УДК 62-506:62-505.5

ПРАВИЛЬНЫЕ АДАПТИВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

ЦЫГАНОВ В. В.

(Москва)

Рассматривается активная система, содержащая центр и дальновидный активный элемент с управляемой стохастической моделью ограничений. Обобщается понятие правильности адаптивных механизмов функционирования (АМФ) в условиях неопределенности (включая случай нереальных планов). Ставится задача оптимального синтеза правильного АМФ. Строится характеристическая функция АМФ, дающая необходимые и достаточные условия правильности. Решается задача оптимального синтеза процедуры стимулирования в правильном АМФ. Формулируются и решаются задачи открытого и встречного планирования в АМФ. Полученные результаты иллюстрируются на примере гарантированно правильных АМФ.

1. Введение

В работе [1] рассматривается задача оптимального синтеза прогрессивного АМФ активной системы, обеспечивающего полное использование ее потенциала. Активная система включает центр и дальновидный активный элемент (АЭ) с управляемой стохастической моделью ограничений. Введена характеристика АМФ, с помощью которой получены необходимые и достаточные условия оптимальности прогрессивного АМФ. На ее основе найдены конструктивные необходимые и достаточные условия оптимальности процедуры стимулирования прогрессивного АМФ при заданных процедурах прогнозирования и планирования. При этом исходная задача оптимального синтеза прогрессивного АМФ векторного АЭ сводится к построению прогрессивного АМФ некоторого скалярного АЭ.

С другой стороны, в работе [2] рассматривалась задача оптимального синтеза гарантированно правильного АМФ, обеспечивающего выполнение плана, реализуемого при любом потенциале активной системы. Поскольку такой план соответствует наименьшему потенциалу, то и гарантированно правильный АМФ обеспечивает минимальное использование этого потенциала. В связи с этим представляет теоретический и практический интерес изучение и построение АМФ, обеспечивающих заинтересованность АЭ как в выполнении плана, так и в более полном использовании своего потенциала.

В настоящей работе рассматривается практически важная и широко распространенная задача построения правильного АМФ, нацеленного на выполнение активных элементов планового задания центра в случае, если плановые показатели достижимы в сложившейся ситуации (при конкретных значениях случайных факторов потенциала, неизвестных центру). В противном случае, при нереальном плане, правильный АМФ должен обеспечивать заинтересованность АЭ в увеличении степени выполнения планового задания до максимально возможной в сложившейся ситуации за счет полного использования потенциала системы.

2. Описание модели

Множество возможных состояний и целевая функция АЭ, порядок функционирования системы и решение игры имеют тот же вид, что и в работе [1]. Поэтому везде ниже приняты те же обозначения [1]. Напомним, что состояние АЭ в периоде t описывается вектором $\mathbf{y}_t=(y_{1t},\ldots,y_{mt})\in Y(\mathbf{p}_t)$, где $\mathbf{p}_t=(a_t\zeta_t)$ — векторный параметр модели ограничений (потенциала) АЭ, ζ_t — случайная помеха, $\zeta_t\in\theta$, a_t — настраиваемый параметр — оценка, получаемая на основе процедуры прогнозирования I:

(1) $\qquad a_{t+1}=I(a_t,\mathbf{y}_t)\uparrow a_t,\ a_0=a^0.$

Здесь и ниже для краткости используется запись вида $I(a_t,\ \mathbf{y}_t)\uparrow a_t$, если $I(a_t,\mathbf{y}_t)$ строго монотонно возрастает по a_t. Легко видеть, что $a_t\in A_t$, $\mathbf{p}_t\in P_t\equiv A_t\otimes\theta$, где $A_t\otimes\theta$ — прямое произведение A_t и θ, причем $A_t\otimes Y_t\xrightarrow[I]{}A_{t+1}$, $A_0=A^0$, $Y_t=Y(p_t)$. Множество $Y(a_t,\zeta_t)$ выпукло, компактно, строго монотонно и непрерывно по Хаусдорфу на A_t при любом $\zeta_t\in\theta$ и на θ при любом $a_t\in A_t$, причем $Y(a_t,\zeta_t)\supset Y(a_t,\zeta_t')$, $\zeta_t>\zeta_t'$, ζ_t, $\zeta_t'\in\theta$; $Y(\mathbf{p}_t)\supset W(\mathbf{p}_t)$, где $W(\mathbf{p}_t)$ — граница $Y(\mathbf{p}_t)$. Предполагается, что $A_{t+1}\subset A_t$, $t=0,1,\ldots$ и для любого $a\in A_t$, $\zeta,\zeta'\in\theta$:

(2) $\qquad I(a,\mathbf{y})\geqslant I(a,\mathbf{y}')\Leftrightarrow\exists\zeta,\zeta'\in\theta\colon y\in W(a,\zeta),\ y'\in W(a,\zeta'),\ \zeta\geqslant\zeta',$

причем равенство имеет место, если и только если $\zeta=\zeta'$. Отсюда следует

(3) $\qquad I(a,\mathbf{y})>I(a,\mathbf{y}'),\ \mathbf{y}\in W(a,\zeta),\ \mathbf{y}'\in\operatorname{int}Y(a,\zeta).$

Целевая функция АЭ

(4) $$w(\varphi_t,\ldots,\varphi_{t+T})=\sum_{\tau=t}^{t+T}\rho^{t-\tau}\varphi_\tau,\ \varphi_\tau=f(\mathbf{x}_\tau,\mathbf{y}_\tau),\ \mathbf{x}_\tau=\pi(a_\tau),$$

где φ_τ — поощрение в периоде τ, ρ — коэффициент дисконтирования, $\rho\leqslant1$, $\mathbf{x}_\tau$ — план в периоде τ, $\mathbf{x}_\tau\in X_\tau=\{\mathbf{x}=\pi(a),\ a\in A_\tau\}$, $\pi(\cdot)$, $f(\cdot)$ — непрерывные функции своих аргументов.

