

Министерство образования и науки Российской Федерации  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
ФАКУЛЬТЕТ РАДИОТЕХНИКИ И КИБЕРНЕТИКИ  
КАФЕДРА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

На правах рукописи  
УДК 519.176

БЕЛЯЕВ АЛЕКСАНДР  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ НИЖНИХ  
ОЦЕНОК ЗАТРАТ СВЯЗЫВАЮЩЕЙ СЕТИ

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Направление подготовки 010900 «Прикладные математика и физика»

Заведующий кафедрой	_____	Д.А. Новиков
Научный руководитель	_____	М.В. Губко
Студент	_____	А. Беляев

г. Долгопрудный  
2014

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Постановка задачи .....	5
<b>2.1 Основные определения</b> .....	5
<b>2.2 Задача оптимизации связывающей сети</b> .....	6
3. Обзор литературы .....	7
4. Спектральные нижние оценки.....	10
<b>4.1 Аддитивная функция затрат.</b> .....	10
<b>4.2 Спектральные оценки функции затрат, зависящей от потока</b> .....	11
<b>4.3 Случай выпуклой функции затрат <math>c_2(\cdot)</math> для двухуровневой сети</b> .....	12
<b>4.4 Случай выпуклой функции затрат <math>c_2(\cdot)</math> для древовидной сети</b> .....	14
<b>4.5 Случай вогнутой функции затрат <math>c_2(\cdot)</math> для древовидной сети</b> .....	16
<b>4.6 Вычисление нижних оценок</b> .....	18
5. Качество нижних оценок.....	19
<b>5.1. Постановка задачи</b> .....	19
<b>5.2. Проверяемые гипотезы</b> .....	21
<b>5.3 Входные данные</b> .....	21
<b>5.4 Результаты эксперимента</b> .....	24
<b>5.5 Обсуждение результатов</b> .....	30
6. Перспективы дальнейших исследований. ....	31
Список литературы .....	32

# 1. Введение

Задачи, связанные с поиском оптимальных структур графов, встречаются во многих сферах человеческой деятельности. Разработанные для их решения модели и методы находят применение в задачах синтеза структуры сложных систем в различных предметных областях – транспортной логистике, химии, построении телекоммуникационных и сетей (например, это построение локальной сети провайдера, построение логистической сети и многие другие задачи).

В [1] была предложена модель оптимальной связывающей сети – сети, состоящей из двух типов узлов: основных вершин, которые испытывают потребность в связи, и дополнительных, которые осуществляют коммутацию потоков между основными вершинами. Эта модель позволяет описать довольно широкий класс прикладных проблем. Задача состоит в поиске оптимальной топологии связывающей сети, обеспечивающей связи между основными вершинами и при том минимизирующей функцию затрат сети.

В модели связывающей сети затраты сосредоточены только в дополнительных вершинах и определяется протекающими через них потоками. Важным частным случаем является аддитивная функция затрат – состоящая из двух слагаемых, одно из которых зависит от проходящих через вершину потоков, а второе – от количества инцидентных ребер.

Для отыскания решения этой задачи важно получить нижние оценки функций затрат связывающей сети. Эти оценки используются в алгоритме ветвей и границ поиска оптимальной сети. Также возможны применения нижних оценок в эвристических алгоритмах.

Задачей проведенного исследования являлась численная проверка качества различных модификаций нижних оценок: для двухуровневой сети, для линейной, выпуклой и вогнутой функций затрат в случае древовидной сети. Анализ качества оценок позволит определить возможности их применения в алгоритмах ветвей и границ, а также наметить пути совершенствования нижних оценок.

## 2. Постановка задачи

### 2.1 Основные определения

Кратко опишем предложенную в [1] модель оптимизации связывающей сети.

**Опр.1** Пусть задано некоторое множество вершин  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$  – *множество основных вершин*.

**Опр.2** Потребность в связях между вершинами задана связным ориентированным графом  $\langle W, E_R \rangle$  с множеством вершин  $W$  и множеством дуг  $E_R \subseteq W \times W$  – *графом связей*.

**Опр.3** Через  $M = \{m_1, \dots, m_q\}$  обозначим множество *дополнительных* вершин.

**Опр.4** Ориентированный граф  $H = \langle V, E_H \rangle$  с множеством вершин  $V = W \cup M$  и множеством дуг  $E_H$  назовем *связывающей сетью* над множеством основных вершин  $W$  с графом связей  $\langle W, E_R \rangle$ , если из того что дуга  $ww'$  принадлежит  $E_R$  следует, что в  $H$  есть (направленный) путь из  $w$  в  $w'$ .

Для вершины  $v \in V$  через  $E^{in}(v) \subseteq E_H$  обозначим множество входящих в вершину дуг, а  $E^{out}(v)$  – множество исходящих дуг.

Положим, что основные вершины  $W$  неспособны к коммутации, т.е. имеют суммарно не более одной входящей и не более одной исходящей дуги.

**Опр.5** Распределение потоков по сети зададим при помощи *функции маршрутизации потоков*  $\lambda_{vv'} : E_R \rightarrow [0, 1]$ , которая определяет долю каждой связи  $ww' \in E_R$ , обеспечиваемой данной дугой, т.е. долю потока, соответствующего связи  $ww'$  и текущего по дуге  $vv'$ . Если  $\lambda_{vv'}(ww') = 1$ , то дуга  $vv'$  обеспечивает связь  $ww'$  полностью. Если же значение функции равно нулю, связь  $ww'$  данной дугой не обеспечивается, и данный поток по дуге  $vv'$  не идет.

В сети выполняются балансовые ограничения: для любой связи  $ww'$  в начальной и конечной дуге любого маршрута из  $w$  в  $w'$  в сети  $H$

$$(1) \quad \lambda_{ww'}(ww') = 1, \lambda_{v'w'}(ww') = 1,$$

где  $E^{out}(w) = \{ww\}, E^{in}(w') = \{v'w'\}$ ,

и в любой дополнительной вершине  $m \in M_H$  для всех потоков  $ww' \in E_R$  выполняется равенство

$$(2) \quad \sum_{vm \in E^{in}(m)} \lambda_{vm}(ww') = \sum_{mv \in E^{out}(m)} \lambda_{mv}(ww').$$

## 2.2 Задача оптимизации связывающей сети

Пусть затраты сети включают только затраты дополнительных вершин  $m \in M$ , а затраты вершины определяются только локальной структурой сети в окрестности этой вершины, а именно, потоками, протекающими по входящим дугам  $E^{in}(m) = \{u_1m, \dots, u_km\}$  и исходящим дугам  $E^{out}(m) = \{mv_1, \dots, mv_r\}$  вершины  $m$ .

В условиях сделанных предположений затраты дополнительных вершин  $m$  в сети  $H$  зависят только от функций маршрутизации:

$$(3) \quad c(m, H) = c(\lambda_{u_1m}(\cdot), \dots, \lambda_{u_km}(\cdot), \lambda_{mv_1}(\cdot), \dots, \lambda_{mv_r}(\cdot)).$$

Функция затрат такого вида в [1] была названа *поточковой*.

Потоковые функции затрат позволяют в максимально обобщенной форме описывать зависимость затрат от структурных характеристик вершины  $m$ , то есть количества входящих и исходящих дуг, протекающих по этим дугам потоков и объема работы по коммутации потоков, которой и занимаются дополнительные вершины.

*Общая постановка задачи* оптимизации связывающей сети состоит в том, чтобы найти такую структуру сети  $H$  и такие функции маршрутизации, удовлетворяющие балансовым ограничениям (1) и (2) для всех потребностей в связях  $ww' \in E_R$ , чтобы суммарные затраты всех дополнительных вершин были минимальны.

### 3. Обзор литературы

Рассматриваемая постановка близка некоторым задачам дискретной оптимизации. Ниже будут кратко рассмотрены эти задачи с целью указать сходства и отличия от исследуемой задачи, а также возможные применения исследуемой модели.

