УДК 62-506:65.01

УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ОТКРЫТЫМИ АКТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ

СТЕПАНОВ Ю. А.

(Тбилиси)

Рассматривается задача управления двухуровневой простой активной системой, состояние которой находится в непосредственной зависимости от состояния окружающей ее среды. Описывается структура простой открытой активной системы. Ставится задача управления при адаптивном способе формирования данных и приводятся некоторые результаты решения задачи.

1. Введение

Исследование сложных экономических систем в отрыве от окружающей их среды существенно искажает картину о протекающих в них процессах. Более того, рассмотрение некоторого класса экономических задач как замкнутых не представляет практического интереса, или просто невозможно. Наиболее известными системами этого класса являются многоуровневые снабженческо-сбытовые, добывающие и заготовительные системы. Важной особенностью, которая характеризует системы данного класса, является тот факт, что различные уровни системы по-разному информированы о значении объективного состояния «внешней» среды, что позволяет им проявлять определенную активность по отношению друг к другу в процессе формирования состояния системы и действовать целенаправленно с учетом последствий принимаемых решений.

Задача управления стохастическими активными системами рассматривалась в работах [1—5]. Исследования, проводимые в этой области, направлены на согласование интересов элементов системы, установление им напряженных планов, формирование управления в системе и т. д. Реализация установленного элементу (системе) планового задания в условиях неопределенности или риска может быть связана как с внутренними условиями функционирования элемента (системы), так и с состоянием «внешней» для него среды.

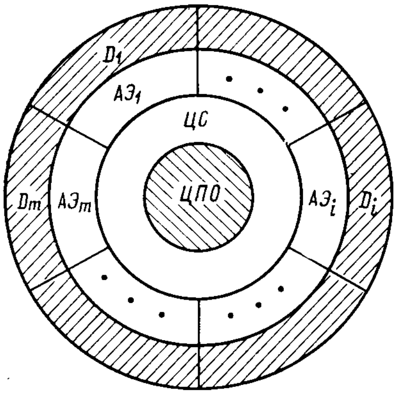
В настоящей работе исследуются вопросы управления простой открытой активной системой при адаптивном способе формирования данных. Простая активная система понимается в смысле [1]. Следует отметить, что состояние «внешней» среды оказывает непосредственное влияние на формирование управления, устанавливаемого центром системы подчиненным ему элементам.

2. Простая открытая активная система

В двухуровневой открытой активной системе АС (см. рисунок) центр системы (ЦС) управляет подчиненными ему m активными элементами (АЭ$_i$, $i \in I$, где $I=\{1, 2, \dots, m\}$). «Внешнюю» среду системы АС составляют: с одной стороны, объединение по i районов деятельности D_i элементов АЭ$_i$; с другой — орган планирования более высокого по сравнению с системой АС уровня (на рисунке обозначен как ЦПО — центральный орган планирования).

Функционирование системы рассматривается за ряд последовательных периодов $k=0, 1, \dots$. В k-м периоде в D_i имеется или образуется ресурс в объеме r_{ik}. Будем считать, что $r_{ik}=r_i=\text{const}$ $\forall k$. Ресурс R в системе АС равен сумме r_i по $i \in I$. Величины r_i и R известны ЦПО, ЦС и элементам АЭ с точностью до некоторых, формируемых ими оценок, которые будем называть субъективными оценками. Спрос C_k на ресурс R формируется в ЦПО и устанавливается системе АС. Задача ЦС заключается в установлении нижней границы на реализацию подчиненным ему элементом $АЭ_i$ планового задания, позволяющей согласовать надежность выполнения плана элементом $АЭ_i$ с надежностью удовлетворения спроса C_k системой АС.

В дальнейшем, для скалярных величин, характеризующих состояние i-го активного элемента и системы в целом, в k-м периоде функционирования будут приняты следующие обозначения: V_i и V — субъективные оценки величин r_i и R, формируемые ЦПО и устанавливаемые им системе (V равна сумме V_i по $i \in I$; $0 \leqslant V_i \leqslant r_i$, $0 \leqslant V \leqslant R$); s_{ik} и S_k — субъективные оценки величин r_i и R, формируемые центром ЦС на этапе подготовки данных (S_k равна сумме s_{ik} по $i \in I$; $0 \leqslant s_{ik} \leqslant V_i$, $0 \leqslant S_k \leqslant V$); C_k характеризует состояние ЦПО; $0 \leqslant C_k \leqslant V$; x_{ik} и X_k — плановые величины состояния системы АС и элемента $АЭ_i$ (x_{ik} формируется центром ЦС и устанавливается им элементу $АЭ_i$; X_k формируется центром, $0 \leqslant X_k \leqslant C_k$, $0 \leqslant x_{ik} \leqslant V_i$).



