А.Г.Ивановский, И.А.Горгидзе

# ОБ ОДНОЙ ЭПИСОГЛАСОВАННОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему из $n$ предприятий. Каждое предприятие может выпускать продукцию $m$ различных видов. Обозначим $s_{ij}>0$ – оценку производительности предприятия $i$ по продукции вида $j$, $q_{ij}$ – затраты предприятия $i$ на единицу времени работы по выпуску продукции вида $j$, $x_{ij}$ – продолжительность работы предприятия $i$ по выпуску продукции вида $j$, $T_i$ – планируемая продолжительность работы предприятия, $\lambda_j$ – цена продукции вида $j$ $(i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,m)$. Пусть задано соотношение продукции различных видов в плане выпуска продукции всеми предприятиями, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n} s_{ij}x_{ij}=\gamma B_j$, $j=1,2,\ldots,m$. Поставим задачу определить $x_{ij}\geqslant 0$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$ и $\gamma>0$ такие, что

$$\gamma \longrightarrow max \tag{I}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij}x_{ij}=\gamma B_j, \quad j=1,2,\ldots,m; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=T_i, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Содержательно эта задача соответствует максимизации выпуска продукции в заданном отношении. Пусть функция предпочтения предприятия $i$ имеет вид

$$\psi_i(\lambda,x_i)=\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j s_{ij}-q_{ij})x_{ij}.$$

Поставим задачу определить оптимальный согласованный план, то есть оптимальный план, удовлетворяющий условиям согласования

$$\left[\max_k(\lambda_k s_{ik}-q_{ik})-(\lambda_j s_{ij}-q_{ij})\right]x_{ij}=0, \tag{4}$$
$$i=1,2,\ldots,n;\quad j=1,2,\ldots,m.$$

Обозначим $\gamma_m$ – значение $\gamma$ в оптимальном плане задачи (I)-(3), $\gamma_c$ – значение $\gamma$ в оптимальном согласованном плане, то есть в решении задачи (I)-(4). Коэффициентом согласования системы называется отношение [I,2,3,4]

$$\rho_c = \frac{\gamma_c}{\gamma_m} \leqslant 1. \tag{5}$$

Если $\rho_c = 1$ при любых значениях $s_{ij} > 0$, $q_{ij} > 0$ ($i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$), то модель называется эписогласованной [2].

<u>Теорема.</u> Модель (I)-(4) является эписогласованной.

Доказательство. Положим $\gamma = \gamma_m$ и рассмотрим множество планов, удовлетворяющих условиям (2),(3), где $\gamma = \gamma_m$. Очевидно, это множество оптимальных планов. Необходимо доказать, что среди них найдется хотя бы один согласованный план. Рассмотрим следующую распределительную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} q_{ij} x_{ij} \longrightarrow min \tag{6}$$

при ограничениях (2),(3) и $\gamma = \gamma_m$. Очевидно, эта задача имеет решение. Поэтому двойственная задача тоже имеет решение. Обозначим $\lambda_j$ ($j = 1,2,\ldots,m$) и $\vartheta_i$ ($i = 1,2,\ldots,n$) – двойственные переменные и выпишем двойственную задачу

$$-\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i T_i + \sum_{j=1}^{m} \gamma_m B_j \lambda_j \longrightarrow max \tag{7}$$

при ограничениях

$$\lambda_j s_{ij} - \vartheta_i \leqslant q_{ij} \ ; \ (i = 1,2,\ldots,n \ ; \ j = 1,2,\ldots,m). \tag{8}$$

Выпишем необходимые и достаточные условия оптимальности

$$(\lambda_j s_{ij} - q_{ij} - \vartheta_i) x_{ij} = 0 \ ; \ (i = 1,2,\ldots,n \ ; \ j = 1,2,\ldots,m). \tag{9}$$

Отсюда следует, что для оптимальных решений $x^0$, $\lambda^0$ прямой и двойственной задач имеет место

$$\left[\max_k (\lambda_k^0 s_{ik} - q_{ik}) - (\lambda_j^0 s_{ij} - q_{ij})\right] x_{ij}^0 = 0 \ ;$$
$$i = 1,2,\ldots,n \ ; \ j = 1,2,\ldots,m.$$

Таким образом, план $x^0$ удовлетворяет условиям согласования. Осталось доказать, что существует согласованное управление $\lambda^0 \geqslant 0$. Для этого заметим, что из условий $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} s_{ij} \geqslant \gamma_m B_j$ $j = 1,2,\ldots,m$ следует, что $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} s_{ij} = \gamma_m B_j$. Поэтому условия (2) в задаче (2),(3),(6) можно заменить на условия

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \geq \gamma_m B_j \; ; \; j = 1,2,\dots,m. \quad (10)$$

При этом для двойственной задачи получаем добавочные ограничения $\lambda_j \geq 0$, $j = 1,2,\dots,m$.

## Литература


1. Бурков В.Н., Ивановский А.Г. Решение задачи согласованного межотраслевого планирования. Материалы Всесоюзного совещания по вопросам единства методики и типизации ОАСУ. Ч. II. Баку, Аз.НИИ НТИ, 1971.
2. Ивановский А.Г. Проблема согласованного планирования в активных системах. Международный симпозиум по проблемам организационного управления и иерархическим системам. Рефераты докладов. Ч.II. М., ИАТ, 1972.
3. Бурков В.Н., Ивановский А.Г., Горгидзе И.А. Некоторые задачи управления активными системами. Сб. "Актуальные вопросы технической кибернетики". М., "Наука", 1972.
4. Ивановский А.Г. Задача согласованного планирования двух отраслей. Сб. "Системы управления (проблемы и методы)". М., "Наука", 1972.

УДК 330.II5

Вопросы исследования отраслевой системы приема и размещения заказов на новую продукцию (на примере отрасли приборостроения). Черкашин А.М. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Обсуждаются вопросы исследования поведения реальной системы с учетом особенностей интересов входящих в нее элементов с позиций теории активных систем. Илл. 2, библ. наим. I0.

УДК 338.984.

Использование игровых процедур при формировании планов научно-исследовательских организаций. Немцева А.Н., Хвастунов Р.М. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Описывается деловая игра "Приоритет НИР", являющаяся центральным звеном процедуры отбора тем для включения в план отраслевой научно-исследовательской организации. Илл. I., библ. наим. 3.

УДК 330.II5

Об одной эписогласованной модели. Ивановский А.Г., Горгидзе И.А. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается одна модель согласованного планирования распределительного типа, для которой доказывается теорема о возможности полного согласования. Библ. наим. 4.

УДК 330.II5

Линейная модель стимулирования многопродуктового стохастического производства. Бексеитов Ж.И. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Исследована линейная модель стимулирования многопродуктового стохастического производства. В рамках данной модели рассмотрены задачи синтеза, анализа и сортамента. Библ. наим. I.