

ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО - ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Г. А. Угольницкий

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Препринт

Москва

1996

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	4
ГЛАВА 1. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ИХ ОПИСАНИЕ . . . . .	5
1.1. Классификация и свойства иерархических оргграфов . . . . .	6
1.2. Иерархические матрицы и их свойства . . . . .	12
ГЛАВА 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ . . . . .	18
2.1. Динамические иерархические оргграфы . . . . .	18
2.2. Устойчивость иерархических систем . . . . .	28
ГЛАВА 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ . . . . .	38
3.1. Иерархические задачи линейного программирования . . . . .	38
3.2. Иерархические задачи оптимального управления . . . . .	47
3.3. Линейные многошаговые игры двух лиц с иерархическими матрицами . . . . .	51
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	55

УДК 62-50:681.3

Г.А.Угольницкий

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ. Препринт. -

М.: Всероссийский НИИ системных исследований, 1996. - 55 с.

В работе предлагается математический аппарат описания иерархических систем. Анализируются задачи устойчивости и оптимизации, связанные с иерархическими системами. Обсуждаются возможности приложений разработанного аппарата к моделированию реальных систем с иерархической структурой.

G.A.Ougolnitsky

LINEAR THEORY OF THE HIERARCHICAL SYSTEMS. Preprint. -

М.: The Institute for System Studies, 1996. - P. 55.

A mathematical formalism for the hierarchical systems description is proposed. Several relevant stability and optimization problems are analyzed. The possible applications of the formalism to the modeling of real systems having the hierarchical structure are discussed.

Рецензент - доктор физико-математических наук,

профессор Домбровский Ю.А.

Утверждено к печати Редакционным советом института.

© ВНИИСИ, 1996.

## ВВЕДЕНИЕ

Большинство сложных систем реального мира имеет иерархическую структуру. Структуру как совокупность элементов системы и связей между ними удобнее всего описывать с помощью графа. Для учета направления связей естественно использовать ориентированный граф, а для количественной характеристики состояния элементов и интенсивности связей – ввести веса вершин и дуг соответственно.

Иерархия означает, что элементы системы неравноправны: некоторые из них обладают определенным приоритетом по сравнению с другими. Поэтому оргграфы, используемые для описания иерархических структур, должны иметь специальный вид. Именно такие специфические оргграфы рассматриваются в настоящей книге в качестве математического аппарата описания иерархических систем.

В первой главе формулируются характеристические свойства оргграфов, требуемые для описания иерархических структур. Вводятся два класса таких оргграфов: иерархические и строго иерархические. Дается классификация этих оргграфов и изучаются свойства их подклассов. Поскольку существует соответствие между ориентированным графом и его матрицей весов, то рассматриваются также иерархические и строго иерархические матрицы и их свойства.

Вторая глава книги посвящена изучению динамических свойств иерархических систем. При описании динамики характеристики иерархического оргграфа, естественно, считаются функциями времени, что приводит к динамическим иерархическим оргграфам. Рассматриваются различные правила изменения значений вершин иерархических оргграфов, использующие гипотезу линейности. Анализируется устойчивость возникающих линейных систем конечно-разностных и дифференциальных уравнений с иерархическими матрицами, в том числе специальный случай булевой устойчивости.

В третьей главе рассматриваются вопросы оптимизации иерархических систем в линейном случае. Формулируются и

анализируются иерархические задачи линейного программирования и оптимального управления, а также линейные многошаговые игры двух лиц с иерархическими матрицами. Специфицируется вид решения задачи линейного программирования для различных частных случаев. Показывается, что выполнение условий оптимальности для иерархических задач оптимального управления и линейных многошаговых игр сводится к решению соответствующих иерархических задач линейного программирования.

В ходе всего изложения постоянно обсуждаются возможности приложений иерархических орграфов к моделированию реальных биологических, эколого-экономических, организационных систем; разбираются примеры. Представляется, что линейная теория иерархических систем может оказаться полезной при решении задач моделирования и управления реальными системами с иерархической структурой. В частности, перспективной областью приложений следует считать разработку компьютерных систем поддержки принятия решений.

## **ГЛАВА 1. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ИХ ОПИСАНИЕ**

В первой главе вводится математический аппарат для описания сложных систем с иерархической структурой. В качестве такого аппарата предлагается использовать ориентированные графы без контуров (в некоторых случаях – и без петель), называемые соответственно иерархическими и строго иерархическими. Дается классификация иерархических орграфов и анализируются свойства их частных классов. Для количественного описания состояния иерархической системы вводятся веса вершин и дуг соответствующего иерархического орграфа.

В некоторых случаях представление системы с помощью матрицы весов орграфа оказывается более удобным. Рассматриваются иерархические и строго иерархические матрицы, изучаются их специфические свойства.

### **1.1. Классификация и свойства иерархических орграфов**

Будем описывать структуру иерархической системы связным

ориентированным графом  $D(Y, Z)$ , где  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  – множество вершин, обозначающих элементы системы;  $Z = \{(y_i, y_j)\}$  – множество дуг, обозначающих связи между элементами.

Определение 1.1.1. Вершины  $y_i \in Y$ ,  $y_j \in Y$  связаны отношением иерархии ( $y_i \leq y_j$ ), если существует путь от  $y_i$  к  $y_j$ ; в частности, допускается путь нулевой длины.

Теорема 1.1.1 [11]. Бинарное отношение иерархии на множестве  $Y$  вершин орграфа  $D$  является отношением частичного порядка тогда и только тогда, когда  $D$  не содержит контуров.

Доказательство.

Пусть отношение иерархии – частичный порядок. Тогда наличие контура противоречит антисимметричности отношения иерархии. Пусть теперь  $D$  – орграф без контуров. Проверим выполнение свойств частичного порядка для отношения иерархии на множестве его вершин:

- рефлексивность:  $\forall i \ y_i \leq y_i$  (для любой вершины существует путь нулевой длины до нее самой);
- транзитивность:  $\forall i, j, k \ y_i \leq y_j, \ y_j \leq y_k \Rightarrow y_i \leq y_k$   
(если существуют пути от  $y_i$  к  $y_j$  и от  $y_j$  к  $y_k$ , то их объединение есть путь от  $y_i$  к  $y_k$ );
- антисимметричность:  $\forall i, j \ y_i \leq y_j, \ y_j \leq y_i \Rightarrow y_i = y_j$   
(если существуют пути от  $y_i$  к  $y_j$  и от  $y_j$  к  $y_i$ , то  $y_i = y_j$ , иначе объединение этих путей образует контур).

Таким образом, отношение иерархии есть частичный порядок.

Будем называть связные орграфы без контуров *иерархическими* (H-орграфами).

Определение 1.1.2. Вершины  $y_i \in Y$ ,  $y_j \in Y$  связаны отношением *строгой иерархии* ( $y_i < y_j$ ), если существует путь ненулевой длины от  $y_i$  к  $y_j$ .

Теорема 1.1.2 [12]. Бинарное отношение строгой иерархии на множестве  $Y$  вершин орграфа  $D$  является отношением строгого порядка тогда и только тогда, когда  $D$  не содержит ни контуров, ни петель.

### Доказательство.

Пусть отношение строгой иерархии есть строгий порядок: тогда наличие петель противоречит иррефлексивности. Наличие контура  $(y_i < y_j < \dots < y_k < y_l < y_i)$  также противоречит иррефлексивности.

Пусть теперь  $D$  – оргграф без контуров и петель. Проверим выполнение свойств строгого порядка для отношения строгой иерархии:

- иррефлексивность: ни для какого  $i$  не имеет места  $y_i < y_i$ , т.е. не существует пути ненулевой длины от вершины до нее самой;
- транзитивность: если существуют пути ненулевой длины от  $y_i$  к  $y_j$  и от  $y_j$  к  $y_k$ , то их объединение есть путь ненулевой длины от  $y_i$  к  $y_k$  (для  $\forall i, j, k$ ).

Таким образом, отношение строгой иерархии есть строгий порядок.

Будем называть связные оргграфы без контуров и петель *строгими иерархическими* (SH-оргграфами).

Если  $y_i < y_j$ , то вершина  $y_i$  называется *предком*  $y_j$ , а вершина  $y_j$  – *потомком*  $y_i$ . Всегда существует разбиение множества вершин строго иерархического оргграфа на непересекающиеся подмножества (*слои*) такое, что:

- все элементы данного слоя не имеют предков в следующем слое;
- элементы первого слоя не имеют предков, а последнего – потомков (и только они);
- вершины одного и того же слоя не соединяются дугами.

Аналогичное утверждение верно и для иерархического оргграфа, если не учитывать петли (т.е. считать, что вершина не может быть предком или потомком самой себе).

В оргграфе без контуров существует вершина, не имеющая входных дуг [9]. Все вершины без входных дуг образуют первый слой  $L_1$ .

Расстояние  $d(u, v)$  от вершины  $u$  до вершины  $v$  в оргграфе  $D$  равно длине кратчайшего пути из  $u$  в  $v$ . Введем следующее Определение 1.1.3. Расстоянием  $d(M, v)$  от множества вершин

$M \subseteq Y(D)$  до вершины  $v$  называется наименьшее из всех расстояний  $d(u, v)$ ,  $u \in M$ .

В случае, когда вершину можно поместить в несколько слоев, будем выбирать тот, который ближе к первому слою. Слои, равноотстоящие от первого слоя, объединяются в один слой.

Указанные условия однозначно определяют разбиение множества вершин строго иерархического орграфа на слои

$$Y(SH) = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m, \quad L_p \cap L_q = \emptyset, \quad p, q = 1, \dots, m,$$

где  $m$  - число слоев в орграфе. Каждый слой содержит  $n_i$  вершин, так что  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ , где  $n$  - число вершин орграфа.

Определение 1.1.4. Иерархический (строго иерархический) орграф называется:

- *левым однополюсным*, если  $n_1 = 1$ ;
- *правым однополюсным*, если  $n_m = 1$ ;
- *двухполюсным*, если  $n_1 = n_m = 1$ .

Определение 1.1.5. Левый (правый) однополюсный орграф называется:

а) *древовидным*, если

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m \quad (n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \text{ соответственно});$$

б) *строго древовидным*, если знаки неравенств строгие.

Определение 1.1.6. Иерархический (строго иерархический) орграф называется *последовательным*, если дуги проводятся только между смежными слоями.

Определение 1.1.7. Иерархический (строго иерархический) орграф называется *левым (правым) однозначным*, если каждая вершина имеет не более одной входной (выходной) дуги.

Определение 1.1.8. Иерархический (строго иерархический) орграф некоторого класса называется *полным*, если он содержит максимально возможное для этого класса число дуг при заданном числе вершин.

При моделировании реальных иерархических систем левые орграфы удобнее использовать для представления действий управляющего органа по передаче информационных и вещественно-энергетических ресурсов подсистемам, а правые - для отображения



информационных и вещественно-энергетических потоков от подсистем к управляющему органу.

Теорема 1.1.3. Левый (правый) однозначный оргграф является последовательным и левым (правым) древовидным соответственно.

Доказательство. Проведем доказательство для случая левого оргграфа (для правого доказательство аналогично).

Пусть  $SH$  – левый однозначный оргграф. Рассмотрим произвольную вершину  $v \in L_i$ . По определению 1.1.7 существует единственная входная дуга  $(u, v)$ . Пусть  $u \in L_p$ . Если между  $L_p$  и  $L_i$  ( $p < i$ ) существует промежуточный слой  $L_q$  ( $p < q < i$ ), то вершина  $v$  должна принадлежать этому слою. Следовательно,  $p = i - 1$ , и оргграф  $SH$  – последовательный.