Случайная величина y_{ik} — реализация элементом $АЭ_i$ плана x_{ik} формируется элементом $АЭ_i$ на этапе реализации, исходя из известной ему оценки s_{ik} и функции распределения $F_i(y_i)$. Функция распределения $F(Y)$ является сверткой по $i \in I$ функций $F_i(y_i)$. $F(Y)$ — закон распределения случайной величины Y_k — реализации системой АС плана X_k. Функции $F_i(y_i)$ и $F(Y)$ являются непрерывными и строго возрастающими функциями соответственно y_i на $[0, V_i]$, а Y на $[0, V]$.

Закон стимулирования ЦС представляется в виде кусочно-линейной функции следующего вида:

$$\Phi(X_k, Y_k) = \begin{cases} Y_k - \gamma(X_k - Y_k) & \text{при} \quad X_k \geqslant Y_k, \\ Y_k - \beta(Y_k - X_k) & \text{при} \quad X_k < Y_k, \end{cases} \tag{1}$$

где γ и β — постоянные коэффициенты $\gamma > 0$, $0 < \beta \leqslant 1$.

Закон стимулирования элемента $АЭ_i$ имеет вид

$$\varphi_i(x_{ik}, y_{ik}, s_{ik}) = \begin{cases} y_{ik} - (\alpha + s_{ik}/x_{ik})(x_{ik} - y_{ik}) & \text{при} \quad x_{ik} \geqslant y_{ik}, \\ y_{ik} - \beta(y_{ik} - x_{ik}) & \text{при} \quad x_{ik} < y_{ik}, \end{cases} \tag{2}$$

где $0 < \alpha \leqslant \gamma$.

Функционирование системы будет рассматриваться с учетом ряда предположений.

1. Величины C_k и R, характеризующие объективное состояние «внешней» среды системы, т. е. состояние ЦПО и района деятельности D, — неуправляемые (со стороны системы АС) величины.

2. Состояние ЦПО в каждом периоде функционирования k можно описать некоторой линейной функцией $C_k = C_0 + ak$, где C_0 — состояние ЦПО в период $k=0$ и $a>0$. Функция C_k известна центру ЦС и элементам АЭ.

3. Элемент $АЭ_i$ ведет себя рационально, т. е. не «вредит» системе, и в каждом периоде k функционирования системы на этапе реализации плана $y_{ik} \geqslant s_{ik}$, причем оценка s_{ik}, устанавливаемая центром на этапе формирования данных, известна элементу $АЭ_i$ на том же этапе, тогда как величина y_{ik}, формируемая элементом $АЭ_i$ на этапе реализации, становится известной ЦС на этапе оценки результатов функционирования системы.

4. ЦС и элемент $АЭ_i$ по-разному информированы о величине r_i в D_i, причем $АЭ_i$ имеет более достоверную информацию, что позволяет элементу $АЭ_i$ проявлять активность и, если это ему выгодно, в каждом периоде k

ограничивать реализацию установленного ему планового задания величиной ω_{ik}. В соответствии с предположением 3 центр может в свою очередь устанавливать сам границу на реализацию y_{ik}. Этой границей является формируемая им оценка s_{ik}. По аналогии с [1] формально установление центром и элементом АЭ$_i$ границ s_{ik} и ω_{ik} можно выразить параметрическим семейством распределений:

а) при $0 \leqslant s_{ik} \leqslant \omega_{ik} \leqslant V_i$

$$F_i(s_{ik}, \omega_{ik}, y_i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant y_i \leqslant s_{ik}, \\ F_i(y_i), & \text{если} \quad s_{ik} < y_i \leqslant \omega_{ik}, \\ 1, & \text{если} \quad y_i > \omega_{ik}; \end{cases} \tag{3}$$

