = 8$; $s_2^* = 6$, $s_3^* = 4$. Проверим, что это действительно равновесие Нэша. Возьмем первого агента. Если он уменьшит свою заявку: $s_1 = 7 < s_1^*$, то $s_1 + s_2^* + s_3^* < R$. Следовательно, $x_1 = s_1 = 7 < x_1^*$. Если же $s_1 = 9 > s_1^*$, то $\gamma \approx 4.5$, $x_1 = 8 \equiv x_1^*$.

Легко показать [3, 4], что вычисленные стратегии являются для агентов гарантирующими, то есть, максимизируют их выигрыши при наихудших стратегиях остальных.

Если функции предпочтения агентов имеют максимумы в точках $\{r_i\}_{i \in I}$, то, если $s_i^* > r_i$, то i-ый агент закажет ровно r_i и столько же получит, так как при уменьшении заявки его приоритет возрастает. Именно таким образом выделяется множество приоритетных потребителей ресурса.

Более того, можно показать, что при достаточно большом числе агентов механизм обратных приоритетов со штрафами за несовпадение ожидаемого и планируемого эффекта оптимален в смысле суммарной эффективности [3, 4].

Конкурсные механизмы. Одним из условий повышения эффективности управления является разработка механизмов управления, побуждающих агентов к максимальному использованию всех резервов, включению в соревнование. Поэтому достаточно широкую распространенность получили так называемые конкурсные механизмы. Их особенностью является то, что агенты участвуют в соревновании по получению ресурса, льготных условий финансирования, участию в проекте и т.д.

При обсуждении механизмов обратных приоритетов подчеркивалось, что ресурс распределяется пропорционально эффективности $\xi_i = \varphi_i(x_i, r_i) / x_i$ его использования агентами. В конкурсном механизме ресурс получают только победители конкурса (на всех агентов ресурса может не хватить).

Предположим, что агенты сообщают центру две величины: – заявку на ресурс s_i и оценку ξ_i ожидаемой эффективности его использования. Ожидаемый эффект для ОС в целом от деятельности i-го агента в этом случае равен $w_i = \xi_i s_i$, $i \in I$. Упорядочим агентов в порядке убывания эффективностей: $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \ldots \geq \xi_n$.

Понятно, что агенты могут наобещать золотые горы, лишь бы получить финансирование. Поэтому при использовании конкурсных механизмов центр должен организовать действенную систему контроля за выполнением взятых обязательств. Введем систему штрафов: $c_i = a\left(x_i s_i - j_i(s_i)\right), a > 0$, $i \hat{I} I$, пропорциональных отклонению ожидаемой эффективности $x_i s_i = w_i$ от реальной – $j_i(s_i)$. Отметим, что величина $(x_i s_i - j_i(s_i))$ характеризует обман, на который сознательно идет агент ради победы в конкурсе. Целевая функция агента имеет вид:

$$f_i(j_i, x_i) = m j_i(s_i) - a\left[x_i s_i - j_i(s_i)\right], i \hat{I} I,$$

где m – доля эффекта, остающаяся в распоряжении агентов (то есть $m\, j_i(s_i)$ – его доход). Отметим, что агент штрафуется только в случае, если $x_i s_i > j_i(s_i)$. Если реальная эффективность оказалась выше ожидаемой, то штрафы равны нулю.

Ресурс R, имеющийся в распоряжении центра, распределяется следующим образом: первый агент (агент, имеющий максимальную эффективность) получает ресурс в запрашиваемом объеме s_1. Затем получает ресурс (в объеме s_2) агент с меньшей (второй по величине) эффективностью и так далее, пока не закончится весь ресурс. То есть центр раздает ресурс в требуемом объеме в порядке убывания эффективностей до тех пор, пока не закончится ресурс. Агенты, получившие ресурс в полном объеме, называются *победителями конкурса*. Существенным при этом является то, что некоторые агенты (например, последний (в упорядочении по эффективности) из победителей конкурса) могут получить ресурс не в полном объеме и, тем не менее, принести определенный эффект. Поэтому рассматриваемые конкурсы называются *непрерывными*, в отличие от дискретных конкурсов, рассматриваемых в разделе 5.

Отметим, что при использовании такой процедуры победа в конкурсе зависит только от величины эффективности x_i и не зависит от величины заявки s_i. Поэтому агенты будут стремиться максимизировать свои целевые функции, то есть закажут такое количество ресурса, чтобы в случае победы значение их целевой функции было максимально.

Обозначим m – максимальный номер агента, победившего в конкурсе (то есть победителями являются агенты с номерами $j = \overline{1, m}$). Нетрудно показать, что все победители сообщат одинаковые оценки эффективности, то есть $x_j^* = x^*$, $j = \overline{1, m+1}$. Более того, при достаточно общих предположениях о функциях штрафов конкурсные механизмы обеспечивают оптимальное распределение ресурса [3, 4].

Механизмы распределения затрат. Выше рассматривались механизмы распределения ресурса, в которых агенты являлись потребителями этого ресурса. Задача, стоявшая перед центром, заключалась в поиске механизма, удовлетворяющего тем или иным свойствам: оптимальность (в смысле максимальной эффективности), неманипулируемость и т.д. Двойственной, в некотором смысле, к задаче распределения ресурса является задача распределения затрат.

Предположим, что агенты заинтересованы (причем каждый – в той или иной степени) в производстве (покупке) некоторого *общественного блага*. В качестве общественного блага может выступать новая технология, производственное оборудование, эксперт, информация и т.д. Смысл термина «общественное» заключается в том, что пользоваться этим благом может каждый из агентов. Стоимость (цена) этого блага фиксирована, следовательно, для того, чтобы произвести его (купить) агентам необходимо «скинуться» и наслаждаться потреблением этого блага (предполагается, что от потребления каждый агент получает определенный доход). Вопрос заключается в том – сколько должен заплатить каждый из агентов или, другими словами, как распределить затраты между агентами.

Если центр знает «степень удовлетворения» каждого из агентов от пользования общественным благом, то можно предлагать различные принципы распределения затрат – поровну, пропорционально потребности в потреблении, степени удовлетворенности и т.д. Какой из этих принципов является наиболее «справедливым» – отдельный вопрос. Но, как правило, потребности агентов известны только им самим. А если затраты агента зависят от его сообщений (которые невозможно или достаточно трудно проверить), то он, очевидно, постарается внести поменьше и «прокатиться» за счет других (free rider problem). Следовательно, как и в механизмах распределения ресурса, в механизмах распределения затрат возникает проблема манипулируемости.

Для начала рассмотрим простейший пример. Пусть имеются два города (агента), разделенные рекой. Они обращаются в строительную фирму, специализирующуюся на строительстве мостов. Фирма объявляет, что готова построить мост за C единиц (положим $C = 1$). Доходы городов от использования моста равны $q_1 = 0.4$ и $q_2 = 1.2$ единиц соответственно. Понятно, что строительство моста (мост – общественное благо) выгодно для городов, так как $q_1 + q_2 > C$. Как же следует поделить затраты между ними, то есть, сколько должен заплатить первый город – C_1, а сколько второй – C_2 ($C_1 + C_2 = C$). Рассмотрим некоторые возможные варианты.