Рассматривается обычный порядок функционирования системы в периоде t [1]. В периоде t центр определяет оценку a_t (1) и назначает план $\mathbf{x}_t$ (4). Затем, после реализации случайного потенциала $\mathbf{p}_t$, АЭ выбирает состояние $\mathbf{y}_t$ и получает поощрение φ_t. При этом АЭ решает задачу оптимизации целевой функции (4) при некоторых прогнозных значениях его потенциала и состояния на весь интервал дальновидности T. Поскольку выбор состояния АЭ $\mathbf{y}_\tau$ (при данном потенциале $\mathbf{p}_\tau$) зависит от самого АЭ, то в качестве прогнозных значений рассматриваются состояния, максимизирующие целевую функцию (4). Введем оператор максимизации по состояниям $\mathbf{y}_\tau$ из множества $Y(\mathbf{p}_\tau)$: $M_\tau=\max\limits_{\mathbf{y}_\tau\in Y(p_\tau)}$. Через E_{ζ_τ} обозначим оператор устранения неопределенности относительно помехи ζ_τ в периоде τ,

$\zeta_\tau \in \theta$. Например, в случае устранения неопределенности на основе принципа максимального гарантированного результата $E_{\zeta_\tau} = \min\limits_{\zeta_\tau \in \theta}$. Произведение операторов E_{ζ_τ}, $\tau = \overline{\nu, \mu}$ обозначим E_ν^μ: $E_\nu^\mu = E_{\zeta_\nu} \ldots E_{\zeta_\mu}$. Наконец, последовательное произведение операторов M_τ и E_{ζ_τ}, $\tau = \overline{\nu, \mu}$, обозначим M_ν^μ: $M_\nu^\mu = E_{\zeta_\nu} M_\nu \ldots E_{\zeta_\mu} M_\mu$. С помощью последнего ожидаемый выигрыш АЭ при состоянии $\mathbf{y}_t$ можно записать в виде [1]:

$$(5) \qquad \hat{w}(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = M_{t+1}^{t+T} w(\varphi_t, \ldots, \varphi_{t+T}) = \varphi_t + \sum_{\tau=t+1}^{t+T} \rho^{\tau-t} M_{t+1}^{t+T} \varphi_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t),$$

где $\varphi_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) \equiv f(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{y}_\tau)$, $\mathbf{x}_\tau = \pi(a_\tau)$, $a_{\tau+1} = I(a_\tau, \mathbf{y}_\tau)$, $\mathbf{y}_\tau \in Y(\mathbf{p}_\tau)$, $\mathbf{p}_\tau \in P$, $\tau = \overline{t, t+T}$.

Множество возможных выборов АЭ (решение игры) имеет вид

$$(6) \qquad R(\Sigma, \mathbf{p}) = \operatorname{Arg} \max_{\mathbf{y}_t \in Y(\mathbf{p})} \hat{w}(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t).$$

3. Правильный АМФ

Как уже указывалось во введении, гарантированно правильным называется АМФ, обеспечивающий равенство состояния и плана АЭ ($\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t \in Y(\mathbf{p}_t)$) при любом потенциале системы ($R(\Sigma, \mathbf{p}_t) = \mathbf{x}_t$ $\forall \mathbf{p}_t \in P$). Заметим, что план $\mathbf{x}_t$ назначается до того, как элементу становится известна помеха ζ_t, а с нею и потенциал системы $\mathbf{p}_t = (a_t, \zeta_t)$. Более того, центру помеха ζ_t вообще неизвестна. Поэтому план $\mathbf{x}_t$ может и не принадлежать множеству возможных состояний АЭ $Y(\mathbf{p}_t)$. Будем говорить, что план $\mathbf{x}_t$ реален (или нереален), если $\mathbf{x}_t \in Y(\mathbf{p}_t)$ (или $\mathbf{x}_t \overline{\in} Y(\mathbf{p}_t)$, соответственно). Очевидно, что определение гарантированно правильного АМФ имеет смысл лишь в том случае, если план реален. Обобщим определение правильного АМФ на случай нереального плана. Именно, будем считать, что в этом случае правильный АМФ обеспечивает выбор элементам состояния $\mathbf{y}_t$ из некоторого подмножества $A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ на границе множества возможных состояний $W(\mathbf{p}_t) \supset A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$, в некотором смысле «наиболее близкого» к желательному состоянию $\mathbf{x}_t$ [1]. Обозначим

$$(7) \qquad B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) = \begin{cases} \mathbf{x}_t, & \mathbf{x}_t \in Y(\mathbf{p}_t) \\ A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) \subset W(\mathbf{p}_t), & \mathbf{x}_t \overline{\in} Y(\mathbf{p}_t) \end{cases}, \quad \mathbf{p}_t \in P$$