Докажем, что левый однозначный оргграф является левым однополюсным. Пусть  $|L_1| > 1$ . Тогда с учетом последовательности  $SH$  либо имеется вершина из  $L_2$ , имеющая больше одной входной вершины из  $L_1$ , либо возникает разбиение  $L_1 = L_{11} \cup L_{12}$ ,  $L_2 = L_{21} \cup L_{22}$ ,  $L_{11} \cap L_{12} = \emptyset$ ,  $L_{21} \cap L_{22} = \emptyset$ , такое, что дуги соединяют только вершины  $L_{11}$  с вершинами  $L_{21}$ , вершины  $L_{12}$  – с вершинами  $L_{22}$ . Во втором случае при любом числе слоев нарушается связность  $SH$ .

Пусть теперь  $SH$  – левый однополюсный однозначный оргграф. Так как  $SH$  – последовательный, то для проверки древовидности достаточно сравнить мощности смежных слоев. Очевидно, что если  $n_{i+1} < n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ), то найдется вершина  $v \in L_i$ , имеющая более одной входной вершины в слое  $L_{i-1}$ . Следовательно,  $SH$  является левым древовидным.

В терминах теории организаций условие левой однозначности интерпретируется следующим образом: каждый элемент иерархической системы подчиняется не более, чем одному вышестоящему элементу. В случае принятия этого (достаточно правдоподобного) условия теорема 1.1.3 утверждает, что:

- а) отношения "начальник-подчиненный" связывают только элементы смежных уровней;
- б) на каждом нижестоящем уровне число элементов не меньше, чем на вышестоящем.

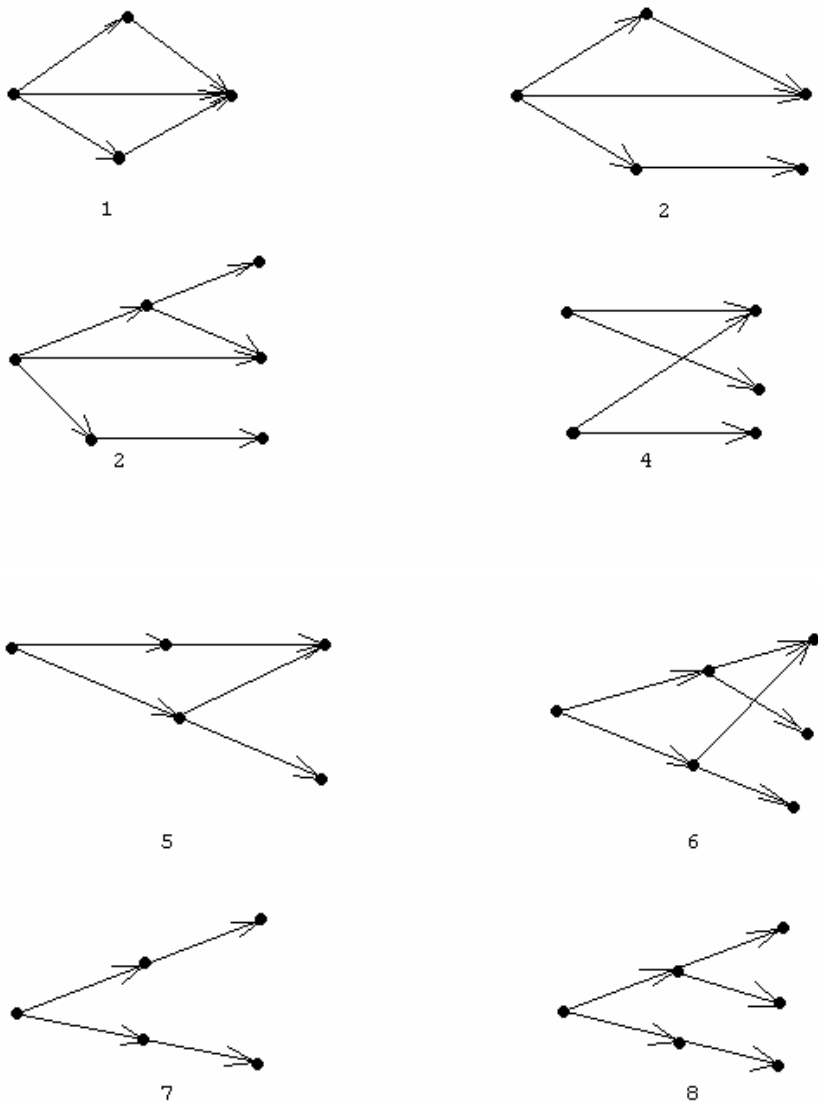


Рис. 1.1.1. Примеры строго иерархических орграфов: 1 – левый однополюсный орграф; 2 – левый древовидный орграф; 3 – левый строго древовидный орграф; 4 – последовательный орграф; 5 – левый древовидный последовательный орграф; 6 – левый строго древовидный последовательный орграф; 7 – левый однозначный последовательный орграф; 8 – левый однозначный строго древовидный последовательный орграф

Эти примеры вместе с теоремой 1.1.3 дают следующее соотношение между введенными классами строго иерархических

орграфов (рис. 1.1.2). Номера областей на рис. 1.1.2 соответствуют номерам примеров на рис. 1.1.1.

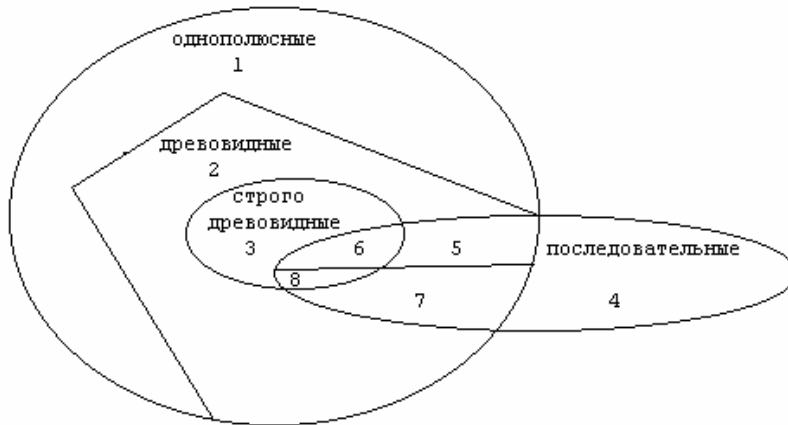


Рис. 1.1.2. Соотношение между частными классами строго иерархических орграфов

Отметим некоторые очевидные свойства строго иерархических орграфов (определения соответствуют [9]).

1. Строго иерархические орграфы являются слабо связными. Строго иерархический орграф является односторонне связным тогда и только тогда, когда каждый его слой содержит единственную вершину.
2. Вершинная база  $V$  строго иерархического орграфа является подмножеством первого слоя его вершин:  $V \subseteq L_1$ . В частности, для левого однополюсного орграфа всегда  $V=L_1$ . Аналогично, вершинная контрабаза  $S$  любого строго иерархического орграфа является подмножеством последнего слоя его вершин:  $S \subseteq L_m$ ; в частности, для правого однополюсного орграфа  $S=L_m$ .
3. Множество сильных компонент строго иерархического орграфа совпадает с множеством его вершин.

Для количественной характеристики структуры естественно ввести веса вершин  $x_i$  и дуг  $a_{ij}$ ,  $i, j=1, \dots, n$ . В общем случае это векторные величины с компонентами произвольных знаков.

n

Рассмотрим обобщенный ресурс системы  $R = \sum_{i=1}^n x_i$ .

Тогда можно следующим образом классифицировать однополюсные структуры по критерию распределения R (здесь номером 1 обозначен полюс).

Определение 1.1.9. Однополюсная структура называется:

- а) *полностью централизованной*, если  $x_1 = R$ ;
- б) *полностью децентрализованной*, если  $x_1 = 0$ ;
- в) *преимущественно централизованной*, если

$$x_1 \geq \sum_{i=2}^n x_i ;$$

- г) *преимущественно децентрализованной*, если знак противоположный.

## 1.2. Иерархические матрицы и их свойства

Иерархический (строго иерархический) оргграф с точностью до нумерации вершин внутри слоев определяет матрицу смежности  $A = \| \| a_{ij} \| \|$ , где  $a_{ij}$  – вес дуги  $(y_i, y_j)$ ; если дуга отсутствует, то ее вес равен нулю. В свою очередь, квадратная матрица A порядка n однозначно определяет оргграф, число вершин которого равно n, а дуга  $(y_i, y_j)$  имеет вес  $a_{ij}$  (если  $a_{ij} = 0$ , то дуга отсутствует). В общем случае  $a_{ij}$  – действительное число.

Будем называть матрицу смежности иерархического (строго иерархического) оргграфа *иерархической (строго иерархической)* соответственно.

В [4] доказана

Теорема 1.2.1. Оргграф не содержит контуров тогда и только тогда, когда его матрица смежности имеет верхнетреугольный вид.

Справедливо очевидное

Следствие. Орграф не содержит контуров и петель тогда и только тогда, когда его матрица смежности верхнетреугольная с нулевой главной диагональю.

Иерархическая (строго иерархическая) матрица имеет блочную структуру, блоки которой соответствуют слоям (рис.1.2.1).

	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	...	L <sub>m-1</sub>	L <sub>m</sub>
L <sub>1</sub>	0	A <sub>12</sub>	A <sub>13</sub>	...	A <sub>1m-1</sub>	A <sub>1m</sub>
L <sub>2</sub>	0	0	A <sub>23</sub>	...	A <sub>2m-1</sub>	A <sub>2m</sub>
L <sub>3</sub>	0	0	0	...	A <sub>3m-1</sub>	A <sub>3m</sub>
...	...	...	...	...	...	...
L <sub>m-1</sub>	0	0	0	...	0	A <sub>m-1m</sub>
L <sub>m</sub>	0	0	0	...	0	0

Рис.1.2.1. Строго иерархическая матрица:

$L_i$  - вершины, принадлежащие  $i$ -му слою,  $i=1,2,\dots,m$ ;

$$A_{pq} = \{a_{ij} : y_i \in L_p, y_j \in L_q\}.$$

В левой однополюсной матрице первая вертикальная полоса представляет собой единственный нулевой столбец; в правой - последняя горизонтальная полоса состоит из единственной нулевой строки; в двухполюсной верно и то, и другое.

В случае последовательной матрицы ненулевые элементы могут находиться только в блоках  $A_{kk+1}$ ,  $k=1,\dots,m-1$ ; в левой однозначной матрице, кроме того, в каждом столбце может быть не более одного ненулевого элемента ( в правой однозначной - в каждой строке).

В полной матрице те блоки, которые содержат ненулевые элементы, не содержат нулей.

Рассмотрим свойства иерархических матриц.

Определение 1.2.1 [9]. Орграф называется *турниром*, если между любыми двумя его вершинами существует единственная дуга. Турнир

называется *транзитивным*, если для любых  $u, v, w \in Y (u \neq w)$  из  $(u, v) \in Z$  и  $(v, w) \in Z$  следует, что  $(u, w) \in Z$ .

Теорема 1.2.1. Квадратная матрица  $A$  порядка  $n$ , у которой  $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i < j$ , является матрицей смежности транзитивного турнира с  $n$  вершинами.

Доказательство. Пусть турнир с  $n$  вершинами транзитивен. Обозначим через  $s(i)$  число выходных дуг для вершины  $y_i$  (т.е. число ненулевых элементов в  $i$ -й строке матрицы смежности).

В [9] доказано, что  $s(i) = n - i, i = 1, \dots, n$ . Располагая строки матрицы смежности по убыванию  $s(i)$ , получим матрицу требуемого вида.