1. Принцип равного распределения. Положим $C_1 = C_2 = C/2$. Если $q_1 > C/2$ и $q_2 > C/2$, то есть, если значения целевых функции

$$f_i = q_i - C_i,\ \ i = 1,2,$$

неотрицательны, то этот вариант является допустимым (в нашем примере это не так). Отметим, что он является неманипулируемым (у агентов ничего не спрашивают – принцип абсолютных приоритетов). Однако не всегда принцип равного распределения является «справедливым», так как, если априори известно, что q_1 ¹ q_2, то есть, доходы от потребления не равны, то, наверное, будет неправильно заставлять агентов платить поровну.

2. Принцип пропорционального распределения. Примем следующий принцип – «кому общественное благо нужнее, пусть тот больше и платит», то есть разделим затраты пропорционально доходу: $C_i = \dfrac{s_i}{S} C$, $i = 1, 2$, где $S = s_1 + s_2$, а s_i – сообщаемая центру i-ым агентом оценка собственного дохода. Проанализируем механизм пропорционального распределения затрат. Очевидно, $s_1 + s_2$ ³ C, так как если $s_1 + s_2 < C$, то строительство моста невыгодно (суммарный доход меньше затрат на строительство). Для того, чтобы целевые функции были неотрицательны, потребуем: $C_1 \leq q_1$, C_2 £ q_2. Перечисленные неравенства задают допустимую область заявок (s_1, s_2) агентов.

Понятно, что оба агента будут стремиться снизить заявки. Равновесием Нэша при этом будет множество пар заявок (s_1^*, s_2^*), представляющих собой отрезок на плоскости (s_1, s_2) – интересно отметить, что сообщение достоверной информации в механизме пропорционального распределения не является равновесием.

В силу множественности и Парето-эффективности равновесий Нэша, если агенты знают истинные доходы друг друга, то имеет место «борьба за первый ход». Например, первый агент сообщает $s_1 = 0$ ($C_1 = 0$), перекладывая все затраты на второго (он вынужден объявить $s_2 = 1$ ($C_2 = 1$)).

Легко видеть, что механизм пропорционального распределения является *механизмом равных рентабельностей*. Определим рентабельность i-го агента $r_i = (s_i - C_i) / C_i$ как отношение прибыли к затратам (прибыль определяется по сообщению агента s_i). Подставляя в процедуру пропорционального распределения, получим, что $r_1 = r_2$, то есть рентабельности агента равны (истинные рентабельности, определяемые как $(q_i - C_i) / C_i$ при этом могут быть и не равны).

3. Принцип равных прибылей. Рассмотрим следующий механизм: $C_1 = \frac{C}{2} + \frac{(s_1 - s_2)}{2}$; $C_2 = \frac{C}{2} + \frac{(s_2 - s_1)}{2}$.

Получим, что множество равновесий Нэша то же, что и в принципе пропорционального распределения.

Приведенные выше три принципа распределения затрат легко обобщаются на случай любого конечного числа агентов и, естественно, не исчерпывают все возможные варианты – на сегодняшний день известны и используются несколько десятков различных принципов [1, 2, 3, 8, 12, 13]. В большинстве из них вопрос о манипулируемости остается открытым. В то же время, в ряде случаев описанный выше для механизмов распределения ресурса результат о неманипулируемости удается перенести на определенный класс механизмов распределения затрат, которые являются двойственными к механизмам распределения ресурса – см. подробности в [1, 3, 8].

3. Механизмы активной экспертизы

Многообразие целей и задач, решаемых руководителем организации, большое число подчиненных, их возможности и способности, требования и условия, предъявляемые окружающей средой – все это требует от центра владения большим количеством информации, необходимой для принятия эффективных управленческих решений. Но возможности центра ограничены, и он не всегда может сам непосредственно получить всю эту информацию. Поэтому возникает необходимость получения нужной информации от остальных участников ОС, окружающей среды и т.д. В управлении социально-экономическими системами важную роль играют *меха-*

низмы экспертизы, то есть механизмы получения и обработки информации от экспертов – специалистов в конкретных областях.

На сегодняшний день известны десятки механизмов проведения опросов экспертов и обработки их мнений. Детальное их описание выходит за рамки настоящей работы. Нас будет интересовать лишь один из аспектов процедур экспертного оценивания, а именно – возможность искажения информации агентами.

Представим себе следующую ситуацию. Центр хочет получить информацию, например, о производственных возможностях агентов. Самим агентам, естественно, их возможности известны, и они могут выступать в роли экспертов. Предположим, что центр устраивает опрос агентов и на основании их информации принимает управленческое решение. Так как принимаемое центром решение непосредственно затрагивает интересы агентов (а принимается оно на основе полученной от них же информации), то, скорее всего, каждый агент сообщит такую информацию, которая приведет к принятию наиболее выгодного для него решения. Простейший пример – когда центр спрашивает у агентов – какое количество финансовых ресурсов необходимо для выполнения определенного задания?, вряд ли можно надеяться, что агенты скажут правду (особенно при нехватке финансов).

То есть, видим, что эксперты могут искажать информацию (манипулировать данными) в соответствии с собственными интересами. Такое их поведение называется активным, отсюда название этого раздела – *активная экспертиза*. Для центра желательно построить такой механизм (процедуру), при котором все эксперты говорили бы правду (такой механизм называется неманипулируемым). Возможно ли это? В ряде случаев оказывается, что возможно.

Пусть имеются n экспертов, оценивающих какой-либо объект по скалярной шкале (объектом может быть кандидат на пост руководителя, вариант финансирования и т.д.). Каждый эксперт сообщает оценку $d \le s_i \le D,\ i = \overline{1, n}$, где d – минимальная, а D – максимальная оценка. Итоговая оценка $x = p(s)$, на основании которой принимается решение, является функцией оценок, сообщенных экспертами, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Обозначим r_i – субъективное мнение i-го эксперта, то есть его истинное представление об оцениваемом объекте. Предположим, что процедура $p(s)$ формирования итоговой оценки является строго возрастающей непрерывной функцией, удовлетворяющей *условию единогласия*:

$$" \; a \; \hat{I} \; [d, D] \;\; p(a, a, \dots , a) = a.$$

Обычно предполагается, что эксперты сообщают свои истинные мнения $\{r_i\}_{i\ \hat{\imath}\ I}$. При этом если каждый из экспертов немного ошибается (несознательно и в зависимости от своей квалификации), то, например, средняя оценка $\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} r_i$ достаточно объективно и точно оценивает объект. Если эксперты заинтересованы в результатах экспертизы, то они не обязательно будут сообщать свое истинное мнение, то есть механизм $p(\cdot)$ может быть подвержен манипулированию (s_i ¹ r_i).

Формализуем интересы эксперта. Предположим, что каждый эксперт заинтересован в том, чтобы результат экспертизы x был максимально близок к его мнению r_i, то есть, примем в качестве целевой функции i-го эксперта:

$$f_i(x, r_i) = -\left|x - r_i\right|, \; i = \overline{1, n}.$$

При этом эксперт будет сообщать оценку s_i, доставляющую минимум $\left|x\left(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\right) - r_i\right|$.