— множество оптимальных состояний АЭ в периоде t, $t=0, 1, \ldots$, причем $A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t^x) = \mathbf{x}_t$, если $\mathbf{x}_t \in W(\mathbf{p}_t^x)$. Будем говорить, что АМФ правилен, если

$$(8) \qquad R(\Sigma, \mathbf{p}_t) \subset B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) \quad \forall \mathbf{p}_t \in P.$$

В отсутствие дальновидного АЭ ($T=0$) сумма в правой части (5) равна нулю и условие (8), согласно (5)–(7), имеет вид $\forall \mathbf{p}_t \in P$

$$(9) \qquad F(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) = \operatorname{Arg} \max_{\mathbf{y}_t \in Y(\mathbf{p}_t)} f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) \subset B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t).$$

Класс АМФ, удовлетворяющих (9), обозначим через Π. Представляется естественным при построении правильных АМФ ограничиться механизмами из класса Π, поскольку полученные АМФ остаются правильными и для недальновидных АЭ. Наконец, напомним, что АМФ $\Sigma = (I, \pi, f)$ называется прогрессивным (регрессивным) по оценке, если $M_t f(\pi(a_t), \mathbf{y}_t)$

возрастает (или, соответственно, убывает) по a_t для любого $\mathbf{p}_t \in P$, $t=0, 1, \ldots$ [1]. Прогрессивные и регрессивные по оценке АМФ составляют класс M АМФ, монотонных по оценке. Решение задачи синтеза правильного АМФ (8) будем искать в классе $(\Pi \cap M)$. Предположим вначале, что $A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ — точка при любом $\mathbf{p}_t \in P$.

Теорема 1. Пусть $\Sigma \in (\Pi \cap M)$. Тогда для правильности АМФ Σ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mathbf{p}_t \in P$ имело место

$$V(\Sigma, \mathbf{p}_t) \subset B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t), \tag{10}$$

где

$$V(\Sigma, \mathbf{p}_t) = \operatorname{Arg} \max_{\mathbf{y}_t \in Y(\mathbf{p}_t)} v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t), \tag{11}$$

$$v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) + \sum_{\tau=t+1}^{t+T} \rho^{\tau-t} E_{t+1}^{t+T} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t), \tag{12}$$

$$\tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = f(\tilde{\mathbf{x}}_\tau, \mathbf{z}_\tau),\ \mathbf{z}_\tau \in B(\tilde{\mathbf{x}}_\tau, \tilde{\mathbf{p}}_\tau),\ \tilde{\mathbf{x}}_\tau = \pi(\tilde{a}_\tau),\ \tilde{\mathbf{p}}_\tau = (\tilde{a}_\tau, \zeta_\tau),$$

$$\tilde{a}_\tau = I(\tilde{a}_{\tau-1}, \mathbf{z}_\tau),\ \tau = \overline{t+1, t+T},\ \tilde{a}_t = a_t,\ \mathbf{z}_t = \mathbf{y}_t.$$

При этом имеют место равенства

$$R(\Sigma, \mathbf{p}_t) = V(\Sigma, \mathbf{p}_t) = F(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t).$$

Доказательства теорем 1—3 привдены в приложении.

Заметим, что при $\mathbf{x}_t \overline{\in} \bigcup_{\mathbf{p} \in P} Y(\mathbf{p})$, $t=0, 1, \ldots$ (заведомо нереальные планы) в силу (7) $B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) = A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ и из теоремы 1 следует теорема 2 [1]. При этом выражения (12) и (18) [1] совпадают. Поэтому (12) можно рассматривать как обобщение характеристики АМФ, включающее случай как прогрессивного, так и правильного АМФ. Далее, АМФ Σ, удовлетворяющий теореме 1, является правильным как для недальновидных АЭ $T=0$, $\Sigma \in (\Pi \cap M)$, так и для АЭ с дальновидностью $T>0$. Нетрудно показать, что он является также правильным для АЭ с дальновидностью, меньшей T, т. е. равной $1, 2, \ldots, T-1$. Таким образом, если истинная дальновидность АЭ $T_и$ точно неизвестна центру, достаточно выбрать T заведомо большим $T_и$ и обеспечить выполнение условий теоремы 1.

4. Правильное стимулирование

Перейдем теперь к построению процедуры стимулирования, обеспечивающей правильность АМФ при заданных процедурах прогнозирования I и планирования π. Как указывалось выше, для случая $\mathbf{x}_t \overline{\in} \bigcup_{\mathbf{p} \in P} Y(\mathbf{p})$ справедливо решение задачи оптимального синтеза (8), полученное в [1]. Поэтому ниже решение ищется в классе АМФ $\Sigma \in R$ с процедурами I, π, такими, что $x_t \in \bigcup_{\mathbf{p} \in P} Y(\mathbf{p})$ (т. е. план реален хотя бы при некотором значении потенциала АЭ). Введем расширение множества $B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ в виде

$$B_+(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) = \begin{cases} B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t), & \mathbf{x}_t \in \operatorname{int} Y(\mathbf{p}_t), \\ \mathscr{E}(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t), & \mathbf{x}_t \overline{\in} \operatorname{int} Y(\mathbf{p}_t), \end{cases} \tag{13}$$

где $\mathscr{E}(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ — замкнутое множество, $\mathscr{E}(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) \subset W(\mathbf{p}_t)$, причем $\mathscr{E}(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t^x) = \mathbf{x}_t$, если $\mathbf{x}_t \in W(\mathbf{p}_t^x)$.