Пусть теперь  $A$  - квадратная матрица порядка  $n$ , у которой  $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i < j$ . Для  $n=2$  утверждение теоремы проверяется непосредственно. Предположим, что квадратная матрица порядка  $n$  указанного вида определяет транзитивный турнир. Добавление состоящей из нулей  $(n+1)$ -й строки и  $(n+1)$ -го столбца вида  $(a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \dots, a_{n,n+1}, 0)$  означает, что проводятся дополнительные дуги  $(y_1, y_{n+1}), (y_2, y_{n+1}), \dots, (y_n, y_{n+1})$ . Тогда утверждение теоремы следует из транзитивности троек вида  $(y_i, y_j), (y_j, y_{n+1}), (y_i, y_{n+1})$ , где  $i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n (i < j)$ .

Следствие. Транзитивный турнир - это двухполюсный оргграф, все слои которого содержат ровно по одной вершине.

Рассмотрим теперь неотрицательные иерархические (строго иерархические) матрицы, играющие важную роль в приложениях. Для неотрицательных матриц известны следующие результаты [4].

1.  $A$  продуктивна  $\Leftrightarrow (E - A)^{-1}$  существует и неотрицательна (напомним, что  $A$  называется продуктивной, если  $\exists x > 0: x < Ax$ ).
2.  $A$  продуктивна  $\Leftrightarrow |\lambda_{\max}(A)| < 1$ .
3.  $\lambda_{\max}(A) = 0$  для продуктивной матрицы  $A \Leftrightarrow$  при соответствующей нумерации строк и столбцов матрица может быть записана в верхнетреугольном виде с нулевой главной диагональю.
4.  $\lambda_{\max}(A) = 0$  для продуктивной матрицы  $A \Leftrightarrow A^n = 0$ .

Докажем следующую лемму.

Лемма.

Если квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  нильпотентна, то  $A^n = 0$ .

Доказательство.

По определению нильпотентности  $\exists k \in \mathbb{N}: A^k = 0$ .

Случай 1:  $k \leq n$ .

Тогда  $A^n = A^k A^{n-k} = 0 A^{n-k} = 0$ .

Случай 2:  $k > n$ .

Тогда  $\exists l, p \in \mathbb{N} (p < n): k = lp + n$ . Имеем

$$0 = A^k = \underbrace{A^n A^n \dots A^n}_{l \text{ раз}} A^p.$$

Пусть  $A^n \neq 0$ , тогда  $A^p = 0$ , где  $p < n$ , и имеем

$$A^n = A^p A^{n-p} = 0.$$

Поскольку обратное к лемме утверждение очевидно, то с учетом утверждений 3 и 4 из [4] доказана следующая

Теорема 1.2.3.

Продуктивная матрица нильпотентна тогда и только тогда, когда она может быть записана в верхнетреугольном виде с нулевой главной диагональю (т.е. является строго иерархической).

Справедлива также

Теорема 1.2.4. Неотрицательные строго иерархические матрицы продуктивны.

Доказательство. Пусть

$$SH = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- строго иерархическая матрица, тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 1 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \end{pmatrix}$$

$$(E-SH) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & -a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку  $\det(E-SH)=1$ , то обратная к ней матрица существует и имеет вид

$$(E-SH)^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{3n} \\ 0 & 0 & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$E = (E-SH)(E-SH)^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}-a_{12}x_{22} & \dots & x_{1n}-a_{12}x_{2n}-\dots-a_{1n}x_{nn} \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} - \dots - a_{2n}x_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & x_{3n} - \dots - a_{3n}x_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & & & & & & & x_{nn} \end{pmatrix}$$

откуда  $x_{11} = x_{22} = \dots = x_{nn} = 1$ . Но тогда на первой наддиагонали имеем

$$x_{12} = a_{12} \geq 0, \quad x_{23} = a_{23} \geq 0, \quad \dots, \quad x_{n-1,n} = a_{n-1,n} \geq 0,$$

на второй наддиагонали

$$x_{13} = a_{12}x_{23} + a_{13} \geq 0, \quad \dots, \quad x_{n-2,n} = a_{n-2,n-1}x_{n-1,n} + a_{n-1,n} \geq 0,$$

и т.д.

Таким образом, матрица  $(E-SH)^{-1}$  существует и неотрицательна, что в силу утверждения 1 доказывает теорему.

Замечание. Для иерархической матрицы аналогичное утверждение неверно, например:



	H		E-H	
1	1		0	-1
0	1		0	0

Здесь  $\det(E-H)=0$ , и обратная матрица просто не существует. Рассмотрим в качестве примера модель межотраслевого баланса

$$x = Ax + y, \tag{1.2.1}$$

где матрица  $A$  – строго иерархическая. Содержательно это означает, что продукты с большими номерами не используются в производстве продуктов с меньшими номерами.

Если все элементы  $A$  выше главной диагонали ненулевые, то по теореме 1.2.1 соответствующий  $A$  оргграф является транзитивным турниром, и модель (1.2.1) в координатах имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y_1 \\
 x_2 &= a_{12}x_1 + y_2 \\
 x_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + y_3 \\
 &\dots \\
 x_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1} + y_n .
 \end{aligned}
 \tag{1.2.2}$$

В силу утверждения 4 имеет место конечное представление

$$x = y + Ay + A^2y + \dots + A^{n-1}y = (E + A + A^2 + \dots + A^{n-1})y, \tag{1.2.3}$$

где  $B = E + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$  – матрица полных затрат.

С содержательной точки зрения транзитивно-турнирный баланс означает, что каждый продукт с меньшим номером требуется для производства каждого продукта с большим номером; в других случаях это требование соответственно ослабляется.

## **ГЛАВА 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Вторая глава посвящена рассмотрению динамики в иерархических системах. Предлагается аппарат динамических иерархических

орграфов, изучаются его возможности при описании типовых динамических процессов в иерархических системах. Анализируется устойчивость иерархических систем.

## 2.1. Динамические иерархические оргграфы

Для описания динамики иерархической системы введенные в п.1.1 множества вершин  $Y$  и дуг  $Z$  иерархического оргграфа, а также соответствующие множества весов вершин  $\{x_i\}$  и дуг  $\{a_{ij}\}$  следует считать функциями времени. В приложениях компоненты вектора весов вершины естественно называть *ресурсами*.

Тогда описание состояния иерархической системы в момент  $t$  включает:

1. Множество вершин  $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ , где  $n(t)$  - количество вершин в момент  $t$ . Разобьем множество  $Y(t)$  на два непересекающихся подмножества:

$$\forall t \quad Y(t) = Y_1(t) \cup Y_2(t), \quad Y_1(t) \cap Y_2(t) = \emptyset$$

(в частности, возможно  $Y_2(t) = \emptyset$ ). Будем называть вершины из  $Y_1(t)$  *компартаментами* и обозначать квадратами, а вершины из  $Y_2(t)$  - *преобразователями* и обозначать кругами.

2. Множество дуг  $Z(t) = \{z_{ij}^k(t)\}$ ,  $1 \leq i, j \leq n(t)$ ,  $1 \leq k \leq N$ , где  $z_{ij}^k(t)$  - дуга из вершины  $y_i$  в вершину  $y_j$  (в частности, петля при  $i=j$ ), по которой может перемещаться ресурс  $k$  в момент  $t$ ;  $N$  - общее число ресурсов в системе.

3. Множество переменных состояния компарментов

$$X(t) = \{x_i^k(t)\}, \quad 1 \leq i \leq n(t), \quad 1 \leq k \leq N,$$

где  $x_i^k(t)$  - количество ресурса  $k$  в компарменте  $y_i \in Y_1$  в момент  $t$ . Тогда  $x_i(t)$  - вектор состояния компартамента  $y_i$  в момент  $t$  (набор всех содержащихся в нем ресурсов).

4. Множество переменных состояния дуг

$$F(t) = \{f_{ij}^k(t)\}, \quad 1 \leq i, j \leq n(t), \quad 1 \leq k \leq N,$$

где  $f_{ij}^k(t)$  - вес дуги  $z_{ij}^k(t)$ , т.е. либо количество ресурса  $k$ , переносимое за время  $[t, t+1]$  из вершины  $y_i$  в вершину  $y_j$ ,  $i \neq j$ ,

либо величина прироста (убыли) ресурса  $k$  в компартменте  $y_i$  за то же время,  $i=j$  (шаг по времени равен единице).

В каждой рассматриваемой ситуации (задаче) множество  $F(t)$  можно разбить на два непересекающихся подмножества:

$$\forall t F(t) = F_1(t) \cup F_2(t), F_1(t) \cap F_2(t) = \emptyset$$

(в частности, возможно  $F_2(t) = \emptyset$ ). Переменные из множества  $F_1(t)$  будем называть *регулируемыми* (они изменяются в силу заданных соотношений), а переменные из  $F_2(t)$  - *регулирующими* или просто *регуляторами* (они могут изменяться произвольно на допустимом множестве).

5. Множество ограничений на емкость компартментов

$$\underline{X} = \{\underline{x}_i^k\}, 1 \leq i \leq n(t), 1 \leq k \leq N,$$

где  $\underline{x}_i^k$  - максимальное количество ресурса  $k$ , которое может содержаться в компартменте  $y_i$ .

6. Множество ограничений на пропускную способность дуг

$$\underline{F} = \{\underline{f}_{ij}^k\}, 1 \leq i, j \leq n(t), 1 \leq k \leq N,$$

где  $\underline{f}_{ij}^k$  - максимальное количество ресурса  $k$ , которое может быть перемещено из вершины  $y_i$  в вершину  $y_j$ ,  $i \neq j$ , или произведено (уничтожено) в компартменте  $y_i$ ,  $i=j$ , за единицу времени.

Таким образом, обобщенное состояние иерархической системы есть множество

$$S(t) = \langle Y(t), Z(t), X(t), F(t), \underline{X}, \underline{F} \rangle. \quad (2.1.1)$$

Чтобы избежать рассмотрения орграфов с кратными дугами, примем следующий подход. Будем сопоставлять каждой вершине  $y_i \in Y$  единственный вес  $x_i(t)$ , а каждой дуге  $z_{ij} \in Z$  - единственный вес  $a_{ij}(t)$ . Таким образом, динамическая структура системы представляет собой синтез отдельных "скалярных" структур, каждая из которых отображает определенный аспект вещественно-энергетических и информационных взаимодействий в системе.

Заметим, что такой подход пригоден для описания динамической системы с произвольной структурой. Однако, в рамках настоящей работы мы ограничиваемся рассмотрением иерархических структур,

т.е. будем считать, что все составляющие комплексную структуру отдельные оргграфы являются иерархическими или строго иерархическими.

Наличие иерархии означает, что вещественно-энергетические и информационные потоки в системе обладают специфической структурой. Именно, имеется не менее одного элемента без входных дуг (элементы верхнего уровня) и не менее одного элемента без выходных дуг (элементы нижнего уровня). При этом движение потоков является однонаправленным: в аспекте управления и распределения ресурсов – от верхнего уровня к нижнему (левые оргграфы), а в аспекте сбора ресурсов – от нижнего к верхнему (правые оргграфы).

Разбиение множества вершин динамического оргграфа на две части позволяет описать основные вещественно-энергетические процессы в реальных системах [8]:

- 1) перемещение (перенос, обмен) ресурсов между компартментами;
- 2) синтез/элиминация ресурсов;
- 3) превращение (преобразование) ресурсов.

Отообразим эти процессы с помощью динамических иерархических оргграфов.

1. Перемещение ресурса  $k$  между двумя компартментами  $y_i$  и  $y_j$  в момент  $t$  может происходить при наличии дуги  $z_{ij}^k(t)$  (рис.2.1.1).