Приведем пример манипулирования. Пусть $n = 3$, $d = 0$, $D = 1$, $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.5$, $r_3 = 0.6$, и центр использует следующий механизм обработки оценок: $x = p\,(s) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s_i$. Если $s_i \equiv r_i, \; i = \overline{1,3}$, то есть если все эксперты сообщают правду, то $x = 0.5$. При этом итоговая оценка совпала с истинным представлением второго эксперта, и он удовлетворен результатом полностью. Остальные же эксперты (первый и третий) не удовлетворены, так как $r_1 < 0.5$, а $r_3 > 0.5$. Следовательно, они попытаются сообщить другие s_1 и s_3. Пусть они сообщают $s_1^* = 0, \; s_2^* = 0.5, \; s_3^* = 1.$ Тогда $x^* = p\,(s_1^*, s_2^*, s_3^*) = 0{,}5.$ Получили ту же итоговую оценку. Опять первый и третий эксперты не удовлетворены. Посмотрим, могут ли они поодиночке изменить ситуацию. Если $s_1 \neq s_1^*$, а $s_2 = s_2^*, \; s_3 = s_3^*$, то $p\,(s_1, s_2^*, s_3^*) > x^*$, следовательно, первый эксперт, изменяя свою оценку, еще более удаляет итоговую оценку от собственного истинного мнения. То же можно сказать и о третьем эксперте: $p\,(s_1^*, s_2^*, s_3) < x^*$, если $s_3 \neq s_3^*$. То есть, отклоняясь поодиночке от сообщения s^*, ни один из экспертов не может приблизить итоговую оценку к своему субъективному мнению. Значит s^* = (0; 0,5; 1) – равновесие Нэша.

Определим следующие числа: $w_1 = p(d, D, D) = p(0, 1, 1) = 2/3$; $w_2 = p(d, d, D) = p(0, 0, 1) = {}^1/_3$ (отметим, что $p(0, 0, 0) = 0$ и $\pi(1, 1, 1) = 1$). При этом w_2 £ r_1 £ w_1 (1/3 £ ½ £ 2/3). То есть на отрезке $[w_2; w_1]$ эксперт номер два является «диктатором с ограниченными полномочиями» (его полномочия ограничены границами отрезка). Построим теперь для рассматриваемого примера механизм, в котором всем экспертам выгодно сообщить достоверную информацию, и итоговая оценка в котором будет та же, что и в механизме $p\,(\cdot)$.

Центр может попросить экспертов сообщить истинные значения $r = \{r_i\}_{i\ \hat{\imath}\ I}$ и использовать их следующим образом (эквивалентный прямой механизм): упорядочить экспертов в порядке возрастания сообщенных точек пика; если существует число $q \in \overline{2, n}$, такое, что w_{q-1} ³ r_{q-1}; w_q £ r_q (легко показать, что существует единственный эксперт с таким номером q), то

$$x^* = \min\,(w_{q-1};\ r_q).$$

В нашем примере $q = 2$ и $1/2 = \min\,(2/3;\ 1/2)$.

При этом, очевидно, $s_i^* = d,\ i < q,\ s_i^* = D,\ i > q$. Итак, по сообщению r центр, воспользовавшись числами w_1 и w_2, восстановил равновесие Нэша s^*.

Проверим, могут ли эксперты, сообщая $\tilde{r}_i \neq r_i$ «улучшить» (со своей точки зрения) итоговую оценку. Очевидно, что второму эксперту изменять $\tilde{r}_i \equiv r_i$ невыгодно, так как $x^*(r_1, r_2, r_3)$ º r_2. Пусть первый эксперт сообщает $\tilde{r}_1 < r_1$. Для определенности положим $\tilde{r}_1 = 0.2$. Ситуация не изменится – по-прежнему «диктатором» является второй эксперт. Если $\tilde{r}_1 > r_1$, то первый эксперт может изменить итоговую оценку только став «диктатором», то есть, сообщив $\tilde{r}_1 > r_2$. Тогда центр определит $p\,(\tilde{r}_1, r_2, r_3) = \tilde{r}_1$, но при этом $|r_1 - \tilde{r}_1| > |r_1 - r_2|$, то есть первый эксперт еще более удалил исходную оценку от r_1. То есть, изменяя сообщение $\tilde{r}_1$, первый эксперт не может приблизить итоговую оценку к r_1. Аналогично можно показать, что невыгодно манипулировать и третьему эксперту.

Таким образом, мы показали, что в эквивалентном прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для экспертов, причем итоговая оценка та же, что и в исходном механизме.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая (произвольного числа экспертов). Пусть все r_i различны и упорядочены в порядке возрастания, то есть $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ и x^* – равновесие Нэша ($x^* = p(s^*)$). По аналогии с рассмотренным выше примером можно показать, что если $x^* > r_i$, то $s_i^* = d$, если $x^* < r_i$, то $s_i^* = D$. Если же $d < s_i^* < D$, то $x^* = r_i$. При этом, если $x^* = r_q$, то $\forall j < q \quad s_j^* = d, \ \forall j > q \ \ s_j^* = D$, а сама величина s_q^* определяется из условия

$$p\left(\underbrace{d, d, \ldots, d}_{q-1}, s_q^*, \underbrace{D, D, \ldots, D}_{n-q}\right) = r_q .$$

Таким образом, для определения ситуации равновесия достаточно найти номер q. Для этого найдем $(n - 1)$ число:

$$w_i = p\left(\underbrace{d, d, \ldots, d}_{i}, \underbrace{D, D, \ldots, D}_{n-i}\right), i = \overline{1, n} .$$

При этом $w_0 = D > w_1 > w_2 > \ldots > w_n = d$, и если $w_i \le r_i \le w_{i-1}$, то $x^* = r_i$, то есть i-ый эксперт является диктатором на отрезке $[w_i; w_{i-1}]$. Легко показать, что существует единственный эксперт q, для которого выполнено $w_{q-1} \ge r_{q-1}$, $w_q \le r_q$.

Определив таким образом q, можно найти итоговую оценку в равновесии: $x^* = \min (w_{q-1}, r_q)$.

По аналогии с рассмотренным выше примером можно показать, что сообщение достоверной информации $(\tilde{r}_i \equiv r_i)_{i \in I}$ является равновесием Нэша.

Мы, фактически, доказали, что для любого механизма экспертизы $p(\cdot)$ можно построить эквивалентный прямой механизм, в котором сообщение достоверной информации является равновесием Нэша..

Таким образом, использование эквивалентных прямых механизмов позволяет организовывать процедуры экспертного оценивания, выявляющие истинные предпочтения экспертов.

4. Механизмы внутренних цен

Классическим примером, ставшим чрезвычайно популярным в экономико-математическом моделировании, является ОС, в которой агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа:

$$c_i(y_i, r_i) = \frac{1}{a}\ y_i^{a}\, r_i^{1-a},\ a\ ^{3}\ 1,\ r_i > 0.$$

Предположим, что задача центра заключается в побуждении коллектива агентов выбрать набор действий, сумма которых равна заданной величине R (содержательные интерпретации см. ниже). Пусть центр устанавливает цену l, тогда целевая функция i-го агента равна разности между доходом $l\ y_i$ и затратами:

(1) $f_i(y_i, r_i) = l\ y_i - c_i(y_i, r_i)$.