Теорема 2. Пусть АМФ $\Sigma = (I, \pi, f) \in (\Pi \cap M \cap R)$. Тогда для правильности АМФ Σ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mathbf{p}_t \in P$ выполнялось

(14) $f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = h(a_t, a_{t+1}) \quad \forall \mathbf{y}_t \in B_+(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$,

где h — непрерывная функция своих аргументов, причем

(15) $h(a_t, a_{t+1}) \uparrow a_{t+1}, u(a_t, a_{t+1}) \uparrow a_{t+1}, a_{t+1} \leqslant a^*_{t+1}$,

(16) $\arg \max\limits_{a_{t+1} \in A_{t+1}} h(a_t, a_{t+1}) = \arg \max\limits_{a_{t+1} \in A_{t+1}} u(a_t, a_{t+1}) = \min [a^*_{t+1}, I(a_t, \mathbf{y}_t)]$,

где

(17) $u(a_t, a_{t+1}) = \sum\limits_{\tau=t}^{t+T} \rho^{\tau-t} E^{t+T}_{t+1} h(\tilde{a}_\tau, \tilde{a}_{\tau+1}), \tilde{a}_t = a_t, \tilde{a}_{t+1} = a_{t+1}, \tilde{a}_{\tau+1} = I(\tilde{a}_\tau, \mathbf{z}_\tau), z_\tau \in B(\tilde{\mathbf{x}}_\tau, \tilde{\mathbf{p}}_\tau), \tilde{\mathbf{p}}_\tau = (\tilde{a}_\tau, \zeta_\tau), \tau = \overline{t+1, t+T-1}$,

$a^*_{t+1} = I(a_t, \pi(a_t))$.

Содержательно смысл теоремы 2 заключается в следующем. Правильная процедура стимулирования реализуется функцией $f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$, максимум которой при $\mathbf{y}_t \in W(\mathbf{p}_t)$ (т. е. при заданном $a_{t+1} = I(a_t, \mathbf{y}_t)$), согласно (9) и (13), достигается на множестве $B_+(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$. При изменении же $\mathbf{y}_t$ в пределах множеств $B_+(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ с различными значениями $\mathbf{p}_t \in P$ функция $f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = h(a_t, a_{t+1})$ монотонно возрастает с увеличением $a_{t+1} = I(a_t, \mathbf{y}_t)$, если $a_{t+1} \leqslant a^*_{t+1}$ (т. е. до тех пор, пока не достигается равенство $\mathbf{x}_t = \mathbf{y}_t$). При этом, согласно (16), максимум $f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$ достигается либо при $\mathbf{x}_t = \mathbf{y}_t$, либо при $\mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t \in A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ (если $I(a_t, \mathbf{z}_t) \leqslant a^*_{t+1}$). Условия (15)–(17) обеспечивают настройку параметров функции $f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$ с учетом дальновидности АЭ и принятых процедур прогнозирования и планирования при помощи характеристики процедуры стимулирования $u(a_t, a_{t+1})$. Таким образом, процедура стимулирования в правильном АМФ, как и в прогрессивном [1], основана на скалярных оценках a_{t+1} как образах состояний векторного АЭ $\mathbf{y}_t$.

Заметим, что согласно (13) множество максимумов $f(x_t, y_t)$ при $\mathbf{x}_t \in \operatorname{int} Y(\mathbf{p}_t)$, $\mathbf{y}_t \in W(\mathbf{p}_t)$ произвольно (ввиду произвольности $\mathscr{E}(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) \subset W(\mathbf{p}_t)$). Поэтому условие (13) по сути не ограничивает выбор функций $f(\cdot)$ при синтезе правильных систем стимулирования в АМФ. Существенно лишь то, что при $\mathbf{y}_t \in W(\mathbf{p}_t)$ величины $f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = h(a_t, a_{t+1})$ и $u(a_t, a_{t+1})$ меньше, чем $h(a_t, a^*_{t+1})$ и $u(a_t, a^*_{t+1})$. В противном случае дальновидному АЭ выгодно перевыполнять план $\mathbf{x}_t$.

5. Гарантированно правильные механизмы

Обозначим через $G \subset R$ класс АМФ с процедурами I, π, такими, что $\mathbf{x}_\tau \in Y(\mathbf{p}_\tau)$, $\tau = \overline{t, t+T}$, $\mathbf{p}_\tau \in P$ (т. е. все планы являются реальными). Для этого достаточно $\mathbf{x}_\tau \in \bigcap\limits_{\mathbf{p}_\tau \in P} Y(\mathbf{p}_\tau)$. Представим процедуру стимулирования в виде

(18) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) - \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \chi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$,

где $g(\mathbf{y})$ — непрерывная функция. Пусть $\Sigma \in (\Pi \cap M \cap G)$. Тогда из условия (18) следует, что функция $g(\pi(a))$ монотонна по a, $a \in A$. Действительно, при $\Sigma \in (G \cap \Pi)$ из (7), (9) следует $M_\tau f(\pi(a_\tau), \mathbf{y}_\tau) = g(\pi(a_\tau))$, а из $\Sigma \in M$