Задача построения дерева Штейнера на плоскости [4] сходна с задачей построения связывающей сети в том, что в ней также строится оптимальное дерево над фиксированным множеством листьев (*точек Штейнера*) и множество дополнительных вершин не фиксировано. Отличие же заключается в том, что критерием оптимальности является сумма длин всех ребер дерева, т.е. критерий задан на ребрах, а не на вершинах, как в модели связывающей сети. Кроме того, в связывающей сети никакой роли не играет геометрия, а лишь топология сети.

В [1] отмечалась схожесть задачи о связывающей сети и поиска оптимальной иерархии для секционной функции затрат. В частности, эти задачи эквивалентны для древовидных сетей. Аналогии существуют и для других частных случаев.

Развитие методов оптимизации структуры связывающих сетей позволяет расширить и инструментарий оптимизации иерархических структур для секционных функций затрат.

Типичная задача оптимизации сетей поставок состоит в поиске оптимальной сети, состоящей из начальных узлов (производителей), конечных узлов (потребителей), распределительных узлов и дуг (каналов транспортировки), обеспечивающей удовлетворение спроса с минимальными затратами. Решение этой задачи можно разделить на два этапа: в первом ищется оптимальная структура и состав сети (стратегическое планирование). Во втором этапе в уже сформированной сети распределяются потоки, идущие от начальных узлов к конечным. Такую постановку обычно можно свести к решению задачи линейного программирования, которая, несмотря на обычно довольно большую размерность, эффективно решается с использованием современных вычислительных мощностей (см. обзор в [10]).

Первый же этап решения – задачу формирования структуры логистической сети – можно свести к оптимизации структуры связывающей сети. Основные вершины в данном случае соответствуют производителям и получателям товаров, а потоки – потребностям в транспортировке товаров.

Основной идеей построения оптимальной связывающей сети является минимизация пути в сети между сильно связанными вершинами – объединение их связанными локальными «коммутаторами». Тот же принцип используется в задачах классификации, где для каждой пары вершин задана мера близости (роль которой в рассматриваемой модели играет объем потока) и ставится задача разбиения множества вершин на кластеры так, чтобы максимизировать близость вершин внутри кластеров при минимизации близость вершин разных кластеров [8].



В отличие от модели связывающей сети [1], для методов иерархической классификации характерен локальный подход к оценке разбиений графа – иерархия строится в результате последовательности решений о разбиении графа на основе локального критерия, основанного на объемах межкластерных взаимодействий и на размерах кластеров.

## 4.Спектральные нижние оценки

### 4.1 Аддитивная функция затрат.

Рассмотрим случай ненаправленных сетей, в которых существуют только двунаправленные дуги. В такой модели *основные вершины*, в силу их неспособности к коммутации, имеют только одну связь, *дополнительные вершины* – как минимум три (в противном случае такая дополнительная вершина не осуществляет коммутации, и ее можно удалить без увеличения затрат).

Предположим, что функция затрат является аддитивной:

**Опр. 6** Потокową функцию затрат назовем *аддитивной*, если она представима в виде двух слагаемых  $c(m, H) = c_1(d_H(m)) + c_2(\rho_H(m))$ , где  $d_H(m)$  – степень вершины  $m$  в сети  $H$ ,  $\rho_H(m)$  – объем потока, протекающего через вершину  $m$  в сети  $H$ , и  $c_1(\cdot)$ ,  $c_2(\cdot)$  – неотрицательные функции.

В рассматриваемой модели единственной характеристикой потока является его объем  $\rho(w, w')$ . Обозначим через  $R = ((\rho(w, w'))_{w, w' \in W})$  матрицу объемов потоков между основными вершинами. Матрица  $R$  считается симметричной.

Исследуем задачу поиска оптимальной неориентированной для множества основных вершин  $W$ , матрицы объемов потоков  $R = \rho(w, w')$  и функции затрат  $c(m, H) = c_1(d_H(m)) + c_2(\rho(m))$ .

Поиск оптимальной структуры такой связывающей сети состоит из четырех этапов:

1. Определение оптимального количества дополнительных вершин  $q$ .
2. Определение структуры связей  $H_M$  между дополнительными вершинами.

3. Определение количества  $k(m)$  основных вершин, инцидентных каждой дополнительной вершине  $m \in M$ .
4. Определяется разбиение  $W_1, \dots, W_q$  ( $\cup_{m=1, \dots, q} W_m = W, W_m \cap W_{m'} = \emptyset, |W_m| = k_m$ ) основных вершин по инцидентным им дополнительным вершинам, которое также задает множество остальных ребер сети  $E_w := (w, m) : w \in W_m, m = 1, \dots, q$ .

Полностью эта задача пока не решена, однако в [1] был исследован четвертый этап. В этом случае фиксированы степени дополнительных вершин, а, следовательно, первые слагаемые функции затрат  $c_1(k(m))$  всех вершин  $m \in M$  постоянны. Поэтому ниже исследуется задача оптимизации только второго слагаемого  $c_2(\cdot)$  аддитивной функции затрат.

## 4.2 Спектральные оценки функции затрат, зависящей от потока

В [1] были предложены нижние оценки для различных видов топологии сети дополнительных вершин:

1. Нижние оценки для двухуровневой сети в условиях выпуклой функции затрат,
2. Нижние оценки для древовидной сети в условиях выпуклой функции затрат,
3. Нижние оценки для древовидной сети в условиях вогнутой функции затрат,
4. Нижние оценки для древовидной сети в условиях линейной функции затрат.

### 4.3 Случай выпуклой функции затрат $c_2(\cdot)$ для двухуровневой сети

Рассмотрим задачу минимизации затрат клики дополнительных вершин (см. рис.1) при помощи выбора распределения основных вершин по дополнительным в условиях функции затрат  $c_2(\rho_H(m))$ , зависящей только от суммарной величины потока через вершину  $m \in M$  в сети  $H$ .

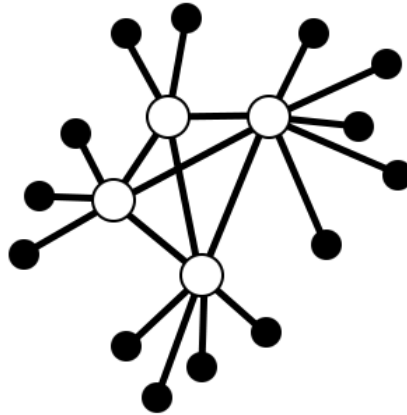


Рис.1 Общая топология двухуровневой сети  
(черным цветом обозначены основные вершины)

Пусть фиксировано количество дополнительных вершин  $q$  и количество  $k_m$  основных вершин, инцидентных дополнительной вершине  $m \in M$  (причем  $\sum_{m=1}^q k_m = n$  и  $k_m$  может равняться нулю). Введем вектор-столбец  $k := (k_1, \dots, k_q)$  и матрицу  $K = \text{diag}(k)$ . Обозначим через  $s_1, \dots, s_q$  некоторое допустимое разбиение множества основных вершин  $W$ . Введем  $n \times q$  матрицу  $X$ , элемент которой  $x_{wm} = 1$  если вершина  $w \in W$  инцидентна вершине  $m \in M = \{1, \dots, q\}$  (то есть если  $w \in s_m$ ) и нулю в противном случае.

Обозначим через  $\Xi$  множество матриц, соответствующих разбиениям множества  $W$  на  $q$  подмножеств. Любой матрице  $X \in \Xi$  соответствует некоторое разбиение  $s_1, \dots, s_q$   $n$

основных вершин по  $q$  дополнительным вершинам, а  $x_m$  –  $m$ -й столбец матрицы  $X$  – является индикатором множества  $s_m$ .

Пусть  $e_n$  - столбец размерности  $n$ , состоящий из единиц.