Решая задачу минимизации суммарных затрат агентов выбором ($\{x_i\}$, l) при условии x_i Î $\operatorname{Arg}\max\limits_{y_i \in A_i} f_i(y_i, r_i)$ и ограничении $\sum\limits_{i \in I} x_i = R$, получаем:

(2) $x_i(R, r) = \dfrac{r_i}{W} R,\ l(R, r) = (R / W)^{a-1}$,

где $W = \sum\limits_{i} r_i$, $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$.

Решение (2) минимизирует суммарные затраты агента при заданном ограничении на сумму действий агентов, то есть обеспечивает достижение агентами Парето оптимального равновесия. При этом цена l является множителем Лагранжа.

Рассматриваемая формальная модель имеет множество содержательных интерпретаций. В том числе: распределение объемов работ в коллективе (l – ставка оплаты) [9], распределение ресурса с ценой за ресурс l [1], распределение заказов в объединении (l – внутрифирменная цена) [10], компенсационные механизмы в оперативном управлении проектами и промышленным производством (l – ставка оплаты за сокращение продолжительности операций) [3] и др. Общим является наличие единой для всех агентов цены.

Решение (2) было получено в предположении, что центру известны коэффициенты $\{r_i\}_{i \in I}$ функций затрат агентов. Если эти коэффициенты ему неизвестны и сообщаются агентами, то возникает задача манипулируемости используемого механизма планирования.

Уникальностью рассматриваемой модели является то, что для нее существует эквивалентный прямой механизм, то есть механизм открытого управления (неманипулируемый), в котором при определенных условиях (см. ниже) сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Обоснуем последнее утверждение. Для этого предположим, что агенты сообщают центру оценки $\{s_i\}_{i \in I}$ параметров функций затрат, а центр использует следующий механизм планирования (механизм открытого управления – выбора планов и цены):

(3) $\sum_{i \in I} x_i(s, l) = R,$

(4) $x_i(s, l) = \arg \max_{y_i \in A_i} \{ l(s)\, y_i - c_i(y_i, s_i)\}.$

Содержательно, центр подставляет в целевые функции агентов сообщенные ими оценки (принимая их за истинные) и назначает агентам наиболее выгодные для них при этих оценках планы (условие (4) называется условием совершенного согласования (УСС) – см. раздел 1). Параметр l выбирается таким образом, чтобы планы $x_i(s, l)$ удовлетворяли балансовому ограничению (3).

Решение задачи (3)-(4) (*механизм внутренних цен*) имеет вид:

(5) $x_i(R, s) = \dfrac{s_i}{V} R,\ l(R, s) = (R / V)^{a-1},$

где $V = \sum_{i \in I} s_i$, $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$. Отметим чрезвычайно важную для дальнейшего анализа схожесть выражений (5) и (2).

Если выполнена *гипотеза слабого влияния* (ГСВ – при достаточно большом числе агентов влияние сообщения конкретного агента на общее управление $l(R, s)$ мало), то, подставляя (5) в (1), находим, что при любых сообщениях остальных агентам максимум целевой функции i-го агента по его сообщению достигается при $s_i = r_i$, то есть при ГСВ сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Механизм внутренних цен (5) достаточно уникален. Во-первых, он является неманипулируемым механизмом (механизмом открытого управления), имеющим ту же эффективность, что и механизм (2) в условиях полной информированности. Во-вторых, он минимизирует суммарные затраты агентов на выполнение общего планового задания. И, наконец, в-третьих, он допускает произвольную децентрализацию, то есть каждая подсистема может рассматриваться как один агент, действием которого является сумма действий входящих в нее агентов, имеющий функцию затрат типа Кобба-Дугласа с параметром, равным сумме параметров соответствующих агентов.

Приведенные результаты могут быть усилены, то есть обобщен на случай, когда функции затрат агентов имеют вид $c_i(y_i,r_i) = r_i$ $j(y_i / r_i)$, где $j(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция. При этом цена за ресурс определяется следующим выражением: $l(R, s) = j'(R/V)$ (ср. с (5)), а оптимальные планы – по-прежнему выражением (5). Отметим, что возможность идеального агрегирования в рассматриваемой модели обусловлена видом функций затрат агентов и процедур планирования. Для произвольных функций затрат агентов полученные результаты в общем случае не имеют места.

В заключение настоящего раздела исследуем эффективность рассматриваемого выше механизма открытого управления с внутренними ценами.

До сих пор считалось, что целевая функция центра определяется доходом от выполненных работ суммарным объемом R (при постоянном объеме доход постоянен) и суммарными затратами агентов по выполнению этих работ. Механизмы (2) и (5) минимизируют суммарные затраты агентов при условии, что центр назначает единую для всех агентов цену. Если центр имеет собственные интересы, заключающиеся наряду с выполнением заданного объема работ в минимизации суммарных выплат агентам, то механизм с внутренними ценами может рассматриваться не только как механизм планирования, но и как механизм пропорционального стимулирования, в котором вознаграждение агентов пропорционально его действию. Коэффициент пропорциональности при этом является ценой, например, ставкой зарплаты (см. [9] и содержательные интерпретации выше).

Известно, что при монотонных непрерывных функциях затрат пропорциональные системы стимулирования не эффективны. В частности, если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то оптимальные компенсаторные механизмы стимулирования имеют строго большую эффективность, чем пропорциональные (см. [9, 10]). Проиллюстрируем это утверждение.

Минимальные затраты на стимулирование $J(x)$ по реализации вектора действий x Î A компенсаторной системой стимулирования равны $J_K(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)$. При использовании пропорциональной системы стимулирования эти затраты определяются следующим образом: $J_L(x) = l \sum_{i=1}^{n} x_i^*$, где x_i^* удовлетворяет (2).

Отношение $J_L(x) / J_K(x) = a$ ³ 1 не зависит от вектора действий и показывает во сколько раз центр «переплачивает» агентам, используя единую внутреннюю цену, по сравнению с минимально необходимыми для реализации заданного вектора действий затратами на стимулирование. Следовательно, хотелось бы найти механизм управления, для которого, как и для механизма внутренних цен, существовал бы эквивалентный механизм открытого управления (обеспечивающий неманипулируемость в случае неполной информированности центра о моделях агентов), но который имел бы большую – желательно такую же или «почти» такую же, как и у оптимального компенсаторного механизма стимулирования – эффективность.

Такой механизм существует. Пусть центр использует в условиях полной информированности следующий механизм управления:

(6) $s_i(y_i, r_i) = \frac{l}{g}\, y_i^{g}\, r_i^{1-g}$, g ³ 1,

тогда целевая функция агента имеет вид (ср. с (1)):

(7) $f_i(y_i, r_i) = \frac{l}{g}\, y_i^{g}\, r_i^{1-g} - c_i(y_i, r_i)$.

В [10] доказан следующий факт: если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа $c_i(y_i, r_i) = \frac{1}{a} y_i^{a} r_i^{1-a}$, i Î I и $g = a - d$, где d Î $(0; a)$, то:

а) механизм (6) e-оптимален, где e » $d / (a - d)$;

б) в рамках ГСВ для механизма (6) существует эквивалентный механизм открытого управления.

