УДК 519.61:65.01

ЗАДАЧА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТРИЧНЫХ СВЕРТОК ОБОБЩЕННЫМИ АДДИТИВНЫМИ СВЕРТКАМИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ОЦЕНОК

УМРИХИНА Е. В.

(Москва)

Рассматривается задача представления матричной (логической) свертки локальных оценок в виде обобщенной аддитивной свертки в задачах комплексного оценивания. Сформулированы необходимые и достаточные условия точного представления. Предлагаются два подхода к решению задачи точного представления и схема приближенного решения.

1. Введение

В задачах комплексного оценивания выбор процедуры агрегирования (свертки) оценок по локальным показателям в комплексную оценку представляет собой важную, самостоятельную проблему наряду с проблемами выбора системы показателей оценки и разработкой правил использования комплексной оценки в практике управления.

Выбор варианта свертки определяется структурой системы показателей, характером взаимосвязей локальных и комплексной оценок, шкалами, на которых задаются оценки, и т. п.

Вопрос о целесообразности использования того или иного вида свертки в конкретных задачах комплексного оценивания, о возможности и условиях их взаимозаменяемости исследуется в теории активных систем, в частности рассматривается задача представления матричных (логических) сверток аддитивными свертками. Аддитивные свертки более просты, широко распространены на практике, в то время как матричные свертки наглядны, легко корректируются, более точно отражают политику органа (лица), проводящего оценку, и являются универсальной формой представления сверток любого вида [1–3].

В работе [4] поставлена задача приближенного представления матричной свертки в виде аддитивной свертки с минимальной ошибкой приближения, которая решена для ряда конкретных матричных сверток. В [4] также оценена максимальная ошибка приближения монотонной матричной свертки аддитивной и показано, что эта ошибка весьма существенна.

В [4] предложена достаточно простого вида свертка, дающая меньшую ошибку приближения, чем аддитивная: обобщенная аддитивная свертка (ОАС), т. е. аддитивная свертка, к которой применено нелинейное преобразование шкалы. В работе [5] показано, что для некоторых матричных сверток существует точное представление в виде ОАС, в то время как их приближение аддитивной сверткой дает значительную ошибку приближения.

В [4, 5] сформулированы задачи, связанные с исследованием ОАС:

1) возможность точного представления произвольной матричной свертки в виде ОАС и методы построения такой ОАС;

2) приближенное представление произвольной матричной свертки в виде ОАС с минимальной ошибкой приближения;

3) оценка максимальной ошибки приближения произвольной матричной свертки в виде ОАС.

В статье рассматриваются две первые задачи.

2. Постановка задачи

Пусть $C=\|c_{ij}\|$ – произвольная положительная монотонная матрица логической свертки, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Каждый элемент c_{ij} этой матрицы представляет собой оценку по обобщающему показателю, если оценка по одному локальному показателю равна k_i^1, а по второму – k_j^2, $i=\overline{1,\ n}$, $j=\overline{1,m}$.

Монотонность матрицы означает, что $c_{ij}\geqslant c_{ij-1}$ для $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{2,m}$ и $c_{ij}\geqslant c_{i-1j}$ для $i=\overline{2,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Монотонность матрицы вытекает из содержательного смысла задачи комплексного оценивания. Как правило, показатели оценки выбираются таким образом, что чем больше значение показателя, тем выше (не ниже) оценка, а также чем выше оценка по локальным показателям, тем выше (не ниже) комплексная оценка.

Кроме того, примем, что в матрице C отсутствуют одинаковые строки и одинаковые столбцы, т. е. для $\forall_i\ \exists_j: c_{ij}>c_{i-1j}$, $i=\overline{2,\ n}$, $j=\overline{1,\ m}$, для $\forall_j$ $\exists_i: c_{ij}>c_{ij-1}$, $i=\overline{1,\ n}$, $j=\overline{2,\ m}$. Это свойство матрицы также вполне естественно, поскольку если одинаковые строки (столбцы) существуют, то можно объединить соответствующие им значения оценок локального показателя, сократив число градаций шкалы и перейдя от исходной матрицы к матрице меньшей размерности.

В случае обобщенной аддитивной свертки комплексная оценка по двум локальным показателям равна $\varphi(u_i+v_j)$, где u_i — значение, присвоенное i-й оценке по первому показателю, v_j — j-й оценке по второму показателю, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, u_i, v_j — действительные числа, а φ — некоторое нелинейное преобразование шкалы.