Тогда (см. [2]) суммарный объем потока через вершину  $m$  можно записать как

$$(4) \quad \rho(m) = \rho(R, X) = 2 \cdot e_n^T R x_m - x_m^T R x_m = x_m^T \tilde{R} x_m,$$

(последнее равенство верно в силу того, что если  $x_{wm} \in \{0, 1\}$ , то  $x_{wm} = x_{wm}^2$ ).

В этой формуле фигурирует матрица  $\tilde{R} := 2diag(R \cdot e_n) - R$ .

Тогда затраты оптимальной сети записываются как решение следующей задачи минимизации:

$$(5) \quad C_2(R, q, k, H_M) = \min_{X \in \Xi} \sum_{m=1}^p c_2(\rho(m)) = \min_{X \in \Xi} \sum_{m=1}^p c_2(x_m^T \tilde{R} x_m)$$

по всем  $n \times q$  матрицам  $X = (x_1, \dots, x_q)$  из  $\Xi$ .

Рассмотрим некоторую касательную к функции затрат  $c_2(\rho)$ .

Если касательная имеет наклон  $\alpha$ , то ее уравнение записывается как  $c_2(d_2(\alpha)) + \alpha(\rho - d_2(\alpha))$ , где  $d_2(\alpha) := [c_2']^{-1}(\alpha)$ .

Для любых  $\alpha, \rho \geq 0$  выполняется неравенство  $c_2(\rho) \geq c_2(d_2(\alpha)) + \alpha(\rho - d_2(\alpha))$ .

Эта линейризация использовалась в [1] для получения нижней оценки затрат оптимальной двухуровневой сети в случае выпуклой функции  $c_2(\cdot)$ .

Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$  – вектор наклонов касательных при дополнительных вершинах  $1, \dots, q$ ,  $A = diag(\alpha)$ ,  $\tilde{R} := 2diag(R \cdot 1_n) - R$ . Тогда

$$\begin{aligned}
(6) \quad C_2(R, q, k, H_M) &= \sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0} \sum_{m=1}^q [c_2(d_2(\alpha_m)) - \alpha_m d_2(\alpha_m) + \alpha_m k_m \lambda_{n-m+1}(\tilde{R})] \leq \\
&\leq \sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0} \left\{ \sum_{m=1}^q [c_2(d_2(\alpha_m)) - \alpha_m d_2(\alpha_m)] \right\} + \min_{X \in \Xi} \text{tr} X^T \tilde{R} X A \leq C_2(R, q, k, H_M),
\end{aligned}$$

Что выполняется в силу:

$$(7) \quad \min_{X \in \Xi} \text{tr} X^T \tilde{R} Y A \geq \min_{X: X^T X = K} \text{tr} X^T \tilde{R} X A = \sum_{m=1}^q \alpha_m k_m \lambda_{n-m+1}(\tilde{R}).$$

Минимум в правой части (7) достигается при

$$(8) \quad X^* = U_1 U_2^T K^{1/2},$$

где  $U_1$  –  $n \times q$  матрица, столбцы которой – нормированные на единицу (в евклидовой метрике) собственные вектора матрицы  $\tilde{R}$ , соответствующие  $k$  ее наименьшим собственным числам, упорядоченным по возрастанию, а  $U_2$  – матрица, столбцы которой – собственные вектора матрицы  $AK$ , нормированные на единицу и упорядоченные по убыванию собственных чисел матрицы  $AK$ :  $\alpha_m k_m$ , где  $m = 1, \dots, q$ .

#### 4.4 Случай выпуклой функции затрат $c_2(\cdot)$ для древовидной сети

Рассмотрим задачу 4 этапа выбора оптимального разбиения  $W_1, \dots, W_q$  основных вершин по дополнительным вершинам при фиксированной топологии внутренней сети  $H_M$ , фиксированных степенях дополнительных вершин  $r_1, \dots, r_q$  и фиксированном векторе  $k = (k_1, \dots, k_q)$ .

Введем  $n \times q$  матрицу  $X = (x_{wm})$ , описывающую распределение основных вершин по дополнительным вершинам;  $x_{wm} = 1$  если  $w \in W_m$ , в противном случае  $x_{wm} = 0$ . Матрица  $X$  принадлежит множеству  $\Xi$ .

Также введем  $q \times (r_m - k_m)$  матрицы  $P_m = (p_{m'i}^m)_{m' \in M, i=1, \dots, r_m - k_m}$ ,  $m = 1, \dots, q$ , элемент  $p_{m'i}^m$  которых равен единице, если дополнительная вершина  $m' \in 1, \dots, q$  достижима из вершины  $m \in M$  через  $i$ -ое ребро, инцидентное вершине  $m$ .

Поток через вершину  $m$  можно записать как

$$(9) \quad \rho(m) = e_n^T R \cdot e_n - \text{tr} X^T R X P_m P_m^T.$$

Тогда функцию затрат оптимальной сети можно записать как задачу минимизации [1]:

$$(10) \quad C_2^{\cup}(R, q, H_M, k) := \min_{X \in \Xi} \sum_{m \in M} c_2(e_n^T R \cdot e_n - \text{tr} X^T R X P_m P_m^T).$$

Пусть  $P(\alpha, H_M) := \sum_{m=1}^q \alpha_m P_m P_m^T$ , -  $q \times q$  матрица задаваемая топологией сети  $H_M$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$

– наклоны касательных линеаризации,  $\tilde{P}(\alpha, H_M, k) := K^{1/2} P(\alpha, H_M) K^{1/2}$ .

Согласно [1], нижняя оценка для выпуклых функций выглядит, как:

$$(11) \quad \underline{C}_2^{\cup}(R, q, H_M, k) = \sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0} \left\{ \sum_{m=1}^q \left[ c_2(d_2(\alpha_m)) - \alpha_m d_2(\alpha_m) + \alpha_m e_n^T R \cdot e_n \right] - \sum_{i=1}^p \lambda_i(R) \lambda_i(\tilde{P}(\alpha, H_M, k)) \right\} \leq \\ \leq \sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0} \left\{ \sum_{m=1}^q \left[ c_2(d_2(\alpha_m)) - \alpha_m d_2(\alpha_m) + \alpha_m e_n^T R \cdot e_n \right] - \max_{X \in \Xi} \text{tr} X^T R X \sum_{m=1}^q \alpha_m P_m P_m^T \right\},$$

Что выполняется в силу того, что:

$$(12) \quad \max_{X \in \Xi} \text{tr} X^T R X P(\alpha, H_M) \leq \max_{X: X^T X = K} \text{tr} X^T R X P(\alpha, H_M) = \sum_{i=1}^q \lambda_i(R) \lambda_i(\tilde{P}(\alpha, H_M, k)).$$

Максимум в правой части (12) достигается при

$$(13) \quad X^* = U_1 U_2^T K^{1/2},$$

где  $U_1$  –  $n \times q$  матрица, столбцы которой – нормированные на единицу собственные вектора матрицы  $R$ , соответствующие  $q$  ее наибольшим собственным числам, упорядоченным по убыванию, а  $U_2$  –  $q \times q$  матрица, столбцы которой – нормированные на

единицу собственные вектора матрицы  $\tilde{P}(\alpha, H_M, k)$ , также упорядоченные по убыванию соответствующих им собственных чисел.

#### 4.5 Случай вогнутой функции затрат $c_2(\cdot)$ для древовидной сети

Рассмотрим задачу этапа 4 (определения оптимальной расстановки основных вершин по дополнительным) для случая вогнутой функции затрат  $c_2(\cdot)$ . Задача состоит в том чтобы при фиксированных  $q, r, H_M$  определить разбиение множества  $W$  на  $q$  подмножеств размеров  $k_1, \dots, k_q$  (некоторые  $k_m$  могут равняться нулю) для минимизации функции затрат.