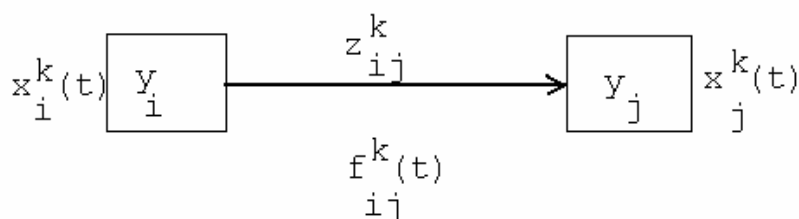


Рис.2.1.1. Перемещение ресурса  $k$  между компартментами  $y_i$  и  $y_j$

Пусть в момент  $t$  запасы ресурса  $k$  в компартментах  $y_i$  и  $y_j$  равны  $x_i^k(t)$  и  $x_j^k(t)$  соответственно, а переменная состояния дуги  $z_{ij}^k(t)$  есть  $f_{ij}^k(t)$ . Тогда

$$x_i^k(t+1) = x_i^k(t) - f_{ij}^k(t) \quad (2.1.2)$$

$$x_j^k(t+1) = x_j^k(t) + f_{ij}^k(t).$$

2. Синтез/элиминация ресурса  $k$  в компартменте  $y_i$  в момент  $t$  возможны при наличии петли  $z_{ii}^k(t)$  (рис.2.1.2).

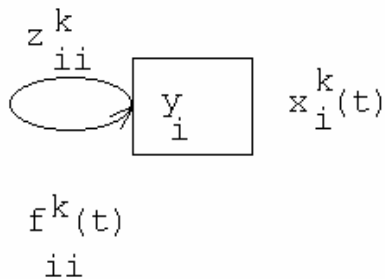


Рис. 2.1.2. Синтез/элиминация ресурса  $k$  в компартменте  $y_i$

Случай  $f_{ii}^k(t) > 0$  соответствует синтезу, а  $f_{ii}^k(t) < 0$  - элиминации ресурса  $k$ . В результате получаем

$$x_i^k(t+1) = x_i^k(t) + f_{ii}^k(t). \quad (2.1.3)$$

3. Превращение одних ресурсов в другие возможно при наличии вершины-преобразователя из множества  $Y_2$ . Это наиболее сложный класс процессов, содержащий разнообразные подклассы, которые можно группировать различным образом, например:

а) простое превращение (ресурса  $k$  в ресурс  $l$ );

б) сложное превращение (одного ресурса в несколько, нескольких в один или нескольких в несколько);

или

А) единичное превращение (внутри одного компартмента);

Б) бинарное превращение (между двумя компартментами);

В) множественное превращение (между несколькими компартментами).

Рассмотрим в качестве примера случай бБ. Пусть начальные запасы ресурсов  $x_i^k(t)$ ,  $x_i^1(t)$ ,  $x_j^1(t)$ . Превращение удовлетворяет соотношению

$$x_i^k(t+1) = x_i^k(t) - f_{ip}^k(t),$$

$$x_i^1(t+1) = x_i^1(t) - f_{ip}^1(t), \quad (2.1.4)$$

$$x_j^1(t+1) = x_j^1(t) + f_{pj}^1(t),$$

где  $y_i$ ,  $y_j$  - компартменты,  $y_p$  - преобразователь.

#### Пример 2.1.1 (модель "хищник-жертва").

$$dx_1/dt = \varepsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 x_2, \quad (2.1.5)$$

$$dx_2/dt = -\varepsilon_2 x_2 + \gamma_2 x_1 x_2,$$

где  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  - биомассы популяций жертвы и хищника соответственно в момент  $t$ ;

$\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  - коэффициенты естественного прироста популяций;

$\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  - коэффициенты взаимодействия жертвы и хищника.

Представление модели (2.1.5) с помощью динамического иерархического орграфа показано на рис. 2.1.3.

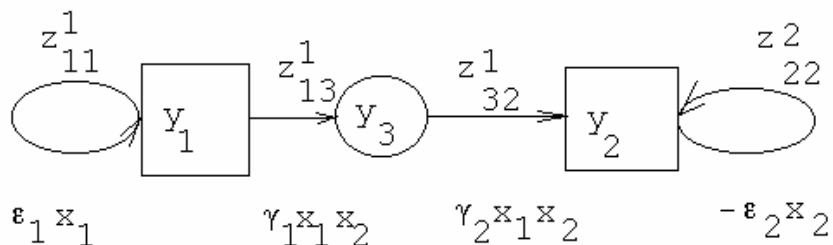


Рис. 2.1.3. Представление модели "хищник-жертва" с помощью динамического иерархического орграфа

Здесь петли  $z_{11}^1$  и  $z_{22}^2$  описывают прирост (синтез) биомассы жертв (ресурса 1) и убыль (элиминацию) биомассы хищников (ресурса 2) в компартментах  $y_1$  и  $y_2$  соответственно, а преобразование  $y_3$  - простое бинарное превращение биомассы жертв в биомассу хищников.

В общем случае естественная динамика ресурсов системы отображается балансовым уравнением для каждого компартмента и каждого ресурса:

$$x_j^k(t+1) = x_j^k(t) + \sum_{y_i \in S_j^+(t)} f_{ij}^k(t) - \sum_{y_l \in S_j^-(t)} f_{jl}^k(t), \quad (2.1.6)$$

$$1 \leq j \leq n(t), \quad 1 \leq k \leq N,$$

где  $S_j^+(t)$ ,  $S_j^-(t)$  - множества входных и выходных вершин обоих типов для компартмента  $y_j$  в момент  $t$  (при наличии петли  $z_{jj}^k$  - включая сам компартмент  $y_j$ ).

Уравнение (2.1.6) учитывает как пассивную регуляцию системы (за счет изменения  $f_{j1}^k, f_{mj}^k \in F_1$  в силу заданных соотношений), так и активную (за счет выбора  $f_{jp}^k, f_{qj}^k \in F_2$ ). Активная регуляция может дополнительно изменять множества  $Y$  и  $Z$ .

Изменения множеств  $X$  и  $F$  естественно назвать ресурсными, а изменения множеств  $Y$  и  $Z$  - структурными. Совокупность ресурсных и структурных изменений определяет динамику системы  $S$ .

Обобщенное состояние системы  $S(t)$  изменяется также при внешних воздействиях. Внешнюю среду системы можно представить вершиной  $y_0$  с вектором состояния  $x_0(t) = (x_0^1(t), \dots, x_0^N(t))$ . Соответственно множество дуг  $Z(t)$  дополняется элементами вида  $z_{0i}^k(t), z_{i0}^k(t)$ , а множество переменных состояния дуг  $F(t)$  - элементами  $f_{0i}^k(t), f_{i0}^k(t), 1 \leq i \leq n(t), 1 \leq k \leq N$ .

Тогда влияние внешней среды на систему учитывается в (2.1.6) без изменения общности при условии, что  $y_0$  может входить в множества  $S_j^+, S_j^-$ . Кроме того, внешнее воздействие может изменять множества  $Y(t), Z(t)$ . При наличии нескольких источников воздействия приходится вводить несколько внешних вершин  $y_{01}, \dots, y_{0m}$ , соответствующих дуг и переменных состояния.

### Пример 2.1.2 (эксплуатация в системе "хищник-жертва")

Модель имеет вид

$$dx_1/dt = \varepsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 x_2 - \alpha \lambda x_1, \quad (2.1.7)$$

$$dx_2/dt = -\varepsilon_2 x_2 + \gamma_2 x_1 x_2 - \beta \lambda x_2,$$

где по сравнению с моделью (2.1.5) добавлены характеристики антропогенной эксплуатации сообщества:

интенсивность  $\lambda$  и способы  $\alpha, \beta$ .

Представление модели (2.1.7) с помощью динамического иерархического орграфа дано на рис. 2.1.4.



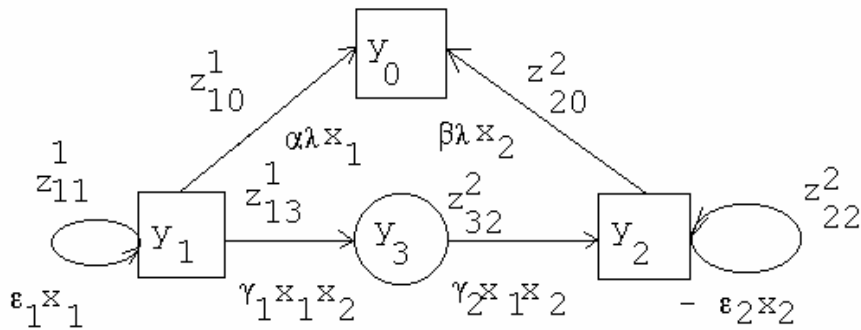


Рис. 2.1.4. Моделирование эксплуатации в системе "хищник-жертва" с помощью динамического иерархического орграфа

По сравнению с рис. 2.1.3 здесь к компартментам  $y_1$  ("жертвы") и  $y_2$  ("хищники") добавлен компартмент  $y_0$ , отображающий внешнюю среду сообщества (источник эксплуатации), и дуги  $z_{10}^1$ ,  $z_{20}^2$  с переменными состояния  $\alpha \lambda x_1$ ,  $\beta \lambda x_2$ .

В терминах динамических орграфов можно предложить три механизма реакции системы на внешнее воздействие [7]:

- 1) поисковый - поиск структурного элемента, способного разрешить возникшую в результате воздействия проблемную ситуацию без изменения состояния системы  $S$ ;
- 2) ресурсный - изменение вещественно-энергетических потоков в системе (множества  $F_2$ );
- 3) структурный - изменение структуры системы (множеств  $Y$  и  $Z$ ).

Сочетание этих механизмов позволяет моделировать различные приспособительные реакции реальных систем.

Обобщая на динамический случай предложенную в п.1.1 классификацию иерархических систем по их централизованности, введем следующее

Определение 2.1.1. Иерархическая система имеет тенденцию:

а) к *полной централизованности*, если

$$x_1(t) \rightarrow R ;$$

$$t \rightarrow \infty$$

б) к *полной децентрализованности*, если

$$x_1(t) \rightarrow 0 ;$$

$$t \rightarrow \infty$$

в) к *преимущественной централизованности*, если

n

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=2} x_i(t) ;$$

$$t \rightarrow \infty \quad t \rightarrow \infty \quad i=2$$

г) к *преимущественной децентрализованности*, если

знак противоположный.

Как и ранее, здесь  $y_1$  - полюс, R - обобщенный ресурс иерархической системы.

Кроме соотношения (2.1.6), возможны и другие правила изменения значений вершин, например:

Первое правило Робертса [9]:

обозначим  $p_j(t+1) = x_j(t+1) - x_j(t)$  и положим

n

$$p_j(t+1) = \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i(t), \quad j=1, \dots, n. \quad (2.1.8)$$

Второе правило Робертса [9]:

n

$$x_j(t+1) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i(t), \quad j=1, \dots, n. \quad (2.1.9)$$

Третье правило Робертса [9]:

n

$$p_j(t+1) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i(t), \quad j=1, \dots, n. \quad (2.1.10)$$

Балансовое правило:

$$p_j(t+1) = \varepsilon_j x_j(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i(t) - \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j(t), \quad (2.1.11) \quad j=1, \dots, n.$$

Для иерархических оргграфов суммирование в формулах (2.1.8)–(2.1.11) достаточно проводить по множеству  $S_j^+$  входных вершин для вершины  $y_j$  (во второй сумме в (2.1.11) – по множеству выходных вершин  $S_j^-$ ).