Задача представления матричной свертки в виде ОАС состоит в определении чисел u_i, $i=\overline{1, n}$, v_j, $j=\overline{1, m}$ и неубывающей функции $\varphi(w)$, $w=u_i+v_j$, таких, что

(1) $$\varepsilon=\max_{i,j}|c_{ij}-\varphi(u_i+v_j)|\to\min$$

либо

(2) $$\delta=\max_{i,j}\left|1-\frac{\varphi(u_i+v_j)}{c_{ij}}\right|\to\min.$$

Данная постановка объединяет две первые задачи, сформулированные в [4, 5]. Действительно, если ε или δ равны 0, то получаем точное приближение матричной свертки обобщенной аддитивной сверткой, если же ε, $\delta>0$, то получаем приближение с минимальной ошибкой.

Обозначим L — множество пар индексов элементов матрицы C, таких, что $[(i,j),(k,s)]\in L$, тогда и только тогда, когда

(3) $$c_{ij}>c_{ks}.$$

Рассмотрим систему линейных неравенств:

(4) $$u_i+v_j>u_k+v_s \quad \forall[(i,j),(k,s)]\in L.$$

Теорема 1. Для точного представления положительной монотонной матрицы $C=\|C_{ij}\|$, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$ в виде неубывающей функции $\varphi(u_i+v_j)$, u_i, v_j — действительные числа, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, необходимо и достаточно, чтобы система (4) имела решение.

Доказательство дано в приложении.

Таким образом, согласно теореме 1, исходная задача может быть сведена к поиску решения системы линейных неравенств (4), и если решение $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ существует, то всегда можно построить неубывающую $\varphi(w)$, такую, что $\varphi(u_i^*+v_j^*)=c_{ij}$.

Для этого расположим элементы c_{ij} в порядке неубывания их значений и построим соответствующую последовательность значений $\{w_{ij}^*\}$, $w_{ij}^*=u_i^*+v_j^*$. Выделим подпоследовательности $\{w_{ij}^*\}_q$, такие, что каждая подпоследовательность $\{w_{ij}^*\}_q$ соответствует одному и тому же значению $c_{ij}^q=c^q$, $q=\overline{1, Q}$, где Q — количество значений c_{ij}, $c^{q+1}>c^q$. Обозначим Ω_q — множество пар индексов (i,j), соответствующих c^q и $\{w_{ij}^*\}_q$. Построенные таким образом подпоследовательности не пересекаются в силу того, что если $c^{q+1}>c^q$, то $(w_{ij}^*)_{q+1}>(w_{ij}^*)_q$ для всех $(i,j)_q\in\Omega_q$, $(i,j)_{q+1}\in\Omega_{q+1}$, так как $w_{ij}^*=u_i^*+v_j^*$, а $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ — решение (4). Значит, $\min\limits_{(i,j)\in\Omega_q} w_{ij}^*>\max\limits_{(i,j)\in\Omega_q} w_{ij}^*$.

Поэтому функция $\varphi(u_i^*+v_j^*)$, заданная следующим образом:

$$\varphi(u_i^*+v_j^*)=c^q,\ \text{если}\ \min_{(i,j)\in\Omega_q} w_{ij}^*\leqslant w_{ij}^*\leqslant\max_{(i,j)\in\Omega_q} w_{ij}^*,\quad q=\overline{1, Q},$$

является неубывающей и обеспечивает выполнение равенства $\varphi(u_i^*+v_j^*)=$ $=c_{ij}$.

Отметим ряд свойств решений задачи.

Свойство 1. Последовательности $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ являются строго возрастающими, т. е. $u_i>u_{i-1}$, $v_j>v_{j-1}$, $i=\overline{2, n}$, $j=\overline{2, m}$.

Свойство 2. Пусть $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ – решение системы (4). Тогда $\omega=$ $=(a\mathbf{u}^*+\mathbf{b}', a\mathbf{v}^*+\mathbf{b}'')$ – также решение системы (4) $(a>0,\ b_i'=b'_{i+1},\ i=$ $=\overline{1, n-1},\ b_j''=b''_{j+1},\ j=\overline{1, m-1};\ b_i',\ b_j''$ – действительные числа.

В силу этого свойства, если существует $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ – решение системы (4), то существует и такое решение $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, что $u_1=v_1=0$, u_i, $v_j>0$, $i=\overline{2, n}$, $j=\overline{2, m}$.

Свойство 3. Пусть $\mathbf{z}^1=(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)$ и $\mathbf{z}^2=(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2)$ – два решения системы (4). Тогда $\mathbf{z}^3=\alpha\mathbf{z}^1+\beta\mathbf{z}^2$ – также решение системы (4) $(\alpha, \beta>0)$.