Тогда затраты оптимальной сети можно записать в виде [1]:

$$(14) \quad C_2^\circ(R, q, H_M, k) = \min_{X \in \Xi} \sum_{m \in M} c_2(e_n^T R \cdot e_n - \text{tr} X^T R X P_m P_m^T)$$

Чтобы воспользоваться спектральными оценками, аналогичными тем, что были построены для выпуклой функции  $C_2(\rho)$ , необходимо линеаризовать функцию затрат. Однако линеаризация через касательную к функции затрат в случае вогнутой функции не дает нижней оценки. Однако если известны диапазоны  $\rho(m) = [\underline{\rho}(m), \bar{\rho}(m)]$ , то для секущей  $c_2(\underline{\rho}(m)) + \beta_m(\rho(m) - \underline{\rho}(m))$  выполнено неравенство  $c_2(\rho(m)) \geq c_2(\underline{\rho}(m)) + \beta_m(\rho(m) - \underline{\rho}(m))$  при любом значении потока  $\rho(m)$ .

Такая линеаризация использовалась в [1] для получения нижней оценки затрат древовидной сети для вогнутой функции  $c_2(\cdot)$ :

$$(15) \quad C_2^\circ(R, q, H_M, k) \geq \underline{C}_2^\circ(R, q, H_M, k) = \sum_{m=1}^q [c_2(\underline{\rho}(m)) + \beta_m e_n^T R e_n - \beta_m \underline{\rho}(m)] - \sum_{i=1}^p \lambda_i(R) \lambda_i(\tilde{P}(\beta, H_M, k)),$$

где



$$\underline{\rho}(m) = e_n^T R e_n - \sum_{i=1}^{r_m - k_m} \lambda_i(R) \lambda_i(\tilde{B}_m), \quad \bar{\rho}(m) = e_n^T R e_n - \sum_{i=1}^{r_m - k_m} \lambda_{n-i+1}(R) \lambda_i(\tilde{B}_m),$$

$\tilde{B}_m = K^{1/2} P_m P_m^T K^{1/2}$ , а матрица  $\tilde{P}$  определяется аналогично рассмотренному в предыдущем параграфе случаю выпуклой функции затрат.

Для нахождения оценок  $\bar{\rho}(m)$  и  $\underline{\rho}(m)$  потока через вершины необходимо решить задачи минимизации и максимизации потока через роутеры  $m = 1, \dots, q$ .

## 4.6 Вычисление нижних оценок

В формулы нижних оценок входят коэффициенты линеаризации  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ . В соответствии с (11), (15), чтобы найти значения оценок, нужно найти коэффициенты, максимизирующие оценку на множестве всех возможных параметров линеаризации. Подбор таких коэффициентов проходит итерационно. Вычисляется нижняя оценка затрат и соответствующие ей нижние оценки  $c(m) = \rho_H(x_m^*, R)$ , потоков через каждую дополнительную вершину  $m$  подстановкой в формулу потока  $\rho_H(m)$  соответствующего релаксированного решения  $X^* = U_1 U_2^T K^{1/2}$ .

На первой итерации положим наклоны касательных  $\alpha_m^1 = 1, m \in M$ . Если рассчитанная на итерации  $t \geq 1$  оценка потока  $c_m^t$  соответствует большему наклону  $\alpha = c_2'(c_m^t)$  касательной, чем  $\alpha_m^t$ , то наклон  $\alpha_m^{t+1}$  для итерации  $t + 1$  вычисляется как  $\alpha_m^{t+1} = \alpha_m^t + (\alpha - \alpha_m^t)\delta(t)$ , где

$$\delta(t) = \frac{1}{\ln(t+1)} \quad (\text{см. рис.2})$$

Уменьшение шага  $\delta(t)$  с номером итерации  $t$  реализует эффект понижения «температуры» для стабилизации приращений наклонов касательных.

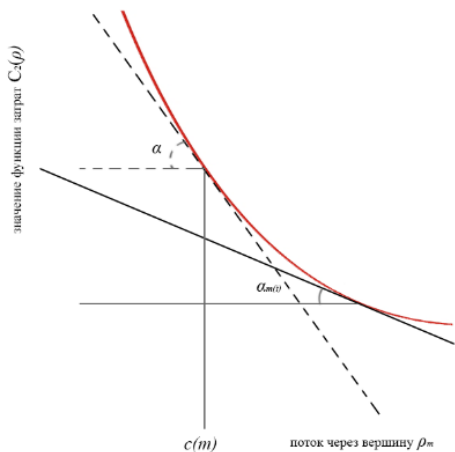


Рис.2. Схема отыскания коэффициентов линеаризации

Значения коэффициентов линеаризации не стабилизируются, однако через небольшое число шагов

(порядка 10) не наблюдается существенного роста нижних оценок, что косвенно говорит о хорошем качестве приближения.

## 5. Качество нижних оценок

### 5.1. Постановка задачи

Целью поставленного эксперимента являлось получение среднестатистических значений качества  $\varepsilon_{C_2} = \frac{\underline{C}_2}{C_2}$ , определяемых как отношения оценки функции затрат оптимальной сети к найденному точному значению этой функции. В ходе эксперимента для фиксированного количества дополнительных вершин  $q$ , матрицы связей  $R$  и топологии  $H_M$  вычислялись оценки функции затрат для всех допустимых  $k$  и их точные значения. На основе полученных данных вычислялось два типа значений качества оценок

– качество  $\varepsilon_{C_2}^* = \frac{\underline{C}_2(R, q, H_M, k^*)}{C_2(R, q, H_M, k^{**})}$  при наилучшем векторе  $k$  (для краткости ниже будем его

называть «оптимальное качество»),

где  $\underline{C}_2(R, q, H_M, k^*)$  – наилучшая оценка,  $k^* = \arg \min_k \underline{C}(R, q, H_M, k)$ ,

$$\underline{C}(R, q, H_M, k) = \underline{C}_2(R, q, H_M, k) + C_1(H_M, q, k)$$

$C_2(R, q, H_M, k^{**})$  – наилучшее значение функции затрат,  $k^{**} = \arg \min_k C(R, q, H_M, k)$ ,

$C(R, q, H_M, k) = C_2(R, q, H_M, k) + C_1(H_M, q, k)$  и «среднее» качество

$$\bar{\varepsilon}_{C_2} = \left\langle \frac{\underline{C}_2(R, q, H_M, k)}{C_2(R, q, H_M, k)} \right\rangle, \text{ где усреднение бралось по всем допустимым векторам } k.$$

Определялось качество следующих оценок:

1. случай выпуклой функции затрат для древовидной сети:

«оптимальное» качество  $\varepsilon_{C_2}^*$  и «среднее» качество  $\bar{\varepsilon}_{C_2}$ ,

2. случай вогнутой функции затрат для древовидной сети:

«оптимальное» качество  $\mathcal{E}_{\underline{C}_2}^*$  и «среднее» качество  $\overline{\mathcal{E}}_{\underline{C}_2}$ ,

3. случай линейной функции затрат для древовидной сети:

«оптимальное» качество  $\mathcal{E}_{\underline{C}_2}^*$  и «среднее» качество  $\overline{\mathcal{E}}_{\underline{C}_2}$ ,

4. случай выпуклой функции затрат для двухуровневой сети:

«оптимальное» качество  $\mathcal{E}_{\underline{C}_2}^*$  и «среднее» качество  $\overline{\mathcal{E}}_{\underline{C}_2}$ .

Было поставлено несколько серий экспериментов с различными фиксированными параметрами, результатом которых являлись усреднения названных типов оценок по

экспериментам –  $\overline{\mathcal{E}}_{c_2}^* = \langle \mathcal{E}_{c_2}^* \rangle$  и  $\overline{\overline{\mathcal{E}}}_{c_2} = \langle \overline{\mathcal{E}}_{c_2} \rangle$ .