б) при $0 \leqslant \omega_{ik} \leqslant s_{ik} \leqslant V_i$

$$F_i(s_{ik}, \omega_{ik}, y_i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant \omega_{ik} \leqslant y_i \leqslant s_{ik}, \\ 1, & \text{если} \quad y_i > s_{ik}. \end{cases} \tag{4}$$

5. Центр ЦС сам, в свою очередь, является активным элементом некоторой системы более высокого уровня, поэтому естественно считать, что он, как и подведомственные ему элементы, имеет возможность ограничивать в периоде k реализацию плана X_k величиной ω_k:

$$F(\omega_k, Y) = \begin{cases} F(Y) & \text{при} \quad Y \leqslant \omega_k, \\ 1 & \text{при} \quad Y > \omega_k. \end{cases} \tag{5}$$

6. Планы X_k и x_{ik} формируются центром по следующему закону:

$$u_{k+1} = \begin{cases} (1+a)u_k & \text{при} \quad u_k \geqslant z_k, \\ u_k + az_k & \text{при} \quad u_k < z_k, \end{cases} \tag{6}$$

где для ЦС $u=X$ и $z=Y$, а для АЭ$_i$ $u=x_i$ и $z=y_i$.

7. Элемент АЭ$_i$ «смотрит» на N_i периодов вперед, т. е., устанавливая в k-м периоде границу ω_{ik} на реализацию плана x_{ik}, АЭ$_i$ учитывает влияние этой границы на будущие планы и реализации. Кроме того, элементу АЭ$_i$ известен закон, по которому ЦС формирует оценки s_{ik}.

В этих условиях критерий эффективности АЭ$_i$ выражается формулой

$$\eta_i(x_i, s_i, \omega_i) = \varphi_i(x_{ik}, s_{ik}, \omega_{ik}) + \sum_{q=k+1}^{k+N_i} \int_0^{V_i} \varphi_i(x_{iq}, s_{iq}, y_i)\, dF_i(s_{iq}, \omega_{iq}, y_i). \tag{7}$$

Аналогично критерий эффективности ЦС при условии, что ЦС «смотрит» на N периодов вперед, выразится так:

$$\eta(X, \omega) = \Phi(X_k, \omega_k) + \sum_{q=k+1}^{k+N} \int_0^{Y} \Phi(X_q, Y)\, dF(\omega_q, Y). \tag{8}$$

Математическое ожидание функции $\Phi(X, Y)$ при заданной границе ω согласно [1] можно выписать в случаях:

а) при $X \leqslant \omega \leqslant V$

$$\bar{\eta}(X, \omega) = (1-\beta)\left[\omega - \int_0^{\omega} F(Y)\, dY\right] - (\gamma+\beta)\int_0^{X} F(Y)\, dY + \beta X; \tag{9}$$

б) при $\omega \leqslant X \leqslant V$

$$\bar{\eta}(X, \omega) = (1+\gamma)\left[\omega - \int_0^{\omega} F(Y)\, dY\right] - \gamma X; \tag{10}$$

в) при $X = \omega \leqslant V$

$$\bar{\eta}(X, X) = X - (1+\gamma)\int_0^{X} F(Y)\, dY. \tag{11}$$

Математическое ожидание функции $\varphi_i(x_i, y_i, s_i)$ при заданных границах ω_i и s_i определяется из формул:

а) при $0 \leqslant s_i \leqslant x_i \leqslant \omega_i \leqslant V_i$

$$(12) \qquad \tilde{\eta}_i(x_i, \omega_i, s_i) = (1-\beta)\left[\omega_i - \int_{s_i}^{\omega_i} F_i(y_i)\,dy_i\right] + \beta x_i - $$
$$- (\alpha+\beta+s_i/x_i)\int_{s_i}^{x_i} F_i(y_i)\,dy_i;$$

б) при $0 \leqslant s_i \leqslant \omega_i \leqslant x_i \leqslant V_i$

$$(13) \qquad \tilde{\eta}_i(x_i, \omega_i, s_i) = (1+\alpha+s_i/x_i)\left[\omega_i - \int_{s_i}^{\omega_i} F_i(y_i)\,dy_i\right] - \alpha x_i - s_i;$$