Свойство 4. Пусть C – симметричная матрица, т. е. $m=n$ и $c_{ij}=c_{ji}$. Тогда, если существует решение системы (4), то существует и симметричное решение системы (4), т. е. $u_i^*=v_j^*$, $i=\overline{1, n}$.

Доказательства свойств 1 и 4 даны в приложении, справедливость свойств 2 и 3 проверяется подстановкой ω и $\mathbf{z}^3$ в (4).

Используя свойство 1, систему неравенств (4) можно несколько упростить. Введем дополнительные ограничения:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&u_i>u_{i-1}, \quad i=\overline{2, n},\\
&v_j>v_{j-1}, \quad j=\overline{2, m}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим множество $L'\subset L$ пар индексов $[(i, j), (k, s)]\in L$, таких, что $i>k$, $j<s$ либо $i<k$, $j>s$.

Система неравенств

$$
(6)\qquad u_i+v_j>u_k+v_s \quad \forall[(i, j), (k, s)]\in L'
$$

в совокупности с неравенствами (5) эквивалентна системе (4), и в то же время ее проще составлять при решении задач для конкретной матрицы.

3. Методы решения задачи точного представления

Самый простой путь – это сведение задачи (5), (6) к основной задаче линейного программирования. Для этого введем критерий оптимальности

$$
(7)\qquad u_n+v_m\to\min
$$

и запишем неравенства (5), (6) в виде нестрогих неравенств

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&u_i-u_{i-1}\geqslant\varepsilon, \quad i=\overline{2, n},\\
&v_j-v_{j-1}\geqslant\varepsilon, \quad j=\overline{2, m},\\
&(u_i+v_j)-(u_k+v_s)\geqslant\varepsilon \quad \forall[(i, j), (k, s)]\in L',\\
&u_i,\ v_j\geqslant0, \quad i=\overline{1, n}, \quad j=\overline{1, m}, \quad \varepsilon>0.
\end{aligned}
$$

В силу свойства 2 систему неравенств (8) можно заменить следующей системой:

$$
(9)\qquad u_i+v_j-(u_k+v_s)\geqslant1 \quad \forall[(i, j), (k, s)]\in L',
$$

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&u_i\geqslant u_{i-1}+1, \quad v_j\geqslant v_{j-1}, \quad i=\overline{2, n},\ j=\overline{2, m},\\
&u_i,\ v_j\geqslant0, \quad i=\overline{1, n}, \quad j=\overline{1, m}.
\end{aligned}
$$

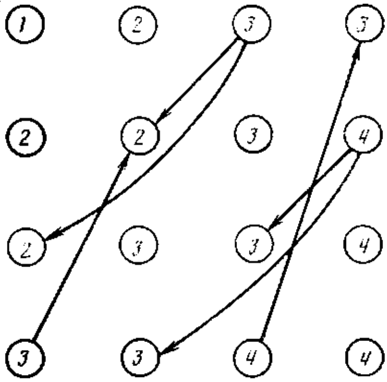

Рис. 1

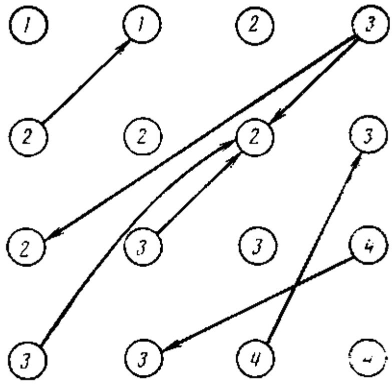

Рис. 2

Для наглядности матрицу C удобно представить в виде $(m \times n)$-вершинного графа $G(C)$, вершины которого соответствуют элементам матрицы, а дуги — неравенствам (9), причем направлены дуги от большего элемента к меньшему. При формировании системы ограничений (9)—(10) могут возникать избыточные неравенства. Исключение таких неравенств производится следующим образом: если из некоторой вершины графа $G(C)$ исходят несколько дуг к вершинам, соответствующим элементам одной и той же строки (одного и того же столбца), то оставляется дуга, направленная к вершине, соответствующей элементу с наибольшим номером столбца (строки), а остальные дуги исключаются. Если к одной и той же вершине проведены дуги из нескольких вершин, соответствующих элементам одной строки (столбца), то оставляется дуга, исходящая из вершины с наименьшим номером столбца (строки). Неравенства, соответствующие сохраненным дугам, в совокупности с ограничениями (10) составляют минимальную систему ограничений, в которой отсутствуют избыточные неравенства. Неравенства, соответствующие исключенным дугам, при такой системе ограничений будут выполняться автоматически.