Многочисленные примеры прикладного использования механизмов внутренних цен приведены в [9].

5. Конкурсные механизмы

Общая идея любого конкурса заключается в следующем – претенденты упорядочиваются на основании имеющейся о них информации (как объективной, так и сообщаемой самими претендентами), затем победителем (или победителями) объявляется претендент, занявший первое место (или, соответственно, несколько первых мест – в зависимости от условий конкурса). Возникающая при этом проблема заключается в том, что участники конкурса могут искажать сообщаемую информацию, то есть манипулировать ею с целью войти в число победителей.

Различают *дискретные и непрерывные конкурсы*. В первом случае претенденту требуется вполне определенное количество ресурса и любое меньшее количество ресурса его не удовлетворяет – приводит к нулевому эффекту (например, не позволяет реализовать проект, впустить изделие и т.д.). В случае же непрерывных конкурсов претендент, получая ресурс в количестве, меньше запрашиваемого, может получить эффект, отличный от нуля. Примером такой ситуации является пропорциональная зависимость между эффектом и ресурсом (эффективность постоянна.

Непрерывные конкурсы рассматривались выше в разделе "Механизмы распределения ресурса", поэтому в настоящем разделе рассматривается модель дискретного конкурса на примере задачи определения пакета инвестиционных проектов, которые получают финансирование.

Обозначим через l_i оценку ожидаемого эффекта от реализации i-го проекта, s_i – оценку объема финансирования i-го проекта. Как правило, оценка l_i определяется экспертной комиссией с учетом рыночных, экономических и социальных целей, а оценка s_i – фирмой, предлагающей проект, либо организацией, которая берется за его реализацию. Будем считать, что оценка эффекта l_i достаточно объективна, хотя, в принципе, нельзя исключить сознательное завышение или занижение оценок эффекта со стороны экспертов, заинтересованных в том или ином проекте. Что касается оценок требуемого финансирования, то здесь нельзя не учитывать тенденцию завышения требуемого объема финансирования со стороны фирм, которые берутся за его реализацию, либо которые предлагают свой проект.

Для снижения негативного влияния этой тенденции широко применяются конкурсные механизмы. Вводится некоторая оценка эффективности (приоритетности) инвестиционных проектов, зависящая как от эффекта l_i, так и от оценки объема финансирования s_i. Затем проекты упорядочиваются по убыванию эффективностей и финансируются в порядке этой очередности, пока хватает средств. Наиболее распространенными являются две оценки эффективности: $q_i = l_i / s_i$ и $q_i = l_i - a\ s_i$ (a – нормативный коэффициент, соизмеряющий эффект и затраты). Такой конкурс называется *простым*.

Как оценить эффективность конкурса? Обозначим через r_i объективную оценку объема финансирования i-го проекта (при финансировании, меньшем r_i, велик риск нереализации проекта, то есть, конкурс является дискретным). Если для всех проектов известны объективные объемы финансирования, то можно выбрать оптимальный пакет проектов Q, решив следующую задачу:

(1) $\sum_{i \in Q} l_i \to \max$,

(2) $\sum_{i \in Q} r_i \le R$,

где R – выделенный объем (фонд) финансирования.

Максимальный эффект, полученный в результате решения задачи (1)-(2) обозначим через L_{max}. Пусть Q – множество победителей конкурса. Тогда суммарный эффект от победившего пакета проектов составит

(3) $L(Q) = \sum_{i \in Q} l_i$.

Очевидно, что $L(Q) \le L_{max}$. Отношение

$$(4)\ K = \frac{L(Q)}{L_{\max}}$$

и определяет эффективность конкурсного механизма. Покажем, что эффективность простых конкурсов может быть сколь угодно малой.

Пример 1. Пусть имеется всего два проекта, причем $l_1 = 2\,e$, $r_1 = e$ (e – малое положительное число), $l_2 = 150$, $r_2 = 100$. Выделенный объем финансирования $R = 100$.

При оценке по отношению $q_1 = l_1 / r_1 = 2;\ q_2 = l_2 / r_2 = 1{,}5$, очевидно, победителем будет первый проект, который получает финансирование $s_1 = e$. На второй проект денег не хватает. Таким образом $Q = \{1\}$, $L(Q) = 2\,e$. Максимальный эффект, очевидно, равен $L_{max} = 150$, когда финансируется второй проект. Эффективность конкурсного механизма составляет $K = 2\,e / 150 = e / 75$ и может быть сколь угодно малой.

При оценке эффективности по разности $q_1 = l_1 – a\,r_1;\ q_2 = l_2 – a\,r_2$ при $a = 1{,}5$ имеем: $q_1 = 0{,}5\,e$, $q_2 = 0$, и при любом e победителем будет первый проект. Эффективность конкурсного механизма в этом случае будет такой же, как и при оценке эффективности по отношению, то есть может быть сколь угодно малой.

Получим гарантированную оценку эффективности простого конкурса с учетом того, что, во-первых, победители конкурса могут завышать величину требуемых средств, а во-вторых, что остатка средств фонда может не хватить на реализацию очередного проекта.

Гарантированная эффективность K простого конкурса не ниже следующей величины:

$$(5)\ K = \frac{1}{2 - a + \dfrac{1}{b - 1}},$$

где $a = Э_{min} / Э_{max}$ ($Э_{min}$ – минимальная, а $Э_{max}$ – максимальная эффективность проектов, представленных на конкурс), $b = R / r$ (R – размер фонда, а r – максимальная величина средств, требуемая для реализации одного проекта).

Докажем справедливость оценки (5) эффективности простого конкурса. Пусть $Э_1$ – максимальная эффективность проектов, не попавших в число победителей, l_2 – суммарный эффект от победивших проектов, s_2 – суммарная оценка финансирования победивших проектов. Очевидно, что $l_2 > Э_1\, s_2$ и $R - s_2 < r$. Следовательно, для полученного эффекта мы имеем оценку:

$$l_2 > Э_1\, s_2 > Э_1\,(R - r).$$

В действительности, победившие проекты можно реализовать с меньшим объемом финансирования: $r_2 > \dfrac{Э_1(R - r)}{Э_{\max}}$, а остаток средств $D = R - r_2 < R - \dfrac{Э_1(R - r)}{Э_{\max}}$ использовать для реализации других проектов, получив дополнительный эффект не менее

$$Э_1\, D = Э_1 \left[\mathrm{R} - \frac{Э_1(R - r)}{Э_{\max}} \right].$$

Таким образом, для эффективности простого конкурса получаем следующую оценку:

$$K \text{ з } \frac{Э_1(R - r)}{Э_1(R - r) + Э_1\left[\mathrm{R} - \dfrac{Э_1(Ф - r)}{Э_{\max}} \right]} \text{ з}$$

$$\geq \frac{1}{2 - \dfrac{Э_{\min}}{Э_{\max}} + \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{R}}{r} - 1}} = \frac{1}{2 - a + \dfrac{1}{b - 1}}.$$

Из определения эффективности следует, что максимальная эффективность простого конкурса достигается в случае, когда $Э_{min} = Э_{max}$ (проекты близки по эффективности) и значение r мало (проекты требуют небольшого финансирования). Минимальная эффективность может иметь место при наличии проектов, объемы финансирования которых сравнимы с величиной фонда R. Если r » 0, то оценка эффективности принимает более простой вид:

$$K \geq \frac{1}{2 - a} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для небольших проектов эффективность простого конкурса всегда больше 50%.