В предположении, что рассматривается единственный ресурс, т.е. индекс  $k$  можно опустить, правила (2.1.8)–(2.2.11) получаются при принятии гипотезы линейности

$$f_{ij}(t) = a_{ij} x_i(t), \quad (2.1.12)$$

где  $a_{ij}$  – вес дуги  $z_{ij}$ . В частности, балансовое правило (2.2.11) конкретизирует правило (2.1.6).

Гипотеза линейности (2.1.12) обладает следующими преимуществами:

- 1) в определенных важных с точки зрения практики диапазонах параметров систем характеристики их функционирования действительно являются линейными, т.е. гипотеза (2.1.12) адекватна;
- 2) значительно облегчаются требования к сбору информации (для каждой связи  $z_{ij}$  достаточно найти значение единственного параметра  $a_{ij}$ );
- 3) линейные системы допускают детальное аналитическое исследование.

Поэтому изучение линейных иерархических систем представляется целесообразным как с теоретической, так и (особенно!) с практической точки зрения.

Все приведенные правила представляют собой линейные системы конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Заметим, что при записи соотношений (2.1.8)–(2.1.11) в матричной форме вместо матрицы  $A = \|a_{ij}\|$  следует использовать транспонированную матрицу  $A'$ :

$$p(t+1) = A'p(t), \quad (2.1.8')$$

$$x(t+1) = A'x(t), \quad (2.1.9')$$

$$x(t+1) = (E+A')x(t), \quad (2.1.10')$$

$$x(t+1) = (E+\varepsilon+A'-S)x(t), \quad (2.1.11')$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,

$p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ ,

$E$  - единичная матрица порядка  $n$ ,

$\varepsilon, S$  - диагональные матрицы порядка  $n$   
с элементами  $\varepsilon_j$  и  $\sum a_{jk}$  соответственно.

## 2.2. Устойчивость иерархических систем

Рассмотрим вопрос об устойчивости системы конечно-разностных уравнений

$$x(t+1) = Ax(t), \quad (2.2.1)$$

где  $A$  - квадратная матрица порядка  $n$  с постоянными коэффициентами.

Напомним, что система (2.2.1) называется устойчивой (асимптотически устойчивой), если все ее решения устойчивы (асимптотически устойчивы). Будем говорить в этом случае, что матрица  $A$  устойчива (асимптотически устойчива).

Пусть  $\lambda_i, i=1, \dots, n$  - собственные числа матрицы  $A$ . Тогда  $A$ :

- асимптотически устойчива, если  $\forall i |\lambda_i| < 1$ ;
- устойчива, если  $\forall i |\lambda_i| \leq 1$  и собственные числа, равные 1, не являются связанными в жордановой форме  $A$  [9];
- неустойчива, иначе [5].

Если матрица  $A$  иерархическая, то ее собственные числа равны диагональным элементам (весам петель); если  $A$  строго иерархическая, то все ее собственные числа равны нулю.

Рассмотрим специальное определение устойчивости, связанное со строго иерархическими матрицами.

Определение 2.2.1.

Матрица  $A$  называется *булевски устойчивой (В-устойчивой)*, если она устойчива при любых значениях ее ненулевых элементов.

Тогда справедливо следующее очевидное достаточное условие В-устойчивости:

Теорема 2.2.1.

Строго иерархическая матрица В-устойчива.

Необходимое условие В-устойчивости получено в следующей форме.

Теорема 2.2.2.

Если квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  В-устойчива, то не существует строки (столбца), в которой единственный ненулевой элемент находится на главной диагонали.

Доказательство.

Пусть в  $i$ -й строке матрицы  $A$  существует единственный ненулевой элемент  $a_{ii}$ , тогда  $\det(A - \lambda E) = (a_{ii} - \lambda)M_{ii}$ , где  $M_{ii}$  - соответствующий минор. Тогда существует ненулевое собственное значение  $\lambda_i = a_{ii}$ , т.е. при  $|a_{ii}| > 1$   $|\lambda_i| > 1$ , и матрица  $A$  не является В-устойчивой.

Вернемся теперь к системам (2.1.8') - (2.1.11'). Заметим, что матрицы  $A$  и  $A'$  устойчивы (или неустойчивы) одновременно, т.к. множества их собственных чисел совпадают.

Пусть матрица  $A$  иерархическая. Тогда условия асимптотической устойчивости имеют следующий вид:

- для систем (2.1.8') - (2.1.9'):  $\forall i |a_{ii}| < 1$ ;

- для системы (2.1.10'):  $\forall i |1 + a_{ii}| < 1$ ;

- для системы (2.1.11'):  $\forall i |1 + \varepsilon_i + a_{ii} - \sum_{k=1}^n a_{ik}| < 1$ .

В-устойчивость здесь невозможна, т.к. собственные числа матрицы перехода от  $x(t)$  к  $x(t+1)$  равны ее диагональным элементам и всегда можно выбрать их так, чтобы  $|\lambda_i| > 1$ .

Пусть теперь матрица  $A$  строго иерархическая. Тогда системы (2.2.8'), (2.2.9') асимптотически  $V$ -устойчивы. Матрицы  $(E+A')$ ,  $(E+\varepsilon+A'-S)$  не удовлетворяют необходимому условию  $V$ -устойчивости, т.к. в первом столбце единственный ненулевой элемент находится на главной диагонали. Условия обычной устойчивости те же, что и для иерархических матриц.

Обсудим возможные приложения понятия  $V$ -устойчивости и иерархических орграфов к исследованию моделей реальных (на примере эколого-экономических) систем. Здесь предполагается, что матрица  $A$  неотрицательна, т.е. всегда  $a_{ij} \geq 0$ .

В этом случае понятие  $V$ -устойчивости совпадает с понятием качественной устойчивости, или знак-устойчивости. Матрица  $A$  называется знак-устойчивой ( $S$ -устойчивой), если она устойчива при любых значениях абсолютных величин ее ненулевых элементов (см., например, [10]).

Рассмотрим известную модель Лесли численности популяции с учетом возрастной структуры:

$$x(t+1) = Lx(t), \quad (2.2.2)$$

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$x_i(t)$  - численность особей возраста  $[i-1, i]$  в момент  $t$ ;

$b_i$  - коэффициент рождаемости  $i$ -й возрастной группы;

$s_j$  - коэффициент выживаемости  $j$ -й возрастной группы,

$$i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n-1.$$

Матрица  $L$  неотрицательна и неразложима при  $b_n \neq 0$ , поэтому по теории Перрона-Фробениуса [3] она имеет положительное собственное число  $\lambda_{\max}$  такое, что модули всех других собственных чисел не превосходят  $\lambda_{\max}$ .

Таким образом, условие  $V$ -устойчивости матрицы  $L$  можно записать в виде  $\lambda_{\max} < 1$  для всех  $b_i, s_j$ .

В [10] показано, что устойчивость матрицы Лесли определяется величиной

$$R = b_1 + b_2 s_1 + b_3 s_1 s_2 + \dots + b_n s_1 s_2 \dots s_{n-1} : \quad (2.2.3)$$

если  $R < 1$ , то  $\lambda_{\max} < 1$  и  $x(t) \rightarrow 0$ ;  
 $t \rightarrow \infty$

если  $R = 1$ , то  $\lambda_{\max} = 1$  и  $x(t) = x_0 \lim_{t \rightarrow \infty} L^t$ ;

если  $R > 1$ , то  $\lambda_{\max} > 1$  и  $x(t) \rightarrow \infty$ .  
 $t \rightarrow \infty$

Таким образом, условием устойчивости (соответственно асимптотической или нейтральной) служит выполнение соотношения  $R < 1$  ( $R = 1$ ). Поскольку всегда можно подобрать правую часть (2.2.3) так, чтобы  $R > 1$ , то матрица Лесли не является  $V$ -устойчивой. Содержательно это означает, что существуют такие значения коэффициентов рождаемости и выживаемости, что описываемая моделью Лесли популяция не вымирает, а стабилизируется или безгранично растет.

Пусть матрица  $A$  - строго иерархическая, т.е. удовлетворяет достаточному условию  $V$ -устойчивости. Рассмотрим модель динамики численности популяции

$$x(t+1) = A'x(t) \quad (2.2.4)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (2.2.5)$$

$V$ -устойчивость означает, что  $x(t) \rightarrow 0$ . Для уточнения этого  
 $t \rightarrow \infty$

вывода запишем систему (2.2.4) в координатной форме:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= 0 \\x_2(t+1) &= a_{12}x_1(t) \\x_3(t+1) &= a_{13}x_1(t) + a_{23}x_2(t) \\&\dots \\x_n(t+1) &= a_{1n}x_1(t) + a_{2n}x_2(t) + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}(t)\end{aligned}$$

(некоторые  $a_{ij}$  могут равняться нулю). С учетом (2.2.5) получаем

$$\begin{aligned}x_1(1) &= 0 \\x_2(1) &= a_{12}x_1^0 \\&\dots \\x_n(1) &= a_{1n}x_1^0 + a_{2n}x_2^0 + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}^0 ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1(2) &= 0 \\x_2(2) &= a_{12}x_1(1) = 0 \\&\dots \\x_n(2) &= 0 + a_{2n}x_2(1) + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}(1) \\&\text{и т.д.}\end{aligned}$$

Таким образом, не более чем через  $n$  шагов  
 $x_1(n) = x_2(n) = \dots = x_n(n) = 0$ .

Это означает, что популяция, возрастная структура из  $n$  групп которой задается строго иерархическим орграфом, вымирает не более, чем через  $n$  шагов независимо от начальной численности. Поэтому для моделирования эколого-экономических систем, имеющих иерархическую структуру, целесообразно вместо правила (2.1.9) пользоваться правилами (2.1.10) или (2.1.11) (возможно, и другими). Получающаяся при этом матрица системы  $f(A)$  уже не будет  $V$ -устойчивой (см. (2.1.10'), (2.1.11')). Иначе говоря, в соотношении (2.2.1) матрица  $A$  должна быть не строго иерархической, а иерархической. При этом условия устойчивости легко выписываются и проверяются.

Пример 2.2.2.



Рассмотрим систему из  $n$  предприятий, загрязняющих водоем ( $(n+1)$ -й элемент системы). Обозначим  $x_i(t)$  - количество загрязняющего вещества в  $i$ -м элементе системы в момент  $t$ ;  
 $a_{ij}$  - доля загрязняющего вещества, переходящая из  $i$ -го элемента в  $j$ -й за время  $[t, t+1]$ . Сначала опишем "механическое" загрязнение по правилу

$$x_i(t+1) = x_i(t), \quad i=1, \dots, n;$$

$$x_{n+1}(t+1) = x_{n+1}(t) + \sum_{i=1}^n a_{i,n+1} x_i(t),$$

или в матричной форме

$$x(t+1) = M_1 x(t) \quad (\text{рис. 2.2.1a}).$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_{1n+1} & a_{2n+1} & \dots & a_{nn+1} & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1-q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-q_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1-q_n & 0 \\ a_{1n+1} & a_{2n+1} & \dots & a_{nn+1} & 1-p \end{pmatrix}$$

а

б

Рис. 2.2.1. Матрицы к примеру 2.2.2

Легко видеть, что здесь

$$x_i(t) \equiv x_0, \quad i=1, \dots, n;$$

$$x_{n+1}(t) \rightarrow \infty,$$

$t \rightarrow \infty$

Таким образом, количество загрязняющего вещества в водоеме со временем неограниченно растет.

Теперь учтем дополнительно очистные мероприятия и возможности самоочищения водоема:

$$x_i(t+1) = x_i(t) - q_i x_i(t), \quad i=1, \dots, n;$$

$$x_{n+1}(t+1) = x_{n+1}(t) + \sum_{i=1}^n a_{i,n+1} x_i(t) - p x_{n+1}(t),$$

или в матричной форме

$$x(t+1) = M_2 x(t), \quad (\text{рис. 2.2.16})$$

где  $q_i$  - доля сокращения загрязнения за счет очистки на  $i$ -м предприятии;  $p$  - доля его сокращения за счет самоочищения водоема.