Для примера рассмотрим матрицу

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Граф $G'(C)$, соответствующий минимальной системе неравенств (9), представлен на рис. 1. Система неравенств, соответствующая дугам графа $G'(C)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} &u_1+v_3-(u_2+v_2)\geqslant 1,\\ &u_4+v_1-(u_2+v_2)\geqslant 1,\\ &u_1+v_3-(u_3+v_1)\geqslant 1,\\ &u_4+v_3-(u_1+v_4)\geqslant 1,\\ &u_2+v_4-(u_4+v_2)\geqslant 1,\\ &u_2+v_4-(u_3+v_3)\geqslant 1. \end{aligned}$$

Решение (7), (9), (10) в этом случае: $u_1=0$, $u_2=1$, $u_3=2$, $u_4=3$, $v_1=0$, $v_2=1$, $v_3=3$, $v_4=5$.

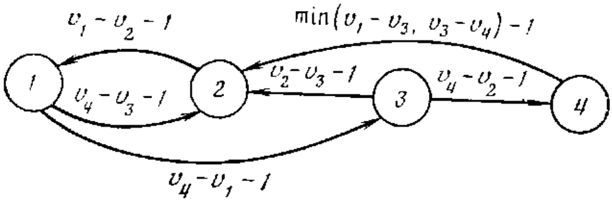

Рис. 3

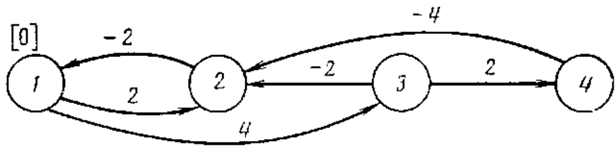

Рис. 4

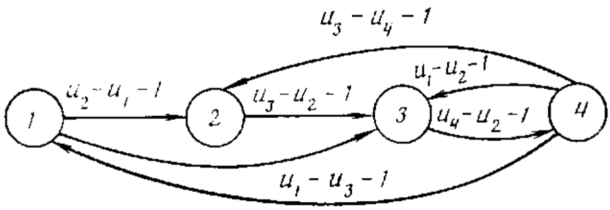

Рис. 5

Соответствующая функция $\varphi(w)$ имеет вид:

$$\varphi(u_i+v_j)=\begin{cases}1, & \text{если } u_i+v_j=0,\\ 2, & \text{если } 1\leqslant u_i+v_j\leqslant 2,\\ 3, & \text{если } 3\leqslant u_i+v_j\leqslant 5,\\ 4, & \text{если } 6\leqslant u_i+v_j\leqslant 8.\end{cases}$$

В общем случае для решения задачи (7), (9), (10) можно применять стандартные программы решения задач линейного программирования.

Рассмотрим еще один подход к решению задачи.

Зафиксируем значения $\{v_j\}$ и будем искать величины $\{u_i\}$. Из условий (9) получаем:

(11) $\qquad u_k-u_i\leqslant v_j-v_s-1 \quad \forall[(i,j),(k,s)]\in L'.$

Обозначим L_{ik} — множество пар (j,s), таких, что $[(i,j),(k,s)]\in L'$. Определим $l_{ik}=\min\limits_{(j,s)\in L_{ik}}(v_j-v_s-1)$. Определим n-вершинный граф $H(\mathbf{v})$ с длинами дуг l_{ik}, $k,i=\overline{1,n}$. Запишем (11) в виде:

(12) $\qquad u_k-u_i\leqslant l_{ik},\quad k,i=\overline{1,n}.$

Условия (12) являются типичными ограничениями задачи о потенциалах вершин графа [6]. Как известно, необходимым и достаточным условием разрешимости задачи о потенциалах является отсутствие в графе контуров отрицательной длины.

Пример. Пусть матрица C имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Граф $G'(C)$, соответствующий минимальной системе неравенств (9), приведен на рис. 2. Граф $H(\mathbf{v})$ приведен на рис. 3.

Длины l_{ik} указаны у соответствующих дуг. В графе $H(\mathbf{v})$ — три контура:

$$(1, 2, 1);\ (1, 3, 4, 2, 1);\quad (1, 3, 2, 1).$$

Выпишем условие неотрицательности контуров графа $H(\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} &v_1-v_2-v_3+v_4\geqslant 2,\\ &v_1-2v_2-v_3+2v_4\geqslant 4,\\ &\quad -2v_2+v_3+v_4\geqslant 4,\\ &\qquad -v_4+v_4\geqslant 3. \end{aligned}$$

Положив $v_1=0$ и учитывая (10), получаем решение:

$$v_1=0,\quad v_2=1,\quad v_3=2,\quad v_4=5.$$

Определяя теперь потенциалы вершин графа $H(\mathbf{v})$ с численными значениями длин дуг на рис. 4, получаем:

$$u_1=0,\quad u_2=2,\quad u_3=4,\quad u_4=6.$$

Таким образом, решение задачи в этом случае сводится к поиску решения системы линейных неравенств в переменных $\{v_j\}$.