следует, что $g(\pi(a_\tau))$ монотонна по a, $a \in A$. Тогда, подставляя (18) в условие теоремы 1, получаем, что для гарантированной правильности АМФ (см. разд. 3) необходимо и достаточно, чтобы при любом $\mathbf{p}_t \in P$ выполнялось

$$(19) \qquad \arg \max_{\mathbf{y}_t \in Y(\mathbf{p}_t)} \left[f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) + \sum_{\tau=t+1}^{t+T} \rho^{\tau-t} g(\tilde{\mathbf{x}}_\tau) \right] = \mathbf{x}_t \in Y(\mathbf{p}_t),$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_\tau = \pi(\tilde{a}_\tau)$, $\tilde{a}_{\tau+1} = I(\tilde{a}_\tau, \tilde{\mathbf{x}}_\tau)$, $\tau = \overline{t+1,\ t+T-1}$, $\tilde{a}_{t+1} = I(a_t, \mathbf{y}_t)$. Условие (19) устанавливает дополнительное ограничение снизу на функцию штрафов $\chi(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$. Действительно, из (9), (18), (19) следует

$$(20) \qquad \chi(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) > g(\mathbf{y}_t) - g(\mathbf{x}_t) + \psi(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t),\ \mathbf{x}_t \neq \mathbf{y}_t,$$

где $\Psi(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = \max \left[0, \sum_{\tau=t+1}^{t+T} (g(\tilde{\mathbf{x}}_\tau) - g(\hat{\mathbf{x}}_\tau))\right]$, $\hat{\mathbf{x}}_\tau = \pi(\hat{a}_\tau)$, $\hat{a}_{\tau+1} = I(\hat{a}_\tau, \hat{\mathbf{x}}_\tau)$, $\tau = \overline{t+1,\ t+T-1}$, $\hat{a}_{t+1} = I(a_t, \mathbf{x}_t)$, $\tilde{\mathbf{x}}_\tau$ определено в (19). Заметим, что при $\sum_{\tau=t+1}^{t+T} [g(\tilde{\mathbf{x}}_\tau) - g(\hat{\mathbf{x}}_\tau)] = 0$ (20) совпадает с условием (9), являющимся необходимым и достаточным для правильности механизма в случае недальновидного АЭ (т. е. при $T=0$). Далее, если АМФ Σ прогрессивен по оценке, то легко видеть, что дополнительные штрафы $\psi(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$, связанные с дальновидностью, не равны нулю при $I(a_t, \mathbf{y}_t) > I(a_t, \mathbf{x}_t)$, одинаковы для любых $\mathbf{y}_t \in W(\mathbf{p}_t)$ при заданном $\mathbf{p}_t \in P$ и возрастают с увеличением $I(a_t, \mathbf{y}_t)$. С учетом (3) это означает, что штрафы за «перевыполнение» плана (т. е. $\mathbf{y}_t \in W(a, \zeta)$, $\mathbf{x}_t \in \operatorname{int} Y(a, \zeta)$) для дальновидного АЭ должны быть больше, чем для недальновидного. Если же АМФ регрессивен по оценке, то дополнительные штрафы $\psi(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$ не равны нулю при $a_{t+1} = I(a_t, \mathbf{y}_t) < \hat{a}_{t+1} = I(a_t, \mathbf{x}_t)$ и возрастают с уменьшением $a_{t+1} = I(a_t, \mathbf{y}_t)$. В этом случае учет дальновидности приводит к необходимости усиления штрафов за «невыполнение» планов (т. е. уменьшение a_{t+1}).

6. Открытый АМФ

Предположим теперь, что план на период t назначает сам АЭ (так называемое открытое планирование), после чего функционирование системы осуществляется так, как было описано ранее. По существу, АЭ задает начальную величину плана в итеративной процедуре его формирования. Содержательно это соответствует открытому текущему планированию состояний АЭ с получением адаптивной оценки параметров его модели ограничений и перспективным планированием на ее основе.

Обозначим процедуру планирования, включающую открытое текущее планирование и адаптивное перспективное планирование (4), через π^0. Механизм функционирования с процедурами планирования π^0, прогнозирования I (1) и стимулирования f (4) будем называть «открытым АМФ» и обозначать $\Sigma = (I, \pi^0, f)$. В отличие от «обычного» АМФ, в открытом АМФ элемент осуществляет выбор плана $\mathbf{x}_t$, а затем и выбор состояния $\mathbf{y}_t$. Естественно поэтому в качестве оптимальных открытых АМФ рассматривать такие, при которых план и состояние АЭ принадлежат, соответственно, множествам оптимальных планов и состояний. Поскольку выбор $\mathbf{y}_\tau$, $\tau = \overline{t+1,\ t+T}$ также зависит от АЭ, то в качестве прогнозных по-прежнему рассматриваются состояния, максимизирующие целевую функцию (4). Ожидаемый выигрыш АЭ при плане $\mathbf{x}_t$, очевидно, имеет вид

$$\hat{w}(\mathbf{x}_t) = M_t^{t+T} w(\varphi_t, \ldots, \varphi_{t+T}), \tag{21}$$

где $\mathbf{x}_t \in X_t$, X_t — множество допустимых планов. Следовательно, множество предпочтительных для АЭ планов при открытом планировании имеет вид $Q(\Sigma, X_t) \operatorname{Arg} \max\limits_{\mathbf{x}_t \in X_t} \hat{w}(\mathbf{x}_t)$.