Все эксперименты проводились для фиксированной топологии сети дополнительных вершин, изображенной на рисунке:

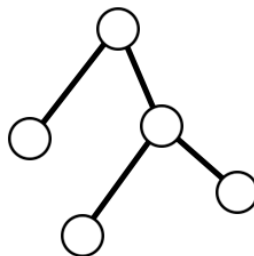


Рис.2 Выбранная топология сети дополнительных вершин

## 5.2. Проверяемые гипотезы

Ошибки, получаемые при расчете нижних оценок, состоят из ошибок, полученных при линейаризации и ошибок непрерывной релаксации [1]. Поскольку коэффициенты линейаризации при получении нижних оценок определялись при помощи не полностью сходящегося итерационного метода, то эти коэффициенты не являлись точными, что вносило ошибку линейаризации. Во-вторых, так как в (7), (12) релаксировалось условие задачи поиска минимума для перехода от матриц к их собственным значениям, то его значение тоже оказывалось неточным, что вносило погрешность непрерывной релаксации.

В ходе эксперимента проверялись следующие гипотезы.

1. Спектральные оценки имеют хорошее качество, т.е. для линейной функции затрат погрешность будет относительно мала.
2. Оценка имеет хорошее качество не при всех возможных  $k$ , т.е. существует  $k^*$ , для которого качество оценки существенно выше, чем его среднее значение по  $k$ .
3. Качество всех оценок зависит от плотности матрицы  $R$ .
4. Итерационный алгоритм подбора коэффициентов линейаризации дает неплохие результаты.

## 5.3 Входные данные

Входными данными в серии экспериментов являлись количество основных вершин  $n$  и количество  $T$  генерируемых различных матриц связи  $R$ , а также их плотность  $\eta$ , определяемая как отношение количества ненулевых элементов к общему количеству элементов матрицы.

Матрицы  $P_m$ ,  $m = 1, \dots, q$  определялись исходя из выбранной топологии дерева, приведенной на рис. 2.

Матрица связи  $R$  для каждого эксперимента заполнялась случайными числами, полученными равномерным распределением в диапазоне от 0 до 20 с учетом указанной плотности матрицы.

Для случая выпуклой функции затрат  $c_2(\cdot)$  рассматривалась функция  $c_2^{\cup}(\rho) = \rho^2 / 2$ , при этом первое слагаемое аддитивной функции затрат бралось равным  $c_1(d) = 1000d^2 + 1,3$ .

Для случая вогнутой функции затрат  $c_2(\cdot)$  рассматривалась функция  $c_2^{\cap}(\rho) = 2\sqrt{\rho}$ , первое же слагаемое аддитивной функции затрат бралось равным  $c_1(d) = d^2 + 1,3$ .

Расчеты производились в среде MATLAB на компьютере с системной конфигурацией Core i7-3610QM 2,4GHz, 6Gb RAM

Были поставлены следующие серии экспериментов:

- I.  $T = 100$ ,  $n = 5$ ,  $\eta = 1$ .
- II.  $T = 100$ ,  $n = 5$ ,  $\eta = 0.5$ .
- III.  $T = 100$ ,  $n = 8$ ,  $\eta = 1$ .
- IV.  $T = 100$ ,  $n = 8$ ,  $\eta = 0.5$ .
- V.  $T = 100$ ,  $n = 10$ ,  $\eta = 1$ .

### Общее описание алгоритма вычисления качества нижних оценок:

В соответствии с введенными параметрами матриц связи  $R$  последовательно проводится  $T$  экспериментов. В каждом эксперименте перечисляются всевозможные степени дополнительных вершин – т.е. вектора  $k$ . Для фиксированных  $R$ ,  $q$ ,  $H_q$  и  $k = (k_1, \dots, k_q)$  вычисляются оценки функции затрат

$$\underline{C}(R, q, k, H_M) = \underline{C}_2(R, q, k, H_M) + C_1(H_M, q, k),$$

где  $\underline{C}_2(R, q, k, H_M)$  принимает значения (6),(5),(11).

Затем для тех же фиксированных  $R$ ,  $q$ ,  $H_q$  и  $k$  перечисляются все разбиения множества  $W$  на  $q$  подмножеств размеров  $k_1, \dots, k_q$  (некоторые  $k_m$  могут равняться нулю).

Для каждого такого разбиения вычисляются точные значения функции затрат

$$C(R, q, k, H_M) = C_2(R, q, k, H_M) + C_1(H_M, q, k),$$

где  $C_2(R, q, k, H_M)$  принимает значения (5),(10),(14).

На основе полученных данных вычисляются искомые значения качества нижних оценок.

## 5.4 Результаты эксперимента

В результате проведенного эксперимента были получены значения качества нижних оценок для случаев выпуклой, вогнутой и линейной функции затрат древовидной сети и выпуклой функции затрат двухуровневой сети.

В таблице 1 приведено среднее время расчета единичного эксперимента:

Табл.1 Средние значения времени расчета одного эксперимента в зависимости от начальных условий.

Случай	Значение
$n = 5$	20 с
$n = 8,$	5 мин 32 сек
$n = 10$	4 ч 31 мин

В ходе эксперимента было обнаружено, что точность оценки изменяется в зависимости от плотности матрицы связей  $R$  для всех типов имеющихся оценок. Для исследования этой зависимости были проведены дополнительные серии экспериментов:

а.  $T = 100,$                        $n = 5,$                        $\eta = 0.1, 0.2, 0.3, \dots 0.9, 1,$

б.  $T = 100,$                        $n = 8,$                        $\eta = 0.25, 0.5, 0.75, 1.$

Ниже приведена сводная таблица (Таблица 2) значений качества оценок и графики полученных зависимостей и графики (Рис.4-10) зависимостей качества оценок от плотности матрицы связей  $R$ :



Табл.2 Сводная таблица качества нижних оценок.

	Номер серии экспериментов				
	I	II	III	IV	V
$T$	100	100	100	100	20
$n$	5	5	8	8	10
$\eta$	1	0.5	1	0.5	1
$\sigma_{\xi_2}^*$	0.9378	0.8395	0.9433	0.7667	0.9361
$\sigma_{\xi_2}^{**}$	0.8323	0.6145	0.8346	0.5274	0.8285
$\sigma_{\xi_2^c}^*$	0.8953	0.7161	0.9187	0.5619	0.9519
$\sigma_{\xi_2^c}^{**}$	0.7383	0.5195	0.7254	0.3852	0.7124
$\sigma_{\xi_2}^*$	0.6660	0.4238	0.5737	0.3100	0.5825
$\sigma_{\xi_2}^{**}$	0.5717	0.383	0.5218	0.1624	0.5133
$\sigma_{\xi_2^c}^*$	0.7203	0.6292	0.6912	0.5190	0.6723
$\sigma_{\xi_2^c}^{**}$	0.7052	0.5291	0.6605	0.4281	0.6424

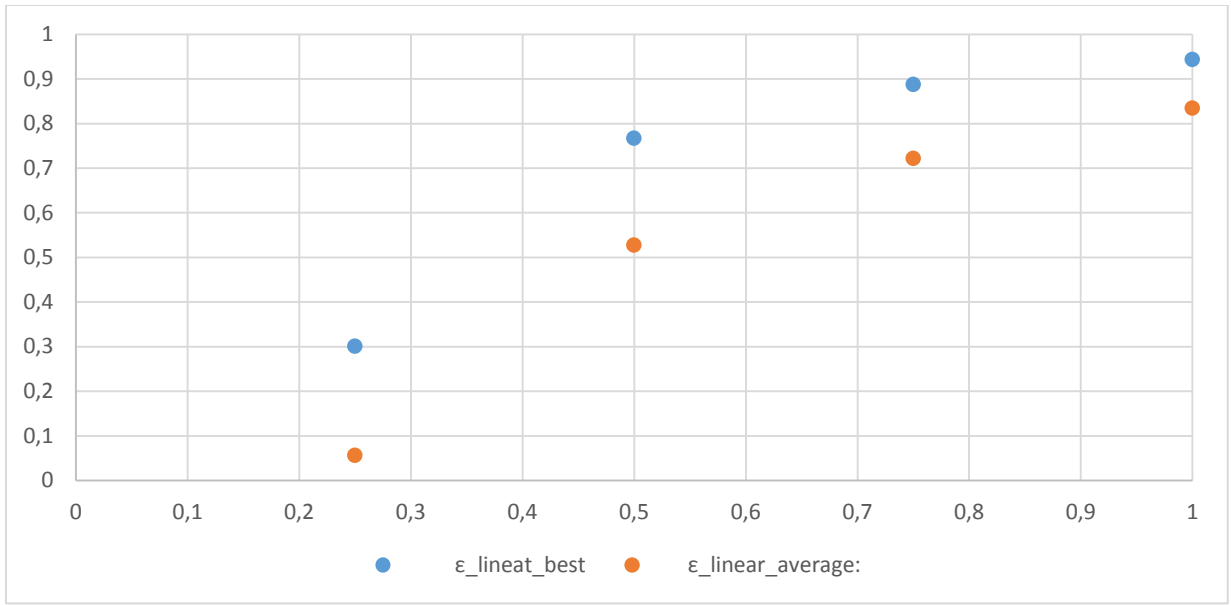


Рис.4 График зависимости качества оценки от плотности матрицы  $R$  для линейной функции затрат древовидной сети в случае  $T=100$  и  $n=8$