Аналогично можно построить в некотором смысле двойственный $H(\mathbf{v})$ граф $H'(\mathbf{u})$ и решить систему неравенств в переменных $\{u_i\}$.

Так, граф $H'(\mathbf{u})$ для рассмотренного выше примера изображен на рис. 5. В этом графе 3 контура: (1, 2, 3, 4, 1), (2, 3, 4, 2), (3, 4, 3).

Соответствующая система неравенств для длин этих контуров имеет решение: $u_1=0$, $u_2=2$, $u_3=4$, $u_4=6$, потенциалы вершин — $v_1=0$, $v_2=1$, $v_3=2$, $v_4=5$.

Соответствующая функция $\varphi(w)$ имеет вид:

$$\varphi(u_i+v_i)=\begin{cases} 1, & \text{если } 0\leqslant u_i+v_j\leqslant 1,\\ 2, & \text{если } 2\leqslant u_i+v_j\leqslant 4,\\ 3, & \text{если } 5\leqslant u_i+v_j\leqslant 7,\\ 4, & \text{если } 8\leqslant u_i+v_j\leqslant 11. \end{cases}$$

4. Решение задачи оптимального приближения

Если для матрицы C система (5), (6) не имеет решения, то это означает, что данная матрица не может быть точно представлена в виде обобщенной аддитивной свертки. В этом случае решается задача приближенного представления с минимальной ошибкой приближения. Приводимая ниже теорема 2 позволяет решать эту задачу путем решения последовательности задач точного представления.

Обозначим L_r'' — множество пар индексов $[(i, j), (k, s)] \in L'$, таких, что $c_{ij} - c_{ks} > \Delta_r$ и в системе

(13) $\quad u_i > u_{i-1}, \quad v_j > v_{j-1}, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{2, m},$

(14) $\quad u_i + v_j > u_k + v_s \quad \forall [(i, j), (k, s)] \in L_r''$

отсутствуют избыточные неравенства.

Здесь $\Delta_r = \min\limits_{L''_{r-1}} \Delta_{ij}^{ks}$, $1 \leqslant r \leqslant R$, $\Delta_{ij}^{ks} = c_{ij} - c_{ks}$, $\Delta_0 = 0$, $\Delta_R \leqslant \max\limits_{L'} \Delta_{ij}^{ks}$.

Покажем, что $\{\Delta_r\}$ — возрастающая последовательность. Поскольку $\Delta_r = \min(c_{ij} - c_{ks})$, а для $\forall [(i, j), (k, s)] \in L''_{r-1}$ выполняется $c_{ij} - c_{ks} > \Delta_{r-1}$, то, следовательно, $\min\limits_{L''_{r-1}} (c_{ij} - c_{ks}) > \Delta_{r-1}$, т. е. $\Delta_r > \Delta_{r-1}$, $1 \leqslant r \leqslant R$.

Теорема 2. Пусть $C = \|c_{ij}\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ — матрица свертки, r^* — минимальное r, для которого существует решение $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ системы (13)—(14), $r^* \neq 0$. Тогда существует неубывающая функция $\varphi^*(w)$, такая, что $\varepsilon^* = \max\limits_{i,j} |c_{ij} - \varphi^*(u_i^* + v_j^*)| = \min\limits_{(u,v)\varphi} \max\limits_{i,j} |c_{ij} - \varphi(u_i + v_j)| = \Delta_{r^*}/2$.

Доказательство теоремы 2 дано в приложении.

В соответствии с теоремой 2 решение задачи приближенного представления матричной свертки в виде ОАС с минимальной абсолютной ошибкой приближения сводится к последовательному решению задач (13)—(14) для $0 \leqslant r \leqslant r^*$ до тех пор, пока при некотором r^* $(0 < r^* \leqslant R)$ не будет получено решение $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$. Задав $\varphi^*(w)$ таким образом, как указано при доказательстве теоремы 2, получаем приближение с минимальной абсолютной ошибкой $\varepsilon^* = \Delta_{r^*}/2$.

Алгоритм сходится за конечное число шагов, поскольку в худшем случае $(r^* = R, \Delta_R = \max\limits_{L'} \Delta_{ij}^{ks})$ множество $L_R'' = \emptyset$ и задача (13)—(14) сводится к задаче (13), которая всегда имеет решение.