Все собственные числа матрицы  $M_2$  меньше единицы, поэтому имеем  $x(t) \rightarrow 0$ .

$t \rightarrow \infty$

Таким образом, в этом случае загрязнение водоема со временем сводится к нулю.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости иерархических систем в непрерывном случае. Непрерывным аналогом конечно-разностных систем (2.1.10'), (2.1.11') являются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$dx/dt = A' x(t), \quad (2.2.6)$$

$$dx/dt = (\varepsilon + A' - S) x(t), \quad (2.2.7)$$

где  $A$  - квадратная матрица порядка  $n$  с вещественными коэффициентами;  $\varepsilon, S$  - соответствующие диагональные матрицы.

Если матрица  $A$  иерархическая, то условия асимптотической устойчивости для систем (2.2.6)–(2.2.7) имеют вид

$$\forall i \quad a_{ii} < 0 ;$$

$$\forall i \quad (\varepsilon_i + a_{ii} - \sum_{k=1}^n a_{ik}) < 0 .$$

Таким образом, в приложениях (где  $A$  неотрицательна), система (2.2.6) является неустойчивой; устойчивость системы (2.2.7) зависит от конкретных значений параметров.

Если матрица  $A$  строго иерархическая, то система (2.2.6) нейтрально устойчива (и даже нейтрально  $B$ -устойчива); условие асимптотической устойчивости системы (2.2.7) принимает вид

$$\forall i \quad \varepsilon_i < \sum_{k=1}^n a_{ik} ,$$

т.е. коэффициент прироста ресурса в любом элементе системы должен быть меньше, чем сумма коэффициентов "отдачи" ресурса из этого элемента во все остальные.

Линейная система вида (2.2.6) используется для анализа устойчивости нелинейной системы

$$dx/dt = f(x(t)) \tag{2.2.8}$$

такой, что  $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ , т.е.  $A$  - линеаризованная матрица исходной системы (2.2.8). Выясним, какой вид должна иметь правая часть (2.2.8), чтобы ее линеаризованная матрица  $A$  была иерархической (строго иерархической).

Запишем систему (2.2.8) в координатной форме:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ dx_n/dt &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Условие иерархичности матрицы A можно записать в виде

$$\forall i > j \quad a_{ij} = 0 ,$$

а строгой иерархичности - в виде

$$\forall i \geq j \quad a_{ij} = 0 , \quad i, j=1, \dots, n.$$

Тогда правая часть системы (2.2.8), порождающей при линеаризации иерархическую матрицу, должна иметь вид

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n), \\ f_2(x) &= f_2(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

$$f_{n-1}(x) = f_{n-1}(x_{n-1}, x_n),$$

$$f_n(x) = f_n(x_n),$$

а правая часть системы, порождающей строго иерархическую матрицу - вид

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x_2, \dots, x_n), \\ f_2(x) &= f_2(x_3, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

$$f_{n-1}(x) = f_{n-1}(x_n),$$

$$f_n(x) = C.$$

Таким образом, в последнем случае

$$x_n(t) = Ct + C_1.$$

### **ГЛАВА 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР**

В третьей главе собраны задачи оптимизации некоторой целевой функции, связанной с иерархической структурой. Рассматриваются задачи линейного программирования с иерархической структурой, иерархические задачи оптимального управления, а также линейные многошаговые игры с иерархическими матрицами. Обсуждаются возможные приложения.

#### **3.1. Иерархические задачи линейного программирования**

Ориентированный граф  $D$  или, что то же самое, его матрица смежности  $A$  естественным образом определяют пару задач линейного программирования (ЗЛП):

прямую

$$(c, x) \rightarrow \max \quad (3.1.1)$$

$$Ax \leq b \quad (3.1.2)$$

$$x \geq 0, \quad (3.1.3)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  - вектор значений вершин;

$c = (c_1, \dots, c_n)$  - вектор коэффициентов целевой функции;

$b = (b_1, \dots, b_n)$  - вектор правых частей ограничений;

$(c, x)$  - скалярное произведение векторов,

и двойственную

$$(b, p) \rightarrow \min \quad (3.1.4)$$

$$A'p \geq c \quad (3.1.5)$$

$$p \geq 0, \quad (3.1.6)$$

где  $p = (p_1, \dots, p_n)$  - вектор двойственных переменных.

Заметим, что транспонирование сохраняет свойство иерархичности (строгой иерархичности) матрицы с точностью до перестановки составляющих ее блоков. Заметим также, что в любом строго иерархическом орграфе существует  $n_1 \geq 1$  вершин без входных дуг и  $n_m \geq 1$  вершин без выходных дуг. Вершинам без входных дуг соответствуют нулевые столбцы в  $A$ , а вершинам без выходных дуг - нулевые столбцы в  $A'$ . Переменные ЗЛП, соответствующие нулевым столбцам, входят в левые части ограничений с нулевыми коэффициентами и могут принимать любые неотрицательные значения.

Поэтому во избежание неразрешимости ЗЛП переменные, соответствующие нулевым столбцам, следует исключать из целевой функции. Чтобы сохранить общий вид ЗЛП (3.1.1)-(3.1.3) и (3.1.4)-(3.1.6), положим эти переменные равными нулю.

#### Определение 3.1.1.

Пусть  $SH = (Y, Z)$  - строго иерархический орграф с  $n$  вершинами, квадратная матрица  $A = ||a_{ij}||$  порядка  $n$  - его матрица смежности,  $a_{ij}$  - вес дуги  $(y_i, y_j) \in Z$ ,  $x_i$  - значение вершины  $y_i \in Y$ .

*Строго иерархической ЗЛП, порождаемой орграфом  $SH$ , называется ЗЛП вида (3.1.1)-(3.1.3), где*

$$x = (0, \dots, 0, x_{n_1+1}, \dots, x_n),$$

$$c = (0, \dots, 0, c_{n_1+1}, \dots, c_n),$$

$$b = (b_1, \dots, b_{n-n_m}, 0, \dots, 0),$$

$n_1, n_m$  - число вершин в первом и последнем слоях  $SH$  соответственно.

Аналогично, для двойственной ЗЛП (3.1.4)-(3.1.6) полагаем  $p = (p_1, \dots, p_{n-n_m}, 0, \dots, 0)$ .

Рассмотрим левые и правые древовидные ЗЛП с двумя слоями вершин (двумя уровнями иерархии). Матрицы смежности имеют следующий вид:

$$A_{\text{л}} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \quad A_{\text{п}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(некоторые из коэффициентов могут быть равны нулю). Отсюда сразу следует очевидная

Теорема 3.1.1.

Оптимальное решение правой древовидной ЗЛП с двумя слоями вершин

$$x_n \rightarrow \max, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

определяется по формуле

$$x_n^* = \min\{b_1/a_{1n}, \dots, b_{n-1}/a_{n-1,n}\}.$$

Левая древовидная ЗЛП с двумя слоями вершин имеет вид

$$\sum_{j=2}^n c_j x_j \rightarrow \max \tag{3.1.7}$$

$$\sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \leq b_1 \tag{3.1.8}$$

$$x_j \geq 0, \quad j=2, \dots, n. \tag{3.1.9}$$

Соотношение (3.1.8) представляет собой гиперплоскость в пространстве векторов  $x_2, \dots, x_n$ . Область допустимых значений ЗЛП (3.1.7)–(3.1.9) образуется пересечением этой гиперплоскости с координатными плоскостями, а все крайние точки суть точки пересечения гиперплоскости (3.1.8) с осями координат.

Приведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 3.1.2.

Оптимальное решение левой древовидной ЗЛП с двумя слоями вершин имеет вид  $(0, \dots, 0, x_i^*, 0, \dots, 0)$ ,

где точка  $x_i^*$  определяется условием  $c_i x_i^* = \max_{2 \leq j \leq n} c_j x_j$ .

Заметим, что теорема 3.1.1 справедлива также для двойственной ЗЛП с матрицей  $A'_{л}$ , а теорема 3.1.2 - для двойственной ЗЛП с матрицей  $A'$ .

В общем случае для последовательных ЗЛП справедлива следующая

Теорема 3.1.3.

Пусть ЗЛП имеет вид

$$\begin{aligned} & n \\ & \sum_{j=n_1+1} c_j x_j \rightarrow \max \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} a_{1,n_1+1} x_{n_1+1} + \dots + a_{1,n_1+n_2} x_{n_1+n_2} &\leq b_1 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} a_{n_1,n_1+1} x_{n_1+1} + \dots + a_{n_1,n_1+n_2} x_{n_1+n_2} &\leq b_{n_1} \\ \\ a_{n_1+1,n_1+n_2+1} x_{n_1+n_2+1} + \dots + a_{n_1+1,n_1+n_2+n_3} x_{n_1+n_2+n_3} &\leq b_{n_1+1} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned} a_{n_1+n_2,n_1+n_2+1} x_{n_1+n_2+1} + \dots + a_{n_1+n_2,n_1+n_2+n_3} x_{n_1+n_2+n_3} &\leq b_{n_1+n_2} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n-n_m-n_m-1,n-n_m} x_{n-n_m} + \dots + a_{n-n_m-n_m-1,n} x_n &\leq b_{n-n_m-n_m-1} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned} a_{n-n_m-1,n-n_m} x_{n-n_m} + \dots + a_{n-n_m-1,n} x_n &\leq b_{n-n_m-1} \\ \\ x_j \geq 0, \quad j=n_1+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Тогда вектор  $(x_{n_1+1}^*, \dots, x_n^*)$  является оптимальным планом ЗЛП (3.1.10)-(3.1.14) тогда и только тогда, когда: подвектор  $(x_{n_1+1}^*, \dots, x_n^*)$  является оптимальным планом ЗЛП



$$\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} c_j x_j \rightarrow \max \quad (3.1.15)$$

при ограничениях (3.1.11) и

$$x_j \geq 0, \quad j=n_1+1, \dots, n_1+n_2; \quad (3.1.16)$$

подвектор  $(x_{n_1+n_2+1}^*, \dots, x_{n_1+n_2+n_3}^*)$  является оптимальным планом ЗЛП

$$\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} c_j x_j \rightarrow \max \quad (3.1.17)$$

при ограничениях (3.1.12) и

$$x_j \geq 0, \quad j=n_1+n_2+1, \dots, n_1+n_2+n_3; \quad (3.1.18)$$

.....

подвектор  $(x_{n-n_m}^*, x_n^*)$  является оптимальным планом ЗЛП

$$\sum_{j=n-n_m}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (3.1.19)$$

при ограничениях (3.1.13) и

$$x_j \geq 0, \quad j=n-n_m, \dots, n. \quad (3.1.20)$$

Доказательство.

Пусть  $(x_{n_1+1}^*, \dots, x_n^*)$  – оптимальный план ЗЛП (3.1.10)–(3.1.14).  
 Каждый из подвекторов  $(x_{n_1+1}^*, \dots, x_{n_1+n_2}^*), \dots, (x_{n-n_m}^*, \dots, x_n^*)$   
 удовлетворяет соответствующим ограничениям (3.1.11),  
 (3.1.16), ..., (3.1.13), (3.1.20), т.е. является допустимым  
 планом ЗЛП (3.1.11), (3.1.15), (3.1.16), ...,  
 (3.1.13), (3.1.19), (3.1.20) соответственно. В силу аддитивности  
 целевой функции (3.1.10) каждый из допустимых подвекторов  
 доставляет максимум соответствующей целевой функции (3.1.15),  
 ..., (3.1.19), т.е. является оптимальным планом ЗЛП  
 (3.1.11), (3.1.15), (3.1.16), ..., (3.1.13), (3.1.19), (3.1.20).