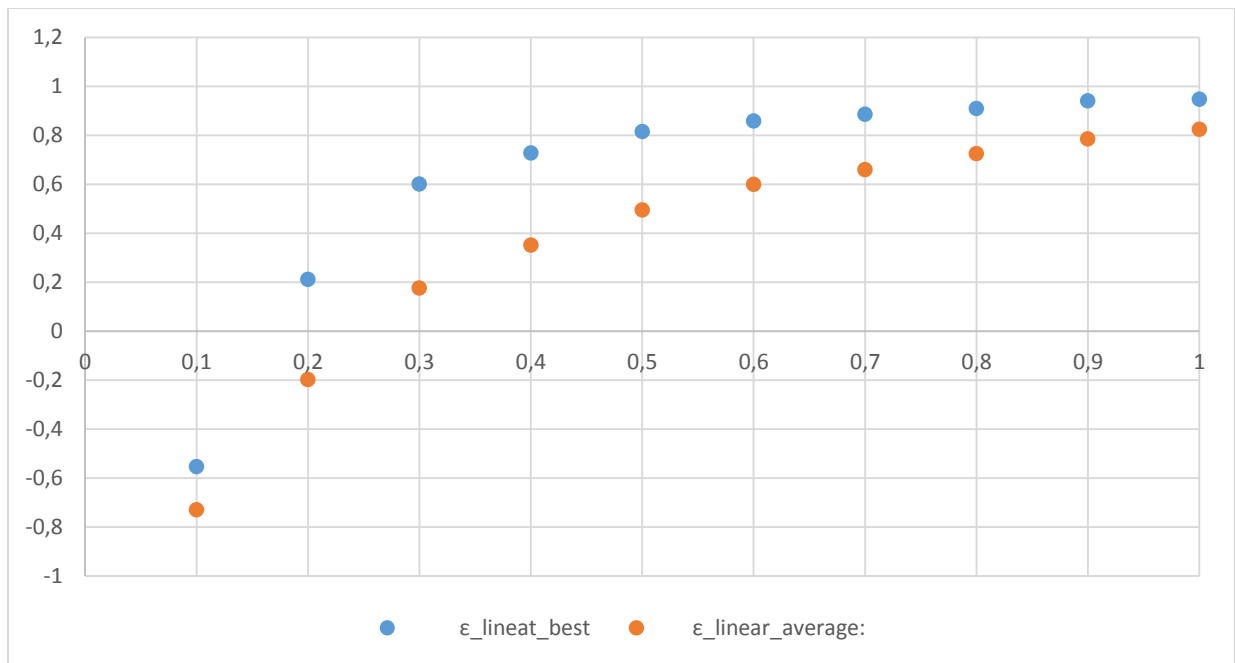


Рис.5 График зависимости качества оценки от плотности матрицы  $R$  для линейной функции затрат древовидной сети в случае  $T=100$  и  $n=5$

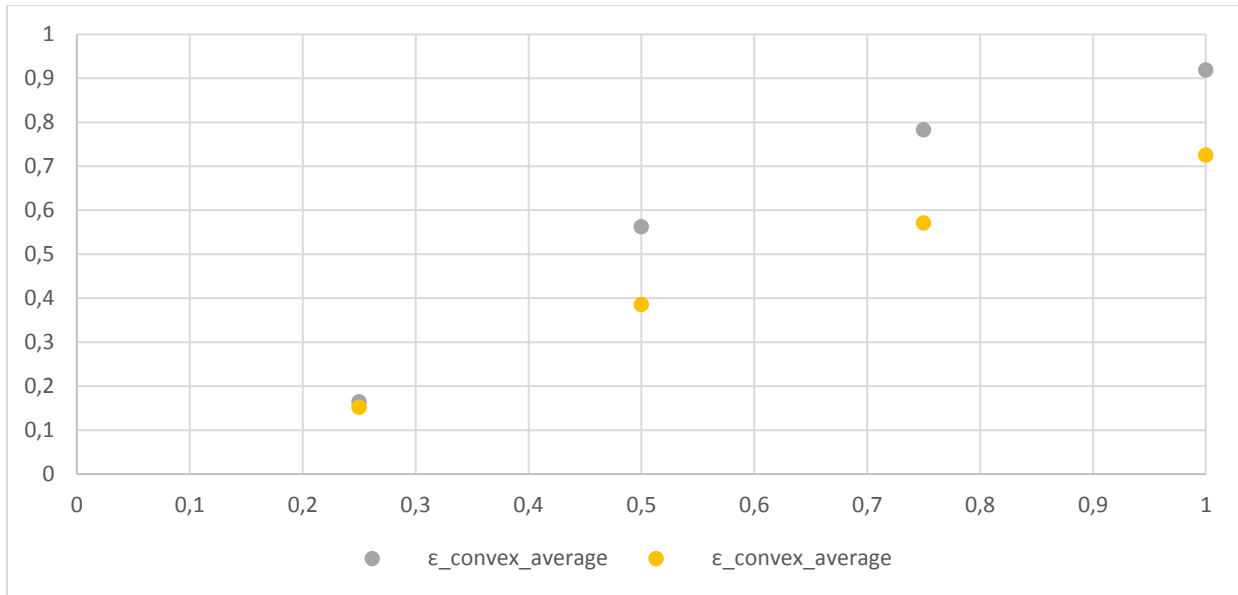


Рис.6 График зависимости качества оценки от плотности матрицы  $R$  для выпуклой функции затрат древовидной сети в случае  $T=100$  и  $n=8$