Для примера рассмотрим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Система неравенств (5)—(6), отражающая условия точного представления этой матрицы в виде ОАС, имеет вид:

$u_3 > u_2 > u_1, \quad v_3 > v_2 > v_1,$

(15) $\quad u_2 + v_1 > u_1 + v_2,$

(16) $\quad u_2 + v_2 > u_3 + v_1,$

(17) $\quad u_3 + v_2 > u_2 + v_3,$

(18) $\quad u_1 + v_3 > u_2 + v_2.$

Складывая попарно (15) и (16), (17) и (18) и считая $u_1 = v_1 = 0$, получаем противоречие:

$$2u_2 > u_3, \quad 2u_2 < u_3,$$

т. е. точное представление C в виде ОАС невозможно, поэтому ищем оптимальное приближение с минимальной абсолютной ошибкой.

Поскольку $\Delta_1 = \min\limits_{L''_0} (c_{ij} - c_{ks}) = 1$, то L_1'' — множество пар $[(i, j), (k, s)]$, таких, что $c_{ij} - c_{ks} \to \Delta_1 = 1$ и в системе (13)—(14) отсутствуют избыточные

$w_{ij}=w_t$	0	1	2	3	3	4	5	5	7
(i, j)	(1; 1)	(2; 1)	(1; 2)	(2; 2)	(3; 1)	(1; 3)	(2; 3)	(3; 2)	(3; 3)
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c_t	1	3	2	5	4	6	7	8	9
$\varphi(w_t)$	1	2,5	2,5	4,5	4,5	6	7,5	7,5	9

неравенства. Система (13)—(14) для данной задачи при $r=1$, $\Delta_r=1$ имеет вид:

$$u_3>u_2>u_1, \quad v_3>v_2>v_1,$$
$$u_3+v_1>u_1+v_2,$$
$$u_1+v_3>u_3+v_2,$$
$$u_3+v_2>u_1+u_3.$$

Эта система имеет решение $u_1=0$, $u_2=1$, $u_3=3$, $v_1=0$, $v_2=2$, $v_3=4$. Решение получено уже на шаге 1, т. е. $r^*=1$, $\varepsilon^*=\Delta_{r^*}/2=\Delta_1/2=0{,}5$. Соответствующая функция $\varphi^*(w)$ строится следующим образом (таблица).

Исходная матрица C действительно представима в виде ОАС с ошибкой $\varepsilon^*=0{,}5$.

В заключение отметим, что представленные в статье результаты позволяют осуществлять выбор такой обобщенной аддитивной свертки, которая обеспечивает наиболее точное представление заданной матричной свертки в конкретных задачах комплексного оценивания.

Дальнейшие теоретические исследования ОАС предполагают оценку максимальной ошибки приближения произвольной матричной свертки в виде ОАС, исследование условий существования целочисленного решения задачи, развитие полученных результатов на случай n локальных показателей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть $\exists u_i^*$, v_j^*, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, $\varphi^*(w)$, такие, что $C_{ij}=\varphi^*(u_i^*+v_j^*)$ для $\forall$ i, j и пусть $[(i, j), (k, s)]\in L$. Тогда если $c_{ij}>c_{ks}$, то $\varphi^*(u_i^*+v_j^*)>\varphi^*(u_k^*+v_s^*)$ и в силу монотонности функции $\varphi^*(w)$ $u_i^*+v_j^*>$ $>u_k^*+v_s^*$.

Достаточность. Пусть система (4) имеет решение $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$. Определим функцию $\varphi^*(w)$ в точке $w=u_i^*+v_j^*$ следующим образом: $\varphi^*(u_i^*+v_j^*)=c_{ij}$. $\varphi^*(w)$ является неубывающей в силу того, что $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ – решение системы (4). Теорема доказана.

Доказательство свойства 1. Так как матрица C не имеет одинаковых строк, то для $\forall i$ $\exists j$: $c_{ij}>c_{i-1j}$, $i=\overline{2, n}$, $j=\overline{1, m}$, а значит $u_i+v_j>u_{i-1}+v_j$, т. е. $u_i>u_{i-1}$. Аналогично доказывается для столбцов.

Доказательство свойства 4. Пусть $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)$ – решение системы (4). Тогда $\mathbf{u}^2=\mathbf{v}^1$ и $\mathbf{v}^2=\mathbf{u}^1$ – также решение в силу симметричности матрицы C. Но тогда в силу свойства 3

$$\mathbf{u}^*=\frac{\mathbf{u}^1+\mathbf{u}^2}{2}=\frac{\mathbf{u}^1+\mathbf{v}^1}{2}; \qquad \mathbf{v}^*=\frac{\mathbf{v}^1+\mathbf{v}^2}{2}=\frac{\mathbf{v}^1+\mathbf{u}^1}{2}=\mathbf{u}^*$$

также решение.