Рассмотрим *прямой конкурсный механизм*, суть которого в том, что победители определяются в результате непосредственного решения задачи на максимум суммарного эффекта

(6) $\sum_{i \in Q} \mathbf{l}_i \to \max$

при ограничении

(7) $\sum_{i \in Q} s_i \le R$.

Легко показать, что *эффективность прямого конкурсного механизма* не менее чем 0,5. Эта оценка не улучшаема, что показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть имеются два проекта со следующими параметрами: $l_1 = 100 + e$, $r_1 = 50$, $l_2 = 100$, $r_2 = 50$, где e – малое положительное число. Пусть при выделенном объеме финансирования $R = 100$ претенденты сообщили следующие оценки: $s_1 = 100$, $s_2 = 50$.

Очевидно, что в результате решения задачи (6), (7) победителем будет первая организация, то есть $Q = \{1\}$, $L(Q) = 100 + e$. В то же время, как легко убедиться, $L_{max} = 200 + e$ и поэтому

$$K = \frac{100 + e}{200 + e} = 0{,}5 + \frac{e}{400 + 2e} .$$

Так как e – любое положительное число, то K может быть сколь угодно близким к 0,5.

Рассмотрим более сложный вариант организации конкурса, так называемый *двухэтапный конкурс*. На первом этапе определяются все решения задачи (6), (7), для которых имеет место соотношение

(8) $L(Q)$ ³ $d\, L_0$,

где L_0 – суммарный эффект в оптимальном решении этой задачи, $0 < d \le 1$ – фиксированный параметр. Другими словами, выбираются все пакеты проектов, для которых суммарный эффект не менее, чем определенная доля d от максимального эффекта при сообщенных оценках $\{s_i\}$. На втором этапе из всех пакетов, которые прошли первый тур, то есть удовлетворяют условию (8), выбирается пакет, требующий минимального финансирования. Для данного механизма возникает вопрос, какое d выбрать. Для ответа на этот вопрос рассмотрим случай двух проектов. При заданном значении

d возможны четыре варианта (для определенности примем, что l_1 ³ l_2):

а) $l_2 / l_1 < d$ и $r_1 + r_2 > R$. В этом случае на первом этапе побеждает только один пакет, состоящий из одного первого проекта. Очевидно, что эффективность $K = 1$.

б) $l_2 / l_1 < d$ и $r_1 + r_2$ £ R. В этом случае на первом этапе также побеждает только один пакет, состоящий из первого проекта. Однако, поскольку $L_{max} = l_1 + l_2$, то эффективность будет равна

$$K = \frac{\mathbf{l}_1}{\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2} > \frac{1}{1+d}.$$

в) $l_2 / l_1 \geq d$ и $r_1 + r_2 > R$. В этом случае побеждают два пакета, один из которых включает первый пакет, а другой – второй. На втором этапе в худшем случае побеждает второй проект (если $r_2 < r_1$) и поэтому эффективность равна $K = \frac{\mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_1} \geq d$.

г) $l_2 / l_1 \geq d$ и $r_1 + r_2$ £ R. В этом случае наименее благоприятный вариант состоит в том, что на первом этапе побеждают два пакета, как и в варианте «в», а на втором этапе – второй проект. Это произойдет в том случае, если $s_1 + s_2 > R$ и в то же время $s_2 < s_1$. Если принять, что $s_1 = r_1$ (побежденный сообщает минимальную оценку), то наименее благоприятный для организатора вариант возможен, если $r_1 > R / 2$ и $r_2 < r_1$. В этом случае эффективность будет равна $K = \frac{\mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2} \geq \frac{d}{1+d}$.

Видно, что в случае «г» эффективность минимальна. Поскольку в этом случае эффективность растет с ростом d, то следует взять $d = 1$. Таким образом, снова приходим к прямому конкурсу.

По-видимому, при сделанных предположениях не существует конкурсного механизма, обеспечивающего гарантированную эффективность более чем 0,5. Ситуация становится более благоприятной, если принять другие гипотезы о поведении участников конкурса. До сих пор считалось, что поведение участников конкурса определяется стремлением к равновесной ситуации (точке Нэша). Если принять, что участники конкурса стремятся к максимизации гарантированного результата, то выявляются преимущества двухэтапного конкурса. Действительно, в этом случае для уверенной победы на втором этапе участник, представляющий первый проект, либо должен быть уверен, что на первом этапе победит только один пакет, состоящий из первого проекта, либо он должен сообщить минимальную оценку затрат $s_1 = r_1$ для повышения шансов на победу во втором этапе. Аналогично второй участник сообщит $s_2 = r_2$. Отсюда следует, что наименее благоприятный случай в варианте «г» невозможен, и эффективность конкурса в варианте «г» равна единице. Таким образом, гарантированная эффективность будет равна $K = \min\left(d, \frac{1}{1+d}\right)$.

Максимум этой величины достигается при $d = \frac{1}{1+d}$. Решая это уравнение, получаем оптимальную величину d:

$$d_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6\,.$$

Полученная оценка гарантированной эффективности, по-видимому, справедлива и для случая, когда число участников больше двух. Это следует из предположения, что с ростом числа участников эффективность конкурса не уменьшается.

6. Механизмы обмена

Многие экономические задачи могут быть сформулированы как задачи обмена. Поэтому в настоящем разделе иллюстрируется возможность применения предложенного в [7] метода построения неманипулируемых механизмов обмена для решения задач планирования и стимулирования в управлении организационными системами. В основе метода лежит сформулированный в разделе 1 принцип открытого управления. Его использование позволяет получать эффективные решения для задач обмена в условиях неполной информированности руководящего органа (центра) о параметрах агентов. В качестве иллюстративных примеров приводятся задачи стимулирования и задачи планирования – ценообразования – в двухэлементной иерархической организационной системе (ОС) с неполной информированностью центра.

Модель обменной схемы. Введем основные понятия [7], необходимые для дальнейшего изложения.

Обмен – процесс перераспределения ресурсов между участниками организационной системы.

Множество вариантов обмена – множество индивидуально рациональных распределений ресурсов, переход к которым возможен в рамках данной организационной системы.

Обменная схема – организационная система, для которой множество вариантов обмена не пусто.

Таким образом, обменная схема – это организационная система, участники которой (или хотя бы их часть) заинтересованы во взаимодействии между собой, то есть в перераспределении ресурсов.

Ниже рассматривается двухэлементная обменная схема, в которой присутствуют два вида ресурсов. Для задачи стимулирования [9] участниками обменной схемы является работодатель (центр) и наемный работник (агент), а в качестве ресурсов рассматриваются деньги и производимый агентом продукт. Для задачи планирования – ценообразования – участниками обменной схемы являются продавец (производитель товара), выступающий в роли центра, и покупатель, выступающий в роли агента. Ресурсами в задачи ценообразования являются произвольно делимый товар и деньги.