Обозначим множество оптимальных планов через $X_t{}^0$. В соответствии с вышесказанным открытый АМФ $\Sigma = (I, \pi^0, f)$ называется оптимальным, если $Q(\Sigma, X_t) \subset X_t{}^0$ и имеет место (8).

Теорема 3. Пусть открытый АМФ $\Sigma = (I, \pi^0, f) \in (\Pi \cap M)$. Тогда для оптимальности АМФ Σ необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$V(\Sigma, p_t) \subset B(\mathbf{p}_t), \ \mathbf{p}_t \in P, \tag{22}$$

$$\operatorname{Arg} \max_{\mathbf{x}_t \in X_t} v(\mathbf{x}_t) \subseteq X_t^0, \tag{23}$$

где $v(\mathbf{x}_t) = E_{\zeta_t} v(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$, $\mathbf{z}_t \in B(\mathbf{p}_t)$.

Функцию $v(\mathbf{x}_t)$ будем называть характеристикой открытого АМФ.

7. Встречный АМФ

Предположим теперь, что в периоде t план $\mathbf{x}_t = \pi(a_t)$ назначается центром на основе текущей оценки параметров модели ограничений АЭ a_t, сообщаемой элементом центру (так называемый встречный способ формирования данных), после чего функционирование системы осуществляется точно так же, как и в базовой модели. Содержательно это соответствует встречному текущему планированию с получением в дальнейшем адаптивных оценок параметров АЭ и перспективным планированием на их основе.

Обозначим процедуру прогнозирования, включающую встречный способ формирования текущей оценки параметров АЭ и адаптивное прогнозирование этих параметров в перспективе посредством процедуры I, через I^0. Механизм функционирования с процедурами прогнозирования I, планирования π и стимулирования f (5) будем называть встречным АМФ и обозначать $\Sigma = (I^0, \pi, f)$. Понятие оптимальности встречных АМФ вводится аналогично понятию оптимальности открытых АМФ. Обозначим через A_t и $A_t{}^0$, соответственно, множества допустимых и оптимальных для центра оценок a_t, $A_t{}^0 \subset A_t$. Встречный АМФ $\Sigma = (I^0, \pi, f)$ будем называть оптимальным, если $\operatorname{Arg} \max\limits_{a_t \in A_t} \hat{w}(\pi(a_t)) \subseteq A_t^0$ и имеет место (8). Тогда из теоремы 3 получаем

Следствие. Пусть встречный АМФ $\Sigma = (I^0, \pi, f) \in (\Pi \cap M)$. Тогда для оптимальности Σ необходимо и достаточно, чтобы

$$V(\Sigma, \mathbf{p}_t) \subseteq B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t), \ \mathbf{p}_t \in P, \ \operatorname{Arg} \max_{a_t \in A_t} v(\pi(a_t)) \subseteq A_t^0.$$

Пример — гарантированно правильный встречный АМФ. Пусть $\Sigma \in (\Pi \cap M \cap G)$ и имеет место (18). Тогда условие (22) имеет вид (19), а характеристическая функция открытого АМФ

$$v(\mathbf{x}_t) = g(\mathbf{x}_t) + \sum_{\tau=t+1}^{t+T} \rho^{\tau-t} g(\tilde{\mathbf{x}}_\tau) = \hat{w}(\mathbf{x}_t),$$

где $\widetilde{\mathbf{x}}_\tau$ определяется согласно (19). Заметим, что $v(\pi(a_t))$ монотонна по a_t, $a_t \in A_t$, поскольку, во-первых, $\Sigma \in M$ и $h(\pi(a_t))$ монотонна по a_t и, во-вторых, $I(a_t, y_t) \uparrow a_t$. Далее, если $a_t \in A_t^G = \{a_t | \mathbf{x}_t \in Y(\mathbf{p}_t), \mathbf{x}_\tau \in Y(\mathbf{p}_\tau), \widetilde{\mathbf{p}}_\tau = (\tilde{a}_\tau, \zeta_\tau), \tau = \overline{t+1, t+T}\}$, где $\tilde{a}_\tau$ определяется согласно (19), то встречный АМФ Σ является гарантированно правильным (т. е. $\Sigma \in G$). Пусть Σ прогрессивен по оценке, так что $h(\pi(a_+)) \uparrow a_t$. Тогда, очевидно, $\arg \max\limits_{a_t \in A_t^G} v(\pi(a_t)) = \max\limits_{a_t \in A_t^G} a_t = a_{t*}$. Таким образом, АЭ сообщает центру наибольшую оценку a_t^* из всех оценок $a_t \in A_t^G$, при которых планы гарантированно реализуемы в периодах $t, \ldots, t+T$. Если $a_t^* \in A_t^0$, то, согласно следствию, рассматриваемый механизм является оптимальным, в противном случае — нет. Если же АМФ Σ регрессивен по оценке, то $h(\pi(a_t))$ и $v(\pi(a_t))$ строго монотонно убывает по a_t. Поэтому АЭ сообщает минимальную оценку $\min\limits_{a_t \in A_t^G} a_t$.