в) при $0 \leqslant x_i \leqslant s_i \leqslant \omega_i \leqslant V_i$

$$(14) \qquad \tilde{\eta}_i(x_i, \omega_i, s_i) = (1-\beta)\left[\omega_i - \int_{s_i}^{\omega_i} F_i(y_i)\,dy_i\right] + \beta x_i;$$

г) при $0 \leqslant \omega_i \leqslant s_i \leqslant x_i \leqslant V_i$

$$(15) \qquad \tilde{\eta}_i(x_i, \omega_i, s_i) = s_i - (\alpha + s_i/x_i)(x_i - s_i);$$

д) при $0 \leqslant x_i \leqslant \omega_i \leqslant s_i \leqslant V_i$ или $0 \leqslant \omega_i \leqslant x_i \leqslant s_i \leqslant V_i$

$$(16) \qquad \tilde{\eta}_i(x_i, \omega_i, s_i) = s_i - \beta(s_i - x_i).$$

3. Задача управления

Функционирование ЦС в периоде k с учетом предположения 5 предыдущего раздела рассматривалось в [1, 2]. Центру ЦС требуется определить решающее правило $\omega_0(X_0)$, обеспечивающее максимальное значение критерия эффективности (8). Учитывая, что закон планирования, установленный ЦС, имеет вид (6) при $u=X$, $z=Y$, последовательность планов $\{X_k^*\}_{k=0}^{N}$, исходя из (5), (8) и (9), определяем по формулам:

$$(17) \qquad F(X_N^*) = \frac{1-\beta(1-a)}{a(\gamma+\beta)},$$

$$(18) \qquad (\gamma+\beta)F(X) - \frac{1-\beta}{a} F\left(\frac{X^{*\prime}-X}{a}\right) = \beta,$$

где X — величина плана в период k, а $X^{*\prime}$ — в $(k+1)$-м периоде;

$$(19) \qquad F(X^*) = \frac{a\beta}{a(\gamma+\beta)-1+\beta},$$

где $X^* = X^{*\prime} = (1+a)X$. При этом, если $X^{*\prime} \geqslant X^*$, то $X^{*\prime} \geqslant X$. Решающие правила $\omega_0^* = (X_1^* - X_0)/a$, если $X_1^* \geqslant X_0$, и $\omega_0 = X_0$, если $X_1^* < X_0$, дают приближенное решение задачи.

Такая стратегия ЦС в процессе определения решающего правила $\omega_0(X_0)$ не случайна, так как центру не известны функции распределения $F_i(y_i)$ и степени дальновидности N_i элементов АЭ$_i$. Центр знает лишь свертку $F(Y)$ по $i \in I$ этих функций, так как Y_k есть сумма y_{ik} по $i \in I$. Однако очевидно, что даже при совпадении степеней дальновидности элементов АЭ и центра, т. е. при $N = N_i$, $\forall i : i \in I$, решающее правило $\omega_0(X_0)$ может обеспечить приближенно максимум критерия (8) лишь в том случае, когда цели ЦС и элемента АЭ$_i$ согласованы. Действительно, так как в законах стимулирования (1) и (2) штраф за невыполнение планового задания рассчитывается по-разному, то при установленном центром законе формирования оценки ресурса $s_{ik} = f_i(x_i, y_i, s_{ik-1})$ сумма реализаций y_{ik} по $i \in I$ в k-м периоде функционирования системы может существенно отличаться от величины Y_k в силу того, что решающее правило $\omega_{i0}(x_{i0})$

будет устанавливаться элементом АЭ$_i$, исходя из его собственных интересов.

Таким образом, задачей ЦС является такое согласование своих интересов с интересами элементов АЭ$_i$, чтобы последовательность границ $\{\omega_{ik}\}_{k=0}^{N}$, устанавливаемых АЭ$_i$ на собственную реализацию y_i, была согласована с последовательностью $\{\omega_k\}_{k=0}^{N}$.

Если ЦС не ограничен в выборе закона формирования оценки s_i, то наиболее простым решением данной задачи является:

(20) $\quad s_{ik}(\gamma-\alpha)x_{ik}^*.$

Выбор центром оценки s_{ik} означает для него снятие неопределенности состояния «внешней» среды в D_i в интервале $[0, s_{ik}]$ и, в соответствии с предположением 3 раздела 2 и формулами (3) и (4), установление нижней границы на реализацию y_i. В этих условиях, учитывая, что элементу АЭ$_i$ известен закон планирования (6), установленный центром ($u=x_i$, $z=y_i$), а также закон формирования оценки s_i (20), решающее правило $\omega_{i0}(x_{i0})$, максимизирующее критерий (7), определяется элементом АЭ$_i$, исходя из того, как выбраны коэффициенты γ и α в законах стимулирования (1) и (2).