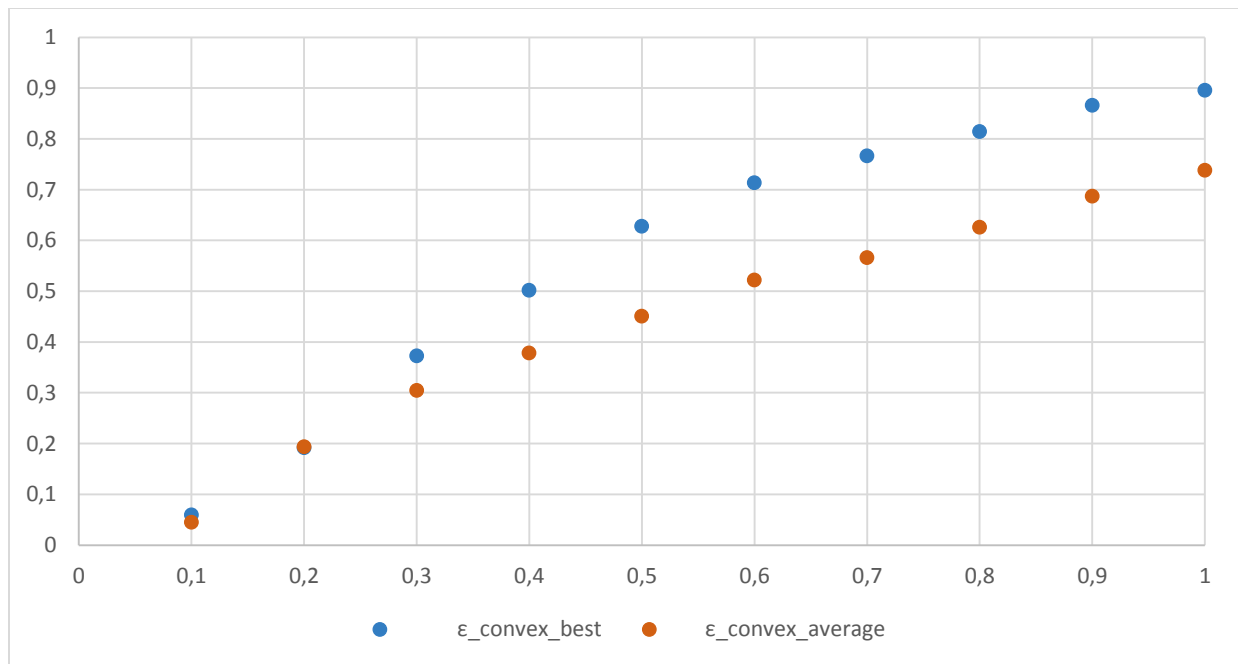


Рис.7 График зависимости качества оценки от плотности матрицы  $R$  для выпуклой функции затрат древовидной сети в случае  $T=100$  и  $n=5$

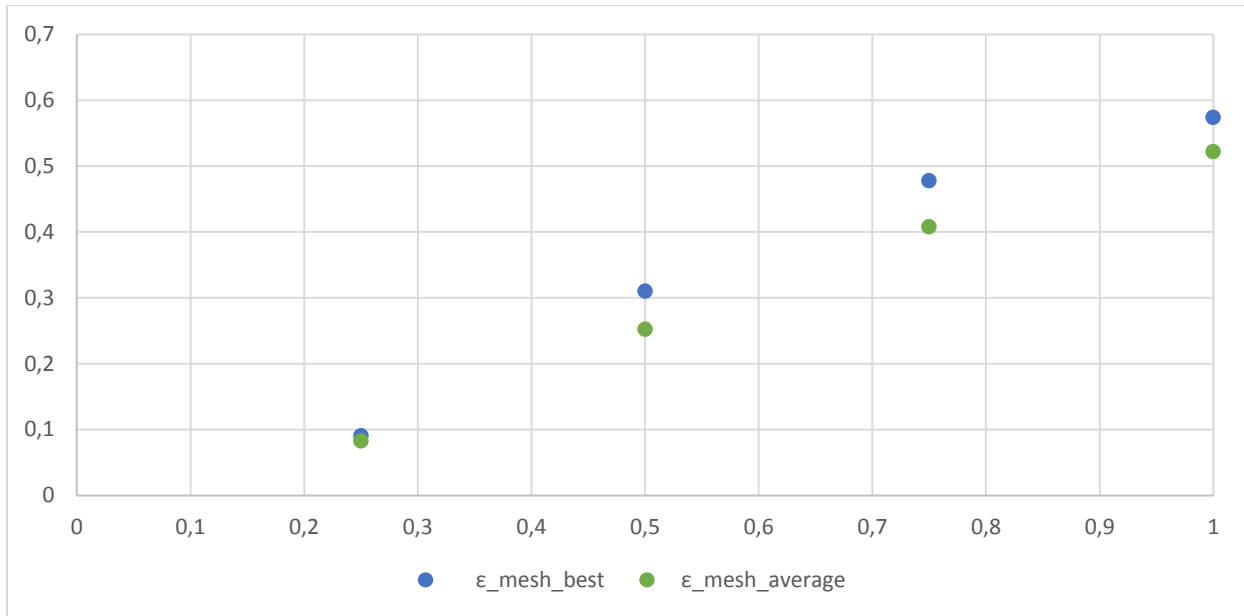


Рис.8 График зависимости качества оценки от плотности матрицы  $R$  для выпуклой функции затрат двухуровневой сети в случае  $T=100$  и  $n=8$

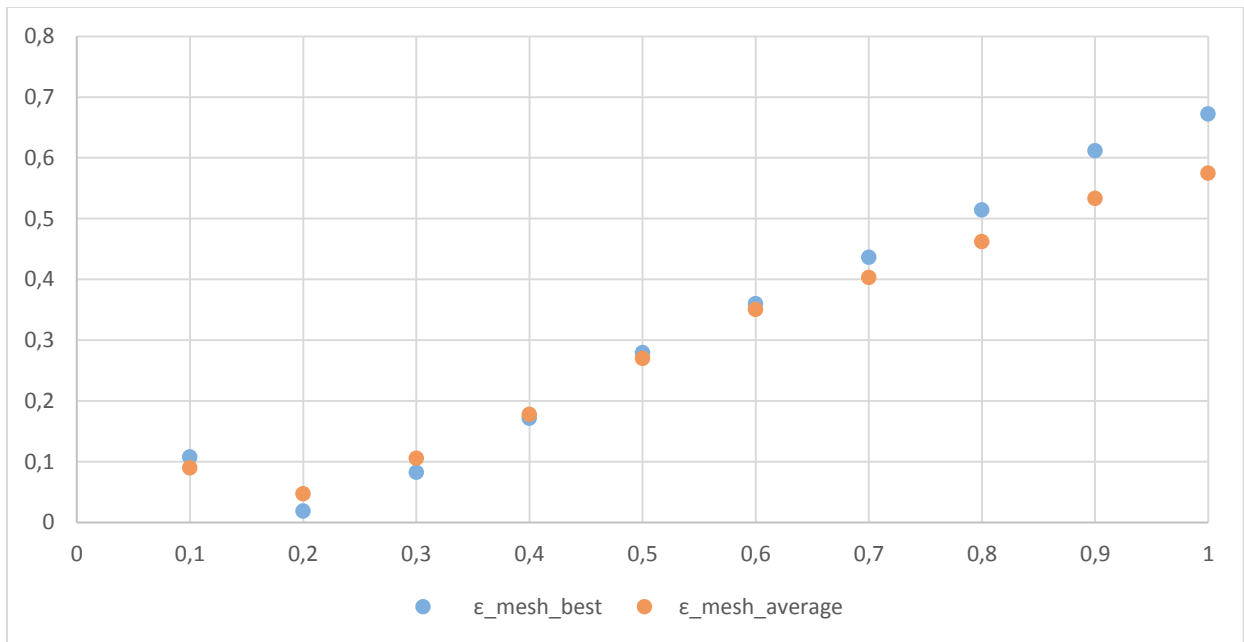


Рис.9 График зависимости качества оценки от плотности матрицы  $R$  для выпуклой функции затрат двухуровневой сети в случае  $T=100$  и  $n=5$