8. Заключение

В настоящей работе развит подход к построению правильных АМФ дальновидных АЭ, являющихся одновременно правильными и в случае недальновидных АЭ (т. е. при $\Sigma \in \Pi$). Используя свойство монотонности АМФ по оценке (т. е. $\Sigma \in M$), удалось сформулировать необходимые и достаточные условия правильности АМФ в терминах его характеристической функции (теорема 1). С ее помощью решена задача синтеза процедуры стимулирования при реальных[1] ($\Sigma \in R$) и гарантированно выполнимых ($\Sigma \in G$) планах (теорема 2 и п. 5). Поставлены задачи оптимального синтеза АМФ с открытым планированием и встречным способом формирования данных. Их решение также получено на основе характеристики АМФ. Таким образом, развитый в работе [1] и в настоящей работе подход к решению задач анализа и синтеза АМФ активных систем с дальновидными элементами на основе характеристики АМФ представляется весьма плодотворным.

Автор выражает искреннюю благодарность В. Н. Буркову за обсуждение результатов работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что из (9) с учетом (7) следует

(П.1) $\quad f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) < f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_\nu), \quad \mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu), \quad \mathbf{x}_\nu \neq \mathbf{y}_\nu,$

(П.2) $\quad f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{z}_\nu) > f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu), \quad \mathbf{x}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu), \quad \mathbf{y}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)/A(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu), \quad \mathbf{z}_\nu \in A(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu).$

Введем функции

(П.3)
$$v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) = \sum_{\tau=\nu+1}^{t+T} \rho^{\tau-\nu} E_{\nu+1}^{t+T} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) + f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu),\ \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) = $$
$$= f(\mathbf{x}_\tau, \mathbf{z}_\tau),\ \mathbf{x}_\tau = \pi(a_\tau),$$
$$\tilde{a}_\tau = I(\tilde{a}_{\tau-1}, \mathbf{z}_{\tau-1}), \quad \mathbf{z}_\tau \in B(\widetilde{\mathbf{x}}_\tau, \widetilde{\mathbf{p}}_\tau), \quad \tilde{a}_\nu = a_\nu,$$
$$\widetilde{\mathbf{p}}_\tau = (\tilde{a}_\tau, \zeta_\tau) \quad \tau = \overline{\nu+1, \nu+T}, \quad \nu = \overline{t, t+T-1}.$$

Заметим, что, согласно (12), $v_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$ и

(П.4)
$$v_{\nu-1}(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) = f(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) + \rho E_{\zeta_\nu} v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{z}_\nu), \quad \mathbf{z}_\nu \in B(\tilde{\mathbf{x}}_\nu, \tilde{\mathbf{p}}_\nu).$$

---

[1] Напомним, что случай нереальных планов ($\Sigma \equiv R$) рассмотрен в работе [1].

Из (9) следует: $f(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)=M_t f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$, $\mathbf{z}_t\in B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$, $\mathbf{x}_t\in X_t$, $\mathbf{p}_t\in P$. Отсюда в силу $A_t\supset A_{t+T}$, $X_t\supset X_{t+T}$ получаем $f(\mathbf{x}_{t+T}, \mathbf{z}_{t+T})=M_{t+T}f(\mathbf{x}_{t+T}, \mathbf{y}_{t+T})$ при любых $\mathbf{z}_{t+T}\in B(\mathbf{x}_{t+T}, \mathbf{p}_{t+T})$, $\mathbf{x}_{t+T}\in X_{t+T}$, $\mathbf{p}_{t+T}\in P$. Теперь, используя определение (П.1), нетрудно показать:

$$v_{t+T-1}(\mathbf{x}_{t+T-1}, \mathbf{y}_{t+T-1})=f(\mathbf{x}_{t+T-1}, \mathbf{y}_{t+T-1})+\rho M_{t+T}\varphi_{t+T}(\mathbf{x}_{t+T-1}, \mathbf{y}_{t+T-1}).$$

Далее доказательство проводится по индукции. Предположим, что для некоторого ν, $t+1\leqslant\nu\leqslant t+T-1$ имеем

$$v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu)=f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu)+\sum_{\tau=\nu+1}^{t+T}\rho^{\tau-\nu}M_{\nu+1}^{t+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu), \tag{П.5}$$

и покажем, что

$$v_{\nu-1}(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1})=f(\mathbf{x}_{\nu-1}, y_{\nu-1})+\sum_{\tau=\nu}^{t+T}\rho^{\tau-\nu}M_\nu^{t+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu). \tag{П.6}$$

Используя последовательно то обстоятельство, что $M_\nu^\mu=E_{\xi_\nu}M_\nu M_{\nu+1}^\mu$, а также предположение (П.5), имеем

$$\sum_{\tau=\nu}^{t+T}\rho^{\tau-\nu}M_\nu^{t+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1})=\rho M_\nu v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu),$$

$$\mathbf{x}_\nu=\pi(a_\nu),\quad a_\nu=I(a_{\nu-1}, y_{\nu-1}),\quad \mathbf{x}_{\nu-1}=\pi(a_{\nu-1}),\quad \mathbf{y}_\nu\in Y(\mathbf{p}_\nu),\quad \mathbf{p}_\nu\in P. \tag{П.7}$$

Докажем вначале необходимость, а затем и достаточность условий теоремы.