Пусть теперь  $(x_{n1+1}^*, \dots, x_{n1+n2}^*), \dots, (x_{n-nm}^*, \dots, x_n^*)$  – оптимальные планы ЗЛП (3.1.11), (3.1.15), (3.1.16), ..., (3.1.13), (3.1.19), (3.1.20). Тогда в силу строения системы ограничений ЗЛП (3.1.11)–(3.1.14) вектор  $(x_{n1+1}^*, \dots, x_n^*)$  является ее допустимым планом и доставляет максимум целевой функции (3.1.10).

Как и ранее, результаты для двойственных ЗЛП с матрицами  $A'_л$  и  $A'_п$  совпадают с результатами для прямых ЗЛП с матрицами  $A_п$  и  $A_л$  соответственно. В общем случае это объясняется следующими соображениями симметрии: при преобразовании, состоящем в замене местами блоков

$$\begin{array}{cccc}
 A_{11} := A_{mm} & ; & A_{21} := A_{m-1,m} & ; & \dots & & A_{m1} := A_{1m} & ; \\
 A_{12} := A_{m,m-1} & ; & A_{22} := A_{m-1,m-1} & ; & \dots & & A_{m2} := A_{1,m-1} & ; \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 A_{1m} := A_{m1} & ; & A_{2m} := A_{m-1,1} & ; & \dots & & A_{mm} := A_{11} & ,
 \end{array}$$

матрица  $A_л$  ( $A_п$ ) переходит в матрицу, расположение ненулевых элементов которой совпадает с их расположением в матрице  $A'_п$  ( $A'_л$ ) соответственно.

Рассмотрим примеры содержательных постановок задач, ведущих к строго иерархическим ЗЛП.

#### Пример 3.1.1: трофическая сеть.

Рассмотрим биологическую систему, состоящую из видов  $i=1, \dots, n$ , в которой особи одного вида могут питаться особями другого вида. Построим ориентированный граф  $SH=(Y, Z)$ , в котором вершины  $y_1, \dots, y_n \in Y$  обозначают виды, а дуга  $(y_i, y_j) \in Z$  проводится в том и только том случае, если  $j$ -й вид питается  $i$ -м.

Естественно считать, что если  $i$ -й вид питается  $j$ -м, то  $j$ -й вид не может питаться  $i$ -м; каннибализм также исключается. Тогда орграф  $SH$  не содержит контуров и петель, т.е. является строго иерархическим.

Дальнейшая конкретизация вида строго иерархического орграфа зависит от рассматриваемой биосистемы. Прежде всего предположим, что единственная вершина  $y_n$ , не имеющая выходных дуг (т.е. видов-хищников), обозначает популяцию человека. Во многих реальных биосистемах трофическая сеть представляет собой "пирамиду", т.е. на каждом следующем уровне трофической иерархии (слое вершин орграфа) видов-хищников меньше, чем их жертв на предыдущем уровне. Однако, это не обязательно: например, возможна ситуация, когда несколько видов второго уровня питаются единственным видом корма первого уровня, и т.п.

Сопоставим каждой вершине  $y_i$  значение  $p_i$ , равное биомассе вида  $i$  в начале некоторого периода, а каждой дуге  $(y_i, y_j)$  - вес  $a_{ij}$ , равный доле биомассы особи вида  $i$ , переходящей в биомассу особи вида  $j$  при выедании в течение периода.

Обозначим также

$b_i$  - затраты на содержание одной особи вида  $i$  (предполагается, что биосистема создается человеком для своих нужд);

$c_j$  - минимально необходимая для жизнеобеспечения  $j$ -го вида биомасса, подлежащая усвоению  $j$ -м видом при питании остальными видами в течение периода.

Тогда можно сформулировать строго иерархическую ЗЛП

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i p_i \rightarrow \min \quad (3.1.21)$$

$$\sum_{i \in S_j^+} a_{ij} p_i \geq c_j, \quad j = n_1 + 1, \dots, n, \quad (3.1.22)$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.1.23)$$

где  $S_j^+$  - множество видов, служащих пищей для  $j$ -го вида;  $n_1$  - число видов, не питающихся другими видами данной биосистемы.

Эта ЗЛП является двойственной для правого однополюсного орграфа с матрицей  $A_n$ .

Рассмотрим для иллюстрации тестовый числовой пример. Пусть биосистема состоит из 6 видов: 1,2,3 - растения, 4,5 - травоядные животные, 6 - популяция человека. Матрица  $A'_n$  и векторы  $b$  и  $c$  имеют следующие значения:

```

0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.4 0.5 0.3 0.0 0.0 0.0
0.3 0.3 0.4 0.0 0.0 0.0
0.2 0.1 0.2 0.4 0.5 0.0

```

$c=(0,0,0,2500,3000,2000)$ ;  $b=(2,3,2,5,6,0)$ .

Результаты решения двойственной ЗЛП для правого древовидного орграфа с помощью симплекс-метода показаны ниже.

Конфигурация орграфа	Однозначный	Последовательный	Общего вида
Оптимальное решение ЗЛП	(625,0,750,0,400)	(142.9,0,642.8,0,400)	(142.9,0,160.7,0,85.7)
Оптимальное значение	5150	3971.4	1120.5

Таким образом, во всех случаях виды 2 и 4 фактически отсутствуют в биосистеме, т.к. их оптимальная биомасса равна нулю. Этот результат имеет простое объяснение: поскольку правая древовидная ЗЛП включает  $n-1$  переменную и  $n-n_1$  ограничений ( $n_1 > 1$ ), то ранг матрицы ограничений не превышает  $n_1-1$ , т.е. оптимальное решение содержит по крайней мере  $n_1-1$  нулевую компоненту. При этом в случае однозначного орграфа нарушается связность, т.е. для вида 1 нет "хищника"; очевидно, в этом случае линейное приближение недостаточно хорошо отражает содержательный смысл ситуации.

Значение целевой функции (затраты на содержание биосистемы за период времени) тем меньше, чем большим числом видов-"жертв" может питаться каждый вид-"хищник".

Пример 3.1.2: организационная структура.

ЗЛП (3.1.21)–(3.1.23) можно интерпретировать как задачу формирования организационной структуры, положив

$r_i$  – численность исполнителей в  $i$ -м подразделении,  $i=1, \dots, n-1$  (численность  $r_n$  не определяется; естественно предположить, что  $r_n=1$  – руководитель организации);

$b_i$  – средние затраты на содержание одного исполнителя  $i$ -го подразделения (например, заработная плата);

$a_{ij}$  – вероятность успешного выполнения одним исполнителем  $j$ -го подразделения задачи, поставленной перед ним  $i$ -м (вышестоящим) подразделением;

$c_j$  – минимально допустимая для  $j$ -го подразделения вероятность выполнения его задачи.

При такой интерпретации естественно считать, что порождающий ЗЛП (3.1.21)–(3.1.23) оргграф, вершины которого обозначают подразделения организации, а дуги – отношения иерархии, будет правым древовидным (в большинстве случаев – однозначным), поэтому можно применять теоремы 3.1.2 и 3.1.3.

Конечно, предположение о том, что вероятность успешного выполнения задачи можно оценить соотношением (3.1.22), является весьма сильным; но не более, чем обычно в линейном программировании.

**3.2. Иерархические задачи оптимального управления**

Определение 3.2.1.

Пусть  $SH=(Y, Z)$  – строго иерархический оргграф с  $n$  вершинами. Строго иерархической задачей оптимального управления (ЗОУ), порождаемой  $SH$ , называется задача

$$(c^{T+1}, x^{T+1}) + \sum^T (c^t, x^t) + \sum^T (b^t, u^t) \rightarrow \max \quad (3.2.1)$$

$$t=1 \qquad t=0$$

$$x^{t+1} = A'_t x^t + B'_t u^t ; \qquad (3.2.2)$$

$$D'_t u^t \leq d^t , \quad t=0,1,\dots,T; \qquad (3.2.3)$$

$$x^0 = x_0 , \qquad (3.2.4)$$

где  $x^t, u^t, b^t, c^t, d^t, x_0$  - векторы из  $R^n$ ;

набор  $(x_i^t, u_i^t, b_i^t, d_i^t, x_{0i})$  является значением вершины  $y_i$ ;

для вершин первого слоя  $y_i \in L_1$

$$d_i^t = 0 ; \qquad (3.2.5)$$

для вершин последнего слоя  $y_i \in L_m$

$$u_i^t = 0 ; \qquad (3.2.6)$$

$A_t, B_t, D_t$  - строго иерархические матрицы весов дуг (каждой дуге из  $Z$  приписываются три значения  $a_{ij}^t, b_{ij}^t, d_{ij}^t$ ).

Требуется найти последовательность управлений  $u_{opt}^t$ ,  $t=0, \dots, T$ , удовлетворяющих (3.2.3), которая вместе с соответствующей последовательностью  $x_{opt}^t$ , определяемой формулой (3.2.2) при начальном значении (3.2.4), максимизирует целевую функцию (3.2.1).

Как известно [1], для линейных дискретных ЗОУ справедлива

Теорема 3.2.1 (принцип максимума).

Для того, чтобы в задаче (3.2.1)-(3.2.4) управление  $u_{opt}^t$  было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$H_t(u_{opt}^t, p^t) = \max_{u \in U_t} H_t(u, p^t) , \qquad (3.2.7)$$

где  $U_t$  - множество векторов  $u^t$ , описываемое множеством (3.2.3);  $p^t$  - соответствующие условию (3.2.2) двойственные переменные,

определяемые формулой

$$p^{t-1} = c^t + A_t p^t, \quad t=T, T-1, \dots, 1; \quad p^T = 0; \quad (3.2.8)$$

функция Гамильтона  $H_t$  имеет вид

$$H_t(u^t, p^t) = (b^t, u^t) + (p^t, V'_t u^t). \quad (3.2.9)$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (3.2.8), легко получить формулу для вычисления  $p^t$ :

$$p^t = c^{t+1} + A_t c^{t+2} + A_t^2 c^{t+3} + \dots + A_t^{T-t-1} c^T, \quad t=0, \dots, T-1. \quad (3.2.10)$$

Таким образом, функция Гамильтона (3.2.9) является линейной функцией переменных  $u^t$ :

$$H(u^t) = (C_t, u^t),$$

где не содержащая  $u^t$  векторная величина  $C_t$  зависит от параметров  $A_t, V_t, b^t, c^t$ .

Добавим к ЗОУ (3.2.1)-(3.2.4) естественно возникающие в приложениях условия неотрицательности

$$u^t \geq 0. \quad (3.2.11)$$

Тогда для нахождения максимума функции Гамильтона (3.2.9) при ограничении (3.2.3) нужно решить ЗЛП

$$(C_t, u^t) \rightarrow \max \quad (3.2.12)$$

$$D'_t u^t \leq d^t \quad (3.2.13)$$

$$u^t \geq 0, \quad t=0, 1, \dots, T. \quad (3.2.14)$$

Эта ЗЛП является строго иерархической того же типа, что и исходная строго иерархическая ЗОУ (3.2.1)–(3.2.4); в частности, для решения последовательных ЗЛП применима теорема 3.1.3.

Пример 3.2.1: сбор урожая в биосистеме.