Доказательство теоремы 2. Пусть $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ — решение (13) — (14), полученное при некотором r^*. Рассмотрим матрицу $W^*=\|w_{ij}^*\|$, $w_{ij}^*=u_i^*+v_j^*$. Расположим элементы w_{ij}^* в порядке неубывания и присвоим им порядковые номера. Получим последовательность $\{w_t^*\}=(w_1^*, \ldots, w_t^*, \ldots, w_T^*)$, где $w_1^*=\min\limits_{i,j} w_{ij}^*$, $w_T^*=\max\limits_{i,j} w_{ij}^*$,

$T = m \times n$, $w_t^* \geqslant w_{t-1}^*$, $t = \overline{2, T}$. Построим соответствующую последовательность значений $\{c_{(ij)_t}\} = \{c_t\}$.

Поскольку $r^* \neq 0$, т. е. условие точного представления для матрицы C не выполняется, то найдутся пары (t', t''), $t'' > t'$, такие, что $c_{t'} > c_{t''}$, но $w_{t'}^* \leqslant w_{t''}^*$ либо $c_{t''} > c_{t'}$, но $w_{t''}^* = w_{t'}^*$. Рассмотрим один из таких отрезков $[t', t'']$.

Возможно, отрезок $[t', t'']$ таков, что $t'' = t' + 1$, т. е. t' и t'' - две соседние точки. Но возможно, что существуют $t \in [t', t'']$, $t \neq t'$, $t \neq t''$. Обозначим τ — множество пар $(t^1, t^2) \in [t', t'']$, таких, что $c_{t^1} > c_{t^2}$, но $w_{t^1}^* \leqslant w_{t^2}^*$ либо $c_{t^2} > c_{t^1}$, но $w_{t^2}^* = w_{t^1}^*$. Пусть $\Delta_{r^0} = \max\limits_{\tau} | c_{t^2} - c_{t^1} | = | c_{t_0^2} - c_{t_0^1} |$. Поскольку r^* — минимальное r, при котором существует решение (13)—(14), а последовательность $\{\Delta_r\}$ — возрастающая, то $0 < \Delta_{r^0} \leqslant \Delta_{r^*}$.

Для всех w_t^*, $t \in [t', t'']$ зададим $\varphi^*(w_t^*) = \min(c_{t_0^2}, c_{t_0^1}) + \frac{\Delta_{r^0}}{2}$. В этом случае

$$\varepsilon^*[t'', t'] = \max_{t \in [t'', t']} | c_t - \varphi^*(w_t^*) | = \frac{\Delta_{r^0}}{2} = \min_{\varphi(w_{t^*})} \max_{t \in [t'', t']} | c_t - \varphi(w_t^*) |,$$ поскольку любая другая неубывающая $\varphi(w_t^*)$, заданная на $[t'', t']$, не может обеспечить $\varepsilon[t'', t'] < \varepsilon^*[t'', t']$.

Обозначим $t^{\text{в}}$ — ближайший справа от t'' номер, для которого $c_{t^{\text{в}}} > \min(c_{t_0^2}, c_{t_0^1}) + \frac{\Delta_{r^0}}{2}$, $t^{\text{н}}$ — ближайший слева от t' номер, для которого $c_{t^{\text{н}}} < \min(c_{t_0^2}, c_{t_0^1}) + \frac{\Delta_{r^0}}{2}$.

Для всех $t'' < t < t^{\text{в}}$, $t^{\text{н}} < t < t'$ также зададим $\varphi^*(w_t^*) = \min(c_{t_0^2}, c_{t_0^1}) + \frac{\Delta_{r^0}}{2}$, тогда

$$\varepsilon^*[t^{\text{н}}, t^{\text{в}}] = \max_{t \in [t^{\text{н}}, t^{\text{в}}]} | c_t - \varphi^*(w_t^*) | = \frac{\Delta_{r^0}}{2} = \min_{\varphi(w_t^*)} \max_{t \in [t^{\text{н}}, t^{\text{в}}]} | c_t - \varphi(w_t^*) |.$$

Аналогично задается $\varphi^*(w_t^*)$ на всех интервалах такого типа.

На всех остальных отрезках, где $c_{t''} > c_{t'}$, $w_{t''} > w_{t'}$ либо $c_{t''} = c_{t'}$, $w_{t''} \geqslant w_{t'}$, задаем $\varphi^*(w_t^*) = c_t$.