В случае $0\leqslant\gamma-\alpha<1$ граница $s_{ik}<x_{ik}$, и по аналогии с [1] $\forall i: i\in I$ последовательность границ $\{\omega_{ik}\}_{k=0}^{N}$ устанавливается элементом АЭ$_i$ по следующему принципу.

В последнем периоде N, учитываемом элементом АЭ$_i$, граница $\omega_{iN}=V_i$, так как $\beta\leqslant1$. Граница $\omega_{i(N-1)}$ определяется, исходя из максимума выражения $\omega_{i(N-1)}=(x_{iN}^*-x_{i(N-1)})/a$, где x_{iN}^* является решением уравнения

$$(21)\qquad (\beta+\gamma)F_i(x_{iN}^*)-(\gamma-\alpha)(1+\beta+\gamma)F_i[(\gamma-\alpha)x_{iN}^*]=\frac{1-\beta(1-a)}{a}.$$

Если β и a имеют такие значения, что левая часть выражения (21) меньше единицы, то $\omega_{i(N-1)}>V_i$.

Согласование интересов ЦС и АЭ$_i$ в периоде N обеспечивает граница $s_{iN}=(\gamma-\alpha)x_{iN}^*$. Полагая, что $y_{ik}=\omega_{ik}$ для всех $k=0, 1,\ldots,(N-1)$, границу $\omega_{i(N-k)}=(x_{i(N-k-1)}-x_{i(N-k)})/a$ элемент АЭ$_i$ определяет из условия максимума выражения

$$(1-\beta)\omega_{i(N-k)}+\beta x_{i(N-k)}+(1-\beta)\left[\omega_{i(N-k-1)}-\int\limits_{s_{i(N-k-1)}}^{\omega_{i(N-k-1)}}F_i(y_i)\,dy_i\right]+$$
$$+\beta x_{i(N-k-1)}-\left(\alpha+\beta+\frac{s_{i(N-k-1)}}{x_{i(N-k-1)}}\right)\int\limits_{s_{i(N-k-1)}}^{x_{i(N-k-1)}}F_i(y_i)\,dy_i+$$
$$+(1-\beta)\left[\omega_{i(N-k-2)}-\int\limits_{s_{i(N-k-2)}}^{\omega_{i(N-k-2)}}F_i(y_i)\,dy_i\right]+\beta x_{i(N-k-2)}-$$
$$-\left(\alpha+\beta+\frac{s_{i(N-k-2)}}{x_{i(N-k-2)}}\right)\int\limits_{s_{i(N-k-2)}}^{x_{i(N-k-2)}}F_i(y_i)\,dy_i+\ldots+(1-\beta)\mu_i+$$
$$+(1-\beta)\int\limits_{0}^{s_{iN}}F_i(y_i)\,dy_i+\beta x_{iN}-\left(\alpha+\beta+\frac{s_{iN}}{x_{iN}}\right)\int\limits_{s_{iN}}^{x_{iN}}F_i(y_i)\,dy_i,$$

где μ_i — математическое ожидание величины y_i, а последовательность планов $\{x_{iq}^*\}$, границ $\{s_{iq}\}$ и $\{\omega_{i(q-1)}\}$ уже определена; $(q=(N-k-1),\ldots,N)$. $x_{i(N-k)}$ является решением уравнения

$$(22)\qquad (\beta+\gamma)F_i(x_{i(N-k)})-(\gamma-\alpha)(1+\gamma)F_i[(\gamma-\alpha)x_{i(N-k)}^*]-$$
$$-\frac{(1-\beta)}{a}F_i\left(\frac{x_{i(N-k-1)}-x_{i(N-k)}}{a}\right)=\beta.$$

Если для некоторого периода $q<N$ $x^*_{i(N-q-1)}=(1+a)x_{i(N-q)}$, то $x^*_{i(N-q)}$ определяется из выражения

$$(23)\qquad \left(\frac{\beta(1+a)-1}{a}+\gamma\right)F_i(x^*_{i(N-k)})-(\gamma-\alpha)(1+\gamma)F_i[(\gamma-\alpha)x^*_{i(N-k)}]=\beta.$$