Рассмотрим динамическое обобщение примера 3.1.1. Пусть  $x_i^t$  – биомасса вида  $i$  в момент  $t$  (скажем, в начале года  $t$ );  $u_i^t$  – "сбор урожая" (изъятие) биомассы вида  $i$  в момент  $t$ ;  $b_i^t$  – цена единицы биомассы вида  $i$  в момент  $t$ ;  $c_i^t$  – биологическая ценность единицы биомассы вида  $i$  в момент  $t$ ;  $a_{ij}$  – доля биомассы особи вида  $i$ , переходящей в биомассу особи вида  $j$  при выедании в течение периода;  $\varepsilon_i$  – коэффициент естественного прироста для  $i$ -го вида.

Динамику биомассы  $j$ -го вида опишем уравнением

$$x_j^{t+1} = x_j^t + \varepsilon_j x_j^t + \sum_{i \in S_j^+} a_{ij} x_j^t - \sum_{k \in S_j^-} a_{jk} x_j^t - u_j^t, \quad (3.2.15)$$

где  $S_j^+$ ,  $S_j^-$  – множества видов, служащих "жертвами" и "хищниками" для  $j$ -го вида соответственно,  $j=1, \dots, n$ .

Тогда можно поставить следующую ЗОУ:

$$J = (c^{T+1}, x^{T+1}) + \sum_{t=1}^T (b^t, u^t) \rightarrow \max \quad (3.2.16)$$

$$x^{t+1} = (E + \varepsilon + A' - S)x^t - u^t; \quad (3.2.17)$$

$$0 \leq u^t \leq x^t, \quad t=0, 1, \dots, T; \quad (3.2.18)$$

$$x^0 = x_0. \quad (3.2.19)$$

Принципиальное отличие ЗОУ (3.2.16)–(3.2.19) от ЗОУ (3.2.1)–(3.2.4) заключается в том, что ограничение на управления



(3.2.3) заменено на (3.2.18), т.е. область допустимых управлений зависит от фазовых переменных.

Поэтому функция Гамильтона здесь имеет вид

$$H(x^t, u^t) = (b^t, u^t) + (p^t, Mx^t - u^t) + (\lambda^t, u^t - x^t), \quad (3.2.20)$$

где  $M = (E + \epsilon + A' - S)$ ,  $\lambda^t$  - множитель Лагранжа (вектор из  $R^n$ ).

Матрица  $M$  является иерархической, а не строго иерархической, как в ЗОУ (3.2.1) - (3.2.4).

Необходимые и достаточные условия максимума функционала (3.2.16) можно записать в форме [1]:

$$\text{grad}_u H(x, u) = b^t - p^t + \lambda^t = 0; \quad (3.2.21)$$

$$\lambda^t \geq 0, \quad (\lambda^t, u^t - x^t) = 0. \quad (3.2.22)$$

Из (3.2.22) получаем условия

$$\lambda_i^t > 0, \quad u_i^t = x_i^t \quad \text{или} \quad u_i^t \neq x_i^t, \quad \lambda_i^t = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad t=1, \dots, T. \quad (3.2.23)$$

Но из (3.2.21)

$$\lambda^t = p^t - b^t = c^{t+1} + Ac^{t+2} + \dots + A^{T-t-1}c^T - b^t.$$

Правая часть этого соотношения может обратиться в ноль только при специально подобранных значениях параметров  $A$ ,  $b$ ,  $c$ , что для реальной биосистемы маловероятно. Поэтому почти всегда можно считать, что  $\lambda_i^t$  не обращаются в ноль.

Тогда из (3.2.23) остается единственная возможность

$$u_i^t = x_i^t, \quad i=1, \dots, n, \quad t=1, \dots, T. \quad (3.2.24)$$

Таким образом, максимизировать функционал (3.2.16) при ограничениях (3.2.17)–(3.2.19) можно, на каждом шаге собирая всю накопленную биомассу. Следовательно, (3.2.17) принимает вид

$$x^{t+1} = (M-E)x^t, \quad (3.2.25)$$

откуда с учетом (3.2.19) получаем

$$x_{opt}^t = (M-E)^t x_0 = (\varepsilon + A' - S)^t x_0, \quad t=0, 1, \dots, T+1, \quad (3.2.26)$$

$$J_{opt} = (c^{T+1}, (\varepsilon + A' - S)^{T+1} x_0) + \sum_{t=1}^T (b^t, (\varepsilon + A' - S)^t x_0). \quad (3.2.27)$$

### **3.3. Линейные многошаговые игры двух лиц с иерархическими матрицами**

Определение 3.3.1. Пусть  $SH=(Y, Z)$  – строго иерархический оргграф с  $n$  вершинами. Строго иерархической бескоалиционной игрой двух лиц, порождаемой  $SH$ , называется линейная многошаговая игра, в которой критерии игроков имеют вид

$$J_1 = (r^{T+1}, x^{T+1}) + \sum_{t=1}^T (r^t, x^t) + \sum_{t=0}^T (s^t, u^t) \quad (3.3.1)$$

$$J_2 = (l^{T+1}, x^{T+1}) + \sum_{t=1}^T (l^t, x^t) + \sum_{t=0}^T (m^t, v^t) \quad (3.3.2)$$

уравнения управляемого процесса

$$x^{t+1} = A_t' x^t + B_t' u^t + C_t' v^t, \quad t=0, 1, \dots, T; \quad (3.3.3)$$

с начальными условиями

$$x^0 = x_0 . \quad (3.3.4)$$

Первый игрок стремится максимизировать критерий (3.3.1) выбором управлений  $u^t$  при ограничениях

$$D_t' u^t \leq d^t ; \quad (3.3.5)$$

второй игрок стремится максимизировать критерий (3.3.2) выбором управлений  $v^t$  при ограничениях

$$G_t' v^t \leq g^t , \quad t=0,1,\dots,T. \quad (3.3.6)$$

Здесь  $x^t, u^t, v^t, r^t, s^t, l^t, m^t, d^t, g^t, x_0$  - векторы из  $R^n$  ;  
набор  $(x_i^t, u_i^t, v_i^t, r_i^t, s_i^t, l_i^t, m_i^t, f_i^t, d_i^t, g_i^t, x_{0i})$   
является значением вершины  $y_i \in Y$  ;  
для вершин первого слоя  $y_i \in L_1$

$$d_i^t = g_i^t = 0 ; \quad (3.3.7)$$

для вершин последнего слоя  $y_i \in L_m$

$$u_i^t = v_i^t = 0 ; \quad (3.3.8)$$

$A_t = ||a_{ij}^t||, B_t = ||b_{ij}^t||, C_t = ||c_{ij}^t||,$   
 $D_t = ||d_{ij}^t||, G_t = ||g_{ij}^t||$  - строго иерархические матрицы;  
набор  $(a_{ij}^t, b_{ij}^t, c_{ij}^t, d_{ij}^t, g_{ij}^t)$  является значением дуги  $z_{ij} \in Z$ .

Заметим, что игра (3.3.1)-(3.3.8) обобщает строго иерархическую ЗОУ (3.2.1)-(3.2.6).

Введем для каждого игрока функцию Гамильтона

$$H_1(p^t, x^t, u^t, v^t) = (p^t, A_t' x^t + B_t' u^t + C_t' v^t + (r^t, x^t) + (s^t, u^t)), \quad (3.3.9)$$

$$H_2(q^t, x^t, u^t, v^t) = (q^t, A_t' x^t + B_t' u^t + C_t' v^t + (l^t, x^t) + (m^t, v^t)), \quad (3.3.10)$$

где  $p^t, q^t$  - соответствующие условию (3.3.3) сопряженные переменные, определяемые формулами

$$p^{t-1} = r^t + Ap^t, p^T = 0 ; \quad (3.3.11)$$

$$q^{t-1} = l^t + Aq^t, q^T = 0 . \quad (3.3.12)$$

Необходимые условия оптимальности управлений  $u^*, v^*$  в игре (3.3.1)-(3.3.8) заключаются в выполнении условий [2]

$$\max_{u^t \in U_t} H_1(p^t, x^*, u^t, v^*) = H_1(p^t, x^*, u^*, v^*), \quad (3.3.13)$$

$$\max_{v^t \in V_t} H_2(q^t, x^*, u^*, v^t) = H_2(q^t, x^*, u^*, v^*), \quad (3.3.14)$$

где  $x^*$  - траектория системы (3.3.3), порождаемая оптимальными управлениями  $u^*, v^*$ ;

$U_t, V_t$  - множества допустимых управлений, задаваемые условиями (3.3.5), (3.3.6) соответственно.

Для нахождения максимумов по формулам (3.3.13), (3.3.14) достаточно рассматривать функции Гамильтона (3.3.9), (3.3.10) в сокращенном виде

$$H_u(p^t, u^t) = (s^t, u^t) + (p^t, B_t' u^t), \quad (3.3.15)$$

$$H_v(q^t, v^t) = (m^t, v^t) + (q^t, C_t' v^t). \quad (3.3.16)$$

Рекуррентные формулы (3.3.11), (3.3.12) позволяют вычислить  $p^t, q^t$  :

$$p^t = r^{t+1} + A_t r^{t+2} + \dots + A_t^{T-t-1} r^T, \quad t=0, 1, \dots, T-1, \quad (3.3.17)$$

$$q^t = l^{t+1} + A_t l^{t+2} + \dots + A_t^{T-t-1} l^T, \quad t=0, 1, \dots, T-1. \quad (3.3.18)$$

Таким образом, функции Гамильтона (3.3.15), (3.3.16) являются линейными функциями переменных  $u^t, v^t$  соответственно:

$$H_u(u^t) = (K_u^t, u^t) , \quad (3.3.19)$$

$$H_v(v^t) = (K_v^t, v^t) , \quad (3.3.20)$$

где  $K_u^t$  – не содержащая  $u^t$  векторная величина, зависящая от параметров  $A_t, B_t, s^t, r^t$ ;

$K_v^t$  – не содержащая  $v^t$  векторная величина, зависящая от параметров  $A_t, C_t, m^t, l^t$ .

Добавим к имеющимся ограничениям естественно возникающие в приложениях условия неотрицательности управлений

$$u^t \geq 0, v^t \geq 0. \quad (3.3.21)$$

Тогда для выполнения необходимых условий оптимальности (3.3.13), (3.3.14) нужно решить пару ЗЛП

$$(K_u^t, u^t) \rightarrow \max \quad (3.3.22)$$

$$D_t' u^t \leq d^t \quad (3.3.23)$$

$$u^t \geq 0, t=0, 1, \dots, T; \quad (3.3.24)$$

$$(K_v^t, v^t) \rightarrow \max \quad (3.3.25)$$

$$G_t' v^t \leq g^t \quad (3.3.26)$$

$$v^t \geq 0, t=0, 1, \dots, T. \quad (3.3.27)$$

Эти ЗЛП являются строго иерархическими того же типа, что и исходная игра (3.3.1)–(3.3.8). Таким образом, получено обобщение результатов п.3.2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М.: Наука, 1973. – 446 с.

2. Гаврилов В.М. Оптимальные процессы в конфликтных ситуациях. М.: Сов.радио, 1969. – 160 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
4. Ицкович И.А. Анализ линейных экономико-математических моделей. – Новосибирск: Наука, 1976. – 185 с.
5. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук.думка, 1972. – 246 с.
6. Математическая теория оптимальных процессов. / Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. М.: Наука, 1983. – 392 с.
7. Методы структурной настройки систем управления производством. / Сыроежин И.М., Забежинская Е.Б., Захарченко Н.Н. и др. – М.: Статистика, 1976. – 184 с.
8. Новосельцев В.Н. Теория управления и биосистемы. – М.: Наука, 1978. – 320 с.
9. Робертс Ф. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Мир, 1986. – 486 с.
10. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
11. Верж К. Теория графов и ее приложения. – М.: ИЛ, 1962.
12. Кофман А., Дебазей Г. Сетевые методы планирования. – М.: Прогресс, 1968.