Постановки обеих задач идентичны. Центр должен наиболее выгодным для себя образом совершить обмен с агентом. Центр не имеет точной информации о «типе» агента – параметре, от которого зависит функция полезности последнего. Примером типа агента является эффективность его деятельности, производительность труда и т.д. Центр предлагает агенту *механизм обмена* – в зависимости от сообщенной агентом оценки своего типа ему назначаются различные варианты обмена.

Традиционно, *тип* агента вводится таким образом, чтобы отражать «полезность» деятельности агента для центра – чем лучше тип агента (больше его абсолютное значение), тем большую прибыль может получить центр от взаимодействия с данным агентом. В задаче стимулирования, чем выше тип агента, тем меньше его затраты на изготовления одного и того же количества продукции. В задаче ценообразования, чем выше тип агента, тем выше он ценит предлагаемый ему центром товар.

Общий принцип построения неманипулируемых механизмов обмена основывается на условии совершенного согласования – см. раздел 1. Вариант обмена, соответствующий заявке агента, должен быть наиболее выгодным из всех предлагаемых вариантов обмена для агента, чей тип соответствует данной заявке. Тем самым центр побуждает агента сообщать истинное значение своего типа.

Математическая модель обменной схемы имеет следующий вид. Предпочтения участников организационной системы (агента 0 и агента 1) описываются следующими функциями:

$$j_0(y^0{}_1, y^0{}_2, r^0) = r^0 y^0{}_2 + y^0{}_1,$$

$$j_1(y^1{}_1, y^1{}_2, r^1) = y^1{}_1 - (Y_2 - y^1{}_2)^2 / 2r^1,$$

где y^i_j – количество имеющегося у агента i ресурса типа j, r^i – тип агента i, $i, j = 0, 1$; начальное распределение ресурсов $y^0 = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}$, то есть, весь ресурс первого типа сосредоточен у агента 0, а весь ресурс второго типа – у агента 1.

Ограничения индивидуальной рациональности, определяющие приемлемые для каждого из агентов варианты обмена, записываются следующим образом: $IR(y^0) = \{\forall i = 0, 1 \quad j_i(\overline{y_i}) \geq j_i(\overline{y_i^0})\}$.

Иными словами, рациональными с точки зрения каждого из агентов являются варианты обмена, в результате которых значение их целевой функции не уменьшится.

Определим трансферт ресурса типа j для агента i в процессе обмена $y^0 \rightarrow y$: $x^i_j = y^i_j - y^{i\,0}_j$ и функцию полезности i-го агента от обмена: $f_i(\overline{x_i}) = j_i(\overline{x_i} + \overline{y_i^o}) - j_i(\overline{y_i^o})$ [7].

В описанной выше обменной схеме не была введена иерархия участников. Для рассмотрения задач стимулирования и ценообразования одному из участников присваивается статус центра, другому – статус агента. При этом центр предлагает агенту различные варианты обмена, из которых агент выбирает наиболее приемлемый для себя вариант и сообщает об этом центру. Обмен производится по выбранному агентом варианту.

Задача стимулирования. Предложенная модель ОС может быть использована для решения задачи стимулирования в условиях неполной информированности центра о параметрах организационной системы. Для этого, агент 0 трактуется как центр (работодатель), а агент 1 – как агент (наемный работник).

Функция полезности центра от обмена: $f_0(x_1, x_2) = r^0 x_2 - x_1$.

Функция полезности агента от обмена: $f_1(x_1, x_2) = x_1 - \frac{x_2^{\ 2}}{2r}$.

При этом, трансферт ресурса типа 1 является оплатой центром выполняемой агентом работы, а трансферт ресурса типа 2 – объем выполненных работ, Y_1 – бюджетное ограничение центра, Y_2 – максимальный объем работ, который может выполнить агент (или максимальный объем работ, который требуется центру).

Задача центра – поиск механизма обмена, максимизирующего его ожидаемую полезность от обмена с центром $Ef_0\,(p\,(s)) \to \max\limits_{p\,(s)}$, при условии, что центру не известно значение типа работника, а известно лишь, что тип агента равномерно распределен на множестве $\Omega^1 = [r^1_{min}, r^1_{max}]$.

Центр предлагает агенту механизм обмена оплаты на работу $p(s) = (x_1(s), x_2(s))$, в котором количество выполняемой работы и размер оплаты зависит от сообщения s агентом оценки своего типа. Предлагаемый центром механизм обмена будет механизмом открытого управления, если он будет удовлетворять приведенному в разделе 1 условию совершенного согласования. В [7] проводится подробный анализ условий совершенного согласования для механизмов обмена. В результате, для рассматриваемой модели обменной схемы для выполнения условия совершенного согласования, то есть для неманипулируемости механизма обмена, необходимо и достаточно, чтобы механизм обмена удовлетворял следующим требованиям:

(1) $\frac{dx_1}{dr}(r) - \frac{x_2(r)}{r}\frac{dx_2}{dr}(r) = 0$,

(2) $-\frac{x_2(r)}{r^2}\frac{dx_2}{dr}(r) \le 0$,

(3) $\forall s \in \Omega^1$, $\frac{dx_1}{ds}(s) \ge 0, \frac{dx_2}{ds}(s) \ge 0$.

Условие (3) определяет принципиальное свойство неманипулируемого механизма обмена – количество выполняемой работы и оплата за нее растут с ростом сообщаемой работником оценки собственного типа. Иными словами, чем лучше охарактеризовал себя работник, тем больший предлагается ему выполнить объем работ за большую оплату.

Если механизм обмена удовлетворяет условиям (1)-(3), то прибыль агента от обмена (его функция полезности $n_1(r) = f_1(x_1(r), x_2(r), r)$) может быть записана в следующем виде:

(4) $n_1(r) = \int\limits_{r^1_{\min}}^{r} \frac{x_2(t)^2}{2t^2} dt$.

Проанализировав выражение (4), получаем, что для построения механизма обмена, максимизирующего ожидаемую прибыль центра, необходимо решить следующую задачу динамического программирования (см. Приложение 2):

$$\mathrm{E}f_0(\Omega^1) = \int\limits_{r^1_{\min}}^{r^1_{\max}} [r^0 x_2(r) - \frac{x_2(r)^2}{2r} - \int\limits_{r^1_{\min}}^{r} \frac{x_2(t)^2}{2t^2} dt\,] dr \xrightarrow[x_2]{} \max$$

$$0 \le x_2(r) \le Y_2,\ 0 \le x_1(r) \le Y_1.$$

Не останавливаясь подробно на процессе решения, рассмотренном в [7], приведем вид получаемого механизма обмена:

$$x_2(r) = \frac{r^0 r^2}{r^1_{\max}}, \forall r \in \Omega',\ x_1(r) = r^{0\,2}\, \frac{4r^3 - r^{1\,3}_{\min}}{6 r^{1\,2}_{\max}},\ \forall r \in \Omega',$$

$$r \in \Omega' = [r^1_{\min}, \tilde{r}^1],$$

$$\tilde{r} = \min\{r^1_{\max}, (r^1_{\max} Y_2 r^{0^{-1}})^{1/2}, (\frac{3}{2} r^2_{\max} Y_1 + \frac{1}{4} r^3_{\min})^{1/3} r^{0^{-2/3}}\}.$$

Здесь под $\tilde{r}$ подразумевается максимальный тип агента, для которого предлагается отдельный план обмена. Данный тип определяется исходя из бюджетного ограничения центра или ограничения на максимальный объем работы. Если сообщаемый тип агента лучше, чем $\tilde{r}$, то ему предлагается план обмена для типа $\tilde{r}$.