Заданная таким образом функция $\varphi^*(w_t^*)$ является неубывающей на всем множестве значений $\{w_t^*\}$, $1 \leqslant t \leqslant T$, а $\varepsilon^* = \varepsilon^*[1, T] = \max\limits_{t \in [1, T]} | c_t - \varphi^*(w_t^*) | =$

$$= \frac{\max\limits_{t \in [1, T]} \Delta_{r^0}}{2} = \min_{\varphi(w_t^*)} \max_{t \in [1, T]} | c_t - \varphi(w_t^*) |.$$

Поскольку r^* — минимальное r, при котором существует решение (13)—(14), то при $r = r^* - 1$ такого решения не существует, т. е. $\exists$ хотя бы одна пара индексов $[(i, j), (k, s)]$, таких, что $[(i, j), (k, s)] \in L''_{r^*-1}$, т. е. $c_{ij} - c_{ks} > \Delta_{r^*-1}$, $c_{ij} - c_{ks} \leqslant \Delta_{r^*}$ или $c_{ij} - c_{ks} = \Delta_{r^*}$, а $w_{ij}^* \leqslant w_{ks}^*$.

Пусть (i, j) соответствует номер t^1, (k, s) — номер t^2, $t^2 > t^1$. Следовательно, на некотором отрезке (t', t'') существует, такая пара точек (t^1, t^2), $t^2 > t^1$, что $c_{t^1} > c_{t^2}$, $c_{t^1} - c_{t^2} = \Delta_{r^*}$.

Поскольку $\{\Delta_r\}$ — возрастающая последовательность, то $\Delta_{r^*} = \max\limits_{\tau} \Delta_r = \Delta_{r^0}$ для отрезка $[t', t'']$ и в то же время $\Delta_{r^*} = \max\limits_{[1, T]} \Delta_r = \max\limits_{[1, T]} \Delta_{r^0}$, следовательно,

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*[1, T] = \min_{\varphi(w_t^*)} \max_{t \in [1, T]} | c_t - \varphi(w_t^*) | = \frac{\Delta_{r^*}}{2}.$$

Пусть $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ — не единственное при $r = r^*$ решение (13)—(14), т. е. существует отличное от $(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$ решение $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)$. Построим $\varphi^1(w_t^1)$ аналогично $\varphi^*(w_t^*)$.

Тогда $\max\limits_{t\in[1,T]} |c_t - \varphi^1(w_t^1)| = \min\limits_{\varphi(w_t^1)} \max\limits_{t\in[1,T]} |c_t - \varphi(w_t^1)| = \dfrac{\Delta_{r*}}{2}$, следовательно, $\varepsilon^* = \dfrac{\Delta_{r*}}{2} = \min\limits_{(\mathbf{u},\mathbf{v}),\varphi(w)} \max\limits_{i,j} |c_{ij} - \varphi(u_i + v_j)|$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Семенов И. Б., Павельев В. В., Сагалов Ю. Э.* Комплексная система оценки результатов деятельности научных подразделений в Институте проблем управления (автоматики и телемеханики) // Обмен передовым опытом в приборостроении. Экспресс-информация. М.: ЦНИИТЭИприборостроения, 1979. Вып. 10.
2. *Бурков В. Н., Зимоха В. А. и др.* Методика автоматизированной количественной комплексной оценки результатов деятельности производственных коллективов с учетом их прогрессивности (Базовый вариант). М.: ЦНИИТЭИприборостроения, 1983.
3. *Глотов В. А., Павельев В. В.* Векторная стратификация. М.: Наука, 1984.
4. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В., Цыганов В. В., Черкашин А. М.* Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. М.: Наука, 1984.
5. *Умрихина Е. В.* Приближение матричных сверток обобщенной аддитивной сверткой при построении комплексных оценок результатов деятельности // Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах. М.: Ин-т проблем управления, 1985. С. 101–105.
6. *Бурков В. Н., Горгидзе И. А., Ловецкий С. Е.* Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: ВЦ АН ГССР, 1974.

Поступила в редакцию
25.III.1986

REPRESENTING MATRIX CONVOLUTIONS AS GENERALIZED ADDITIVE CONVOLUTIONS IN GENERATION OF COMPREHENSIVE ESTIMATES

UMRIKHINA Ye. V.

The paper is concerned with representing a matrix (logical) convolution of local estimates as a generalized additive convolution in comprehensive estimation problems. The necessary and sufficient conditions of accurate representation are formulated. Two approaches are proposed to solving the problem and an approximate solution is outlined.