Анализ (21)–(23) показывает, что $x^*_{i(N-q)}\leqslant x_{iN}^*$, так как $0\leqslant(\gamma-\alpha)<1$, $((1-\beta)/a)>0$, а $F_i(y_i)$ – строго возрастающая функция от y_i на $[0, V_i]$. Кроме того, очевидно, что если $(k+1)>q$ и

$x^*_{i(N-k-1)}\geqslant x^*_{i(N-q)}$, то $x^*_{i(N-k)}\leqslant x^*_{i(N-k-1)}$ [1].

В этих условиях решающим правилом задачи при $x_i^*\geqslant x_{i0}$ будет $\omega_{i0}=(x_{i1}{}^*-x_{i0})/a$, а при $x_{i1}{}^*<x_{i0}$ будет $\omega_{i0}=x_{i0}$.

Интересы ЦС и элемента АЭ$_i$ при законе формирования границы s_{ik} (20) будут согласованы, так как надежность g_{ik} плана x_{ik} будет равна надежности g_k плана X_k $\forall k$. Величины g_{ik} и g_k понимаются в смысле [2].

При этом можно показать, что оценка S_k является минимальной оценкой, обеспечивающей согласование границ ω_{ik} и ω_k $\forall k$.

Действительно, так как S является суммой s_i по $i\in I$, а функция распределения $F(Y)$ является сверткой по $i\in I$ функций $F_i(y_i)$, то для периода k:

$$(\beta+\gamma)F(X_k^*)-(\gamma-\alpha)(1+\gamma)F[(\gamma-\alpha)X_k^*]-[(1-\beta)/a]F[(X^*_{k+1}-X_k^*)/a]=\beta.$$

Из (18) следует, что $(\beta+\gamma)F(X_k^*)-[(1-\beta/a]F[(X^*_{k+1}-X_k^*)/a]=\beta$, и, учитывая, что $F[(\gamma-\alpha)X_k^*]=F(S_k)$, а также $0<\alpha<\gamma$, имеем $F(S_k)=0$. Следовательно, оценка S_k является минимальной оценкой, обеспечивающей согласование границ ω_{ik} и ω_k, при условии, что план X_k формируется по закону (6), а граница s_{ik} – по закону (18).

В случае $\gamma-\alpha\geqslant1$ исследование и решение задачи управления простой открытой активной системой аналитически довольно сложно, и поэтому здесь целесообразно применить методы имитационного моделирования.

4. Заключение

В предложенной работе приводятся постановка и решение задачи управления открытой стохастической активной системой путем установления центром ЦС нижней границы s_i на реализацию элементом АЭ$_i$ планового задания. Установление границы s_i позволяет согласовать интересы ЦС и элемента АЭ$_i$, при этом надежность g_i выполнения плана элементом АЭ$_i$ равна надежности g выполнения плана системой АС. Доказано, что оценка S является минимальной оценкой, обеспечивающей равенство $g=g_i$ $\forall i\in I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
2. *Горгидзе И. А., Ивановский А. Г., Немцева А. Н.* Простой активный элемент.– В кн.: Активные системы. Вып. 1. М.: Ин-т проблем управления, 1973, с. 47–57.
3. *Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Бексеитов Ж. И.* Управление стохастическими активными системами.– В кн.: Согласованное управление. М.: Ин-т проблем управления, 1975, с. 57–67.
4. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В., Марин Л. Ф.* Предпосылки совершенствования организационного управления материально-техническим обеспечением.– Обмен опытом в радиопромышленности, 1981, № 7, с. 1–5.
5. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В., Константинова В. В., Юновцев В. П.* Методы и описания показателей оценки результатов деятельности и систем стимулирования на предприятиях.– Обмен опытом в радиопромышленности, 1981, № 10, с. 1–5.

Поступила в редакцию
10.XI.1984

CONTROL OF OPEN ACTIVE STOCHASTIC SYSTEMS

STEPANOV Yu. A.

The state of a simple two-level control system is directly dependent on that of the environment. The structure of a simple active open-loop system is described. The control problem in the case of adaptive data generation is formulated and some results in solving the problem are given.