На рисунке 1 приводится графическое изображение полученного механизма обмена. Видно, что, с улучшением типа, сообщаемого агентом, уменьшается удельная стоимость выполняемой им работы (отношение выплачиваемого центром вознаграждения к объему выполняемой работы). При этом проиллюстрировано, каким образом тип $\tilde{r}$ определяется из ограничений на ресурсы (в данном случае из бюджетного ограничения центра).

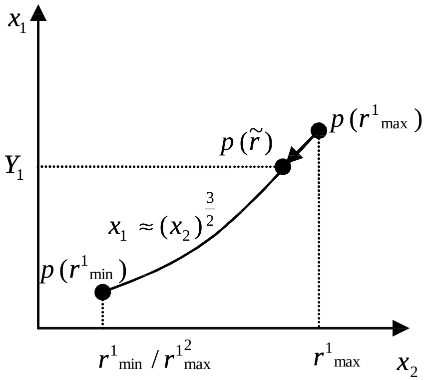

Рис. 1. Неманипулируемый механизм обмена для задачи стимулирования

Задача ценообразования. Аналогичным задаче стимулирования образом можно рассмотреть задачу ценообразования. В роли центра выступает продавец товара. Его целевая функция от обмена: $f_1(x_1, x_2) = x_1 - \frac{x_2^{\ 2}}{2r^1}$. Соответственно, целевая функция покупателя, выступающего в роли активного элемента, имеет следующий вид: $f_0(x_1, x_2) = r\,x_2 - x_1$.

Продавец обладает произвольно делимым товаром в количестве Y_2. Покупатель обладает деньгами в количестве Y_1.

Задача продавца – поиск механизма обмена, максимизирующего его ожидаемую полезность от обмена с покупателем:

$$\mathrm{Ef}_1(p(s)) \to \max_{p(s)},$$

при условии, что ему не известно значение типа покупателя, а известно лишь, что тип агента равномерно распределен на множестве $\Omega^0 = [r^0_{min}, r^0_{max}]$.

Как и в задаче стимулирования, проблема сводится к поиску неманипулируемого механизма обмена $p(s) = (x_1(s), x_2(s))$, то есть механизма открытого управления. Для этого необходимо и достаточно, чтобы механизм обмена удовлетворял следующим требованиям [7]:

(5) $r\dfrac{dx_2}{dr}(r)-\dfrac{dx_1}{dr}(r)=0$,

(6) $-\dfrac{dx_2}{dr}(r)\le 0$,

(7) $\forall s\in\Omega^0$, $\dfrac{dx_1}{ds}(s)\ge 0, \dfrac{dx_2}{ds}(s)\ge 0$.

При выполнении условий (5)-(7) прибыль агента от обмена (его функция полезности $n_0(r)=f_0(x_1(r),x_2(r),r)$) может быть записана в следующем виде:

(8)$n_0(r)=\int\limits_{r^0_{\min}}^{r} x_2(t)dt$.

Задача построения механизма обмена, максимизирующего ожидаемую прибыль центра, сводится к решению следующей задачи динамического программирования:

$$\mathrm{E}f_1(\Omega^0)=\int\limits_{r^0_{\min}}^{r^0_{\max}}[rx_2(r)-\frac{x_2(r)^2}{2r^1}-\int\limits_{r^0_{\min}}^{r}x_2(t)dt\,]dr\underset{x_2}{\rightarrow}\max$$

$$0\le x_2(r)\le Y_2,\ 0\le x_1(r)\le Y_1.$$

Не останавливаясь подробно на процессе решения, рассмотренном в [7], приведем вид получаемого механизма обмена, в предположении, что выполнены условия $x_2(r^0_{max})$ £ Y_2 и $x_1(r^0_{max})$ £ Y_1:

$$x_2(r)=r^1(2r-r_{\max}),\ \forall r\in\Omega'=[\hat{r},r^0_{\max}],\ x_2(r)=0,\ \forall r\in\Omega^0/\Omega';$$

$$x_1(r^0)=r^1(r^2-(r^0_{\max}-\hat{r})\hat{r}),\ \ \forall r\in\Omega'=[\hat{r},r^0_{\max}],\ x_1(r^0)=0,$$

$$\forall r\in\Omega^0/\Omega';\ \hat{r}=\max[r^0_{\min},r^0_{\max}/2].$$

Здесь под $\hat{r}$ подразумевается наихудший тип покупателя, для которого предлагается отдельный план обмена. Если сообщаемый тип покупателя хуже, чем $\hat{r}$, то ему предлагается «нулевой» план обмена, то есть обмен не производится.

По аналогии с механизмом обмена для задачи стимулирования, при невыполнении условий $x_2(r^0_{max})\le Y_2$ и $x_1(r^0_{max})\le Y_1$ определяется значение $\tilde{r}$ – как максимальный тип покупателя, с которым может обмениваться продавец в рамках существующих ресурсных ограничений.

На рисунке 2 приводится графическое изображение полученного механизма обмена для задачи ценообразования. Из графика видно, что, с улучшением типа, сообщаемого покупателем, уменьшается удельная стоимость предлагаемого ему товара: можно сказать, что ростом партии товара увеличивается оптовая скидка.

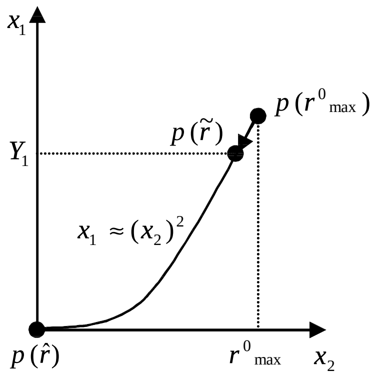

Рис. 2. Неманипулируемый механизм обмена для задачи ценообразования

В завершение настоящего раздела следует сказать, что при решении задач, подобных рассмотренным выше, возможен отказ от такого достаточно сложного с практической точки зрения параметра, как тип агента. Центр не спрашивает у агента его тип, а предлагает просто выбрать один из вариантов обмена. Иными словами, в задаче стимулирования или ценообразования центр предлагает агенту выбрать один из вариантов обмена из меню (контракта), описываемого кривой, изображенной на рисунках 1 и 2.

7. Литература

(работы, отмеченные звездочкой, можно найти в электронной библиотеке на сайте *www.mtas.ru*)

1 *Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А., Юсупов Б.С. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике. М.: ИПУ РАН, 1997. – 57 с.
2 Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 – 25.
3 Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. – 384 с.
4 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. – 188 с.
5 *Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999. – 128 с.
6 *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.
7 *Коргин Н.А. Механизмы обмена в активных системах. М.: ИПУ РАН, 2003.
8 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. – 464 с.
9 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003. – 312 с.
10 *Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.
11 *Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. М.: ИПУ РАН, 2001. – 135 с.
12 Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.
13 Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.