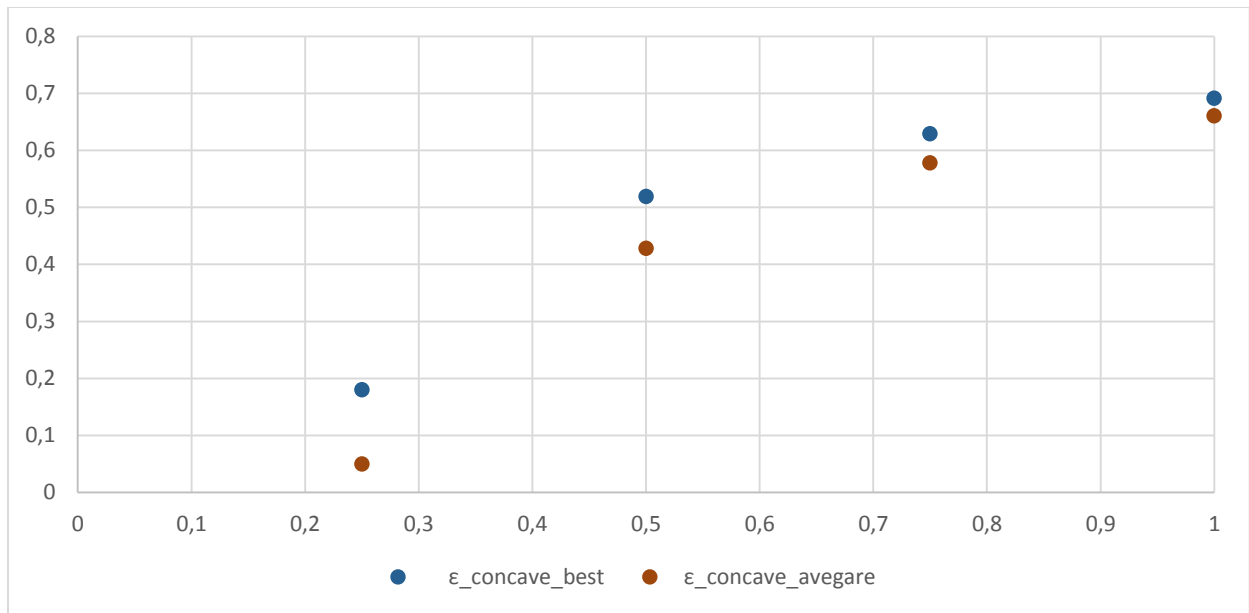


Рис.10 График зависимости качества оценки от плотности матрицы  $R$  для вогнутой функции затрат древовидной сети в случае  $T=100$  и  $n=8$

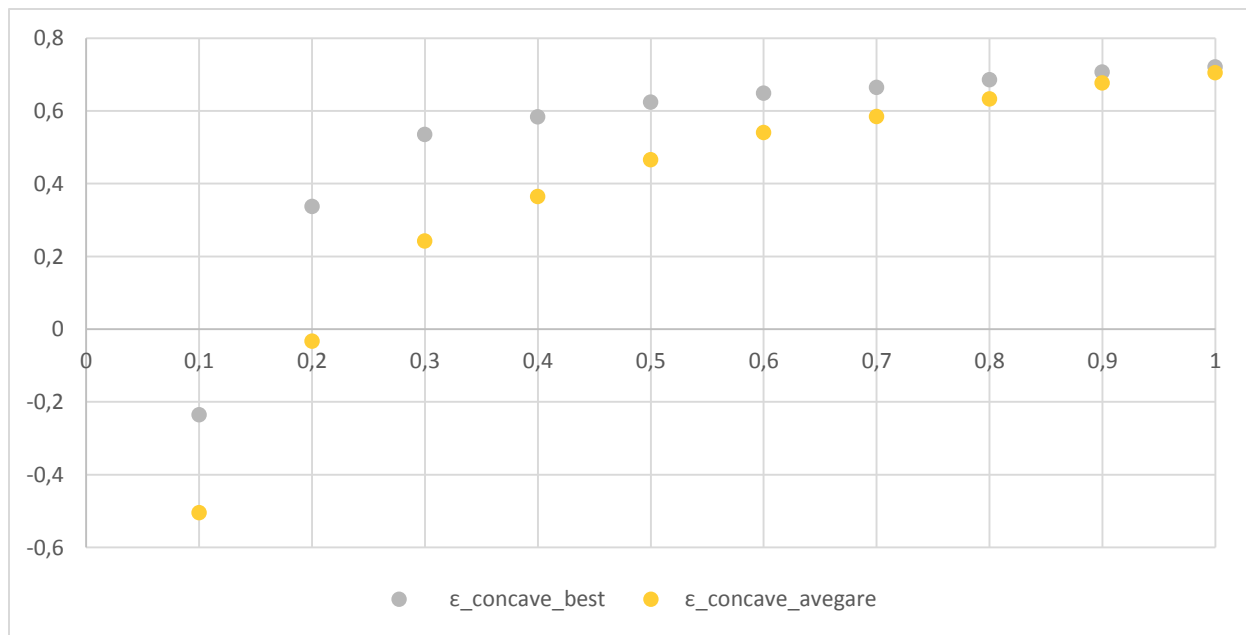


Рис.11 График зависимости качества оценки от плотности матрицы  $R$  для вогнутой функции затрат древовидной сети в случае  $T=100$  и  $n=5$

## 5.5 Обсуждение результатов

1. В ходе эксперимента подтвердилась гипотеза о более высоком качестве нижних оценок для оптимального вектора  $k$  по сравнению со «средним» качеством нижних оценок для случайных векторов  $k$ .
2. Качество полученных оценок для линейной, выпуклой и вогнутой функции затрат древовидной сети совпало с ожиданиями. Качество нижних оценок для линейной и выпуклой функции затрат древовидной сети оказались достаточно высоким, в то время как для вогнутой – ожидаемо низкими. Однако качество оценок для двухуровневой сети оказалось значительно хуже ожидаемого. Наиболее вероятная причина заключается в том, что замена  $x_{wm} = x_{wm}^2$  справедлива только в случае значений  $x_{wm} \in \{0,1\}$  и нарушается в ходе непрерывной релаксации матрицы  $X$ .
3. Итерационный алгоритм поиска значений коэффициентов линеаризации дал достаточно качественные значения оценок в случае выпуклых функций затрат. Несмотря на отсутствие сходимости погрешность линеаризации для выпуклых функций затрат (в отличие от вогнутых) довольно мала.
4. С уменьшением плотности матрицы  $\eta$  существенно падает качество нижних оценок.
5. В силу того, что точное значение функции затрат  $C_2(R, q, k, H_M)$  вычислялись полным перебором всех возможных распределений основных вершин по дополнительным, сложность вычислений экспоненциальна, что не позволило поставить эксперименты по определению качества оценок для более крупных сетей. В перспективе следует задуматься о замене перебора на метод ветвей и границ.

## **6. Перспективы дальнейших исследований.**

В результате эксперимента было установлено, что при большой плотности матрицы связей качество спектральной оценки для линейной функции затрат довольно высоко, то есть ошибки непрерывной релаксации малы.

Для вогнутой же функции основную часть вносит ошибка линеаризации в силу того, что невозможно построение касательной.

Однако для всех случаев погрешность спектральной оценки быстро растет с падением плотности матрицы, что и определяет перспективы дальнейших исследований.

## Список литературы

1. Губко М. В. Модели и методы оптимизации структуры иерархических систем обработки информации. дисс. на соиск. степени д.ф.-м.-н. – М.: ИПУ РАН, 2014.
2. Губко М.В. Спектральные нижние оценки затрат связывающей сети // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014), Москва, 16-19 июня 2014 г. С. 1959-1970.
3. Гордеев Э.Н., Тарасцов О.Г. Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Том 5, №2, С. 3–28.
4. Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. – М.: ЛЕНАНД, 2006.
5. Дементьев В.Т., Ерзин А.И., Ларин Р.М. и др. Задачи оптимизации иерархических структур. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.
6. Donath W.E., Hoffman A.J. Lower bounds for the partitioning of graphs // IBM J. Res. Dev. 1973. V. 17, No 5. P. 420–425.
7. Rendl F., Wolmowicz H. A projection technique for partitioning the nodes of a graph // Annals of Operations Research. 1995. V. 58. No 3. P. 155–179.
8. Schaeffer S.E. Survey: Graph clustering // Comput. Sci. Rev. 2007. V. 1. No 1. P. 27–64.
9. Wolkowicz H., Zhao Q. Semidefinite programming relaxations for the graph partitioning problem // Discrete Applied Mathematics. 1999. No 96–97 P. 461–479.
10. Handbooks in Operations Research and Management Science. Supply Chain Management: Design, Coordination and Operation / [Ed. by S.C. Graves, A.G. de Kok] V. 11. Elsevier, 2003.