1. *Необходимость*. Покажем, что при $\Sigma\in(\Pi\cap M)$ имеет место

$$M_\nu v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu)=v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{z}_\nu),\quad \mathbf{z}_\nu\in R(\Sigma, \mathbf{p}_\nu). \tag{П.8}$$

Заметим, что при $\mathbf{x}_\nu\in Y(\mathbf{p}_\nu)$ вследствие правильности Σ имеем из (7), **(8)** $R(\Sigma, \mathbf{p}_\nu)=\mathbf{x}_\nu$. Отсюда, используя определение (6), имеем при $t=\nu$

$$f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_\nu)+\sum_{\tau=\nu+1}^{\nu+T}\rho^{\tau-\nu}[M_{\nu+1}^{\nu+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_\nu)-M_{\nu+1}^{\nu+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu)]>f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu), \tag{П.9}$$
$$\mathbf{x}_\nu\in X_\nu,\quad \mathbf{y}_\nu\in Y(\mathbf{p}_\nu),\quad \mathbf{x}_\nu\neq\mathbf{y}_\nu.$$

Далее, заметим, что если $\mathbf{q}_\nu$, $\mathbf{q}_\nu\in Y(\mathbf{p}_\nu)$ таковы, что $I(a_\nu, \mathbf{q}_\nu)\geqslant I(a_\nu, \mathbf{g}_\nu)$, то при прогрессивности по оценке получаем

$$\sum_{\tau=\xi+1}^{\mu}\rho^{\tau-\nu}[M_{\nu+1}^\mu\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{q}_\nu)-M_{\nu+1}^\mu\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{g}_\nu)]\geqslant 0, \tag{П.10}$$

а при регрессивности по оценке –

$$\sum_{\tau=\xi+1}^{\mu}\rho^{\tau-\nu}[M_{\nu+1}^\mu\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{q}_\nu)-M_{\nu+1}^\mu\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{g}_\nu)]\leqslant 0 \tag{П.11}$$

при любых $\nu\leqslant\xi\leqslant\mu-1$, $\mu\leqslant\nu+T$.

1.1. *Регрессивность по оценке*. При $\mathbf{x}_\nu\in Y(\mathbf{p}_\nu)$ согласно (7) $B(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu)=A(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu)\subset W(\mathbf{p}_\nu)$. Повторяя дословно все рассуждения, проведенные при доказательстве необходимости теоремы 2 в [1], получаем искомое утверждение (П.8).

Пусть теперь $\mathbf{x}_\nu\in Y(\mathbf{p}_\nu)$. Предположим, что $I(a_\nu, \mathbf{x}_\nu)\leqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$. Тогда, полагая в (П.11) $\xi=t+T$, $\mu=\nu+T$, $\mathbf{q}_\nu=\mathbf{x}_\nu$, $\mathbf{g}_\nu=\mathbf{y}_\nu$, суммируя полученное в результате неравенство с (П.1) и учитывая (П.5), получаем (П.8). Пусть теперь $I(a_\nu, \mathbf{x}_\nu)\geqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$. Полагая в (П.11) $\xi=t+T$, $\mu=\nu+T$, $\mathbf{q}_\nu=\mathbf{x}_\nu$, $\mathbf{g}_\nu=\mathbf{y}_\nu$, получаем

$$\sum_{\tau=t+T+1}^{\nu+T}\rho^{\tau-\nu}[M_{\nu+1}^{\nu+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu)-M_{\nu+1}^{\nu+T}\varphi_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_\nu)]\geqslant 0. \tag{П.12}$$

Суммируя (П.12) и (П.9), с учетом (П.5) снова получаем **(П.8)**.

1.2. *Прогрессивность по оценке.* При $\mathbf{x}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)$, согласно (7), (8), $\mathbf{z}_\nu \in A(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu) \subset W(\mathbf{p}_\nu)$, так что согласно (2), (3) $I(a_\nu, \mathbf{z}_\nu) \geqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$, если $y_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)/A(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu)$. Отсюда, полагая в (П.10) $\xi = \nu$, $\mu = t+T$, $\mathbf{q}_\nu = \mathbf{z}_\nu$, $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{y}_\nu$, суммируя полученное в результате неравенство с (П.2) и учитывая (П.5), получаем (П.8). Пусть теперь $\mathbf{x}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)$. Если $I(a_\nu, \mathbf{x}_\nu) \geqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$, то, полагая в (П.10) $\xi = \nu$, $\mu = t+T$, $\mathbf{q}_\nu = \mathbf{y}_\nu$, $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{x}_\nu$ и вычитая из полученного неравенства (П.1), также имеем (П.8). Наконец, при $I(a_\nu, \mathbf{x}_\nu) \leqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$, полагая в (П.10) $\xi = t+T$, $\mu = \nu+T$, $\mathbf{q}_\nu = \mathbf{y}_\nu$, $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{x}_\nu$, получаем (П.12). Суммируя (П.12) и (П.9), вновь получаем (П.8).

Таким образом, (П.8) имеет место при $\Sigma \in (\Pi \cap M)$. Далее, согласно (8), $\mathbf{z}_\nu \in B(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu)$. Но тогда из (П.7) и (П.4) следует (П.6) при любых $\nu = \overline{t+1, t+T}$. Полагая в (П.6) $\nu = t+1$, учитывая, что $v_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$, и сравнивая (5) и (П.6), имеем

$$(\text{П}.13) \qquad v(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) = \hat{w}(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) > \hat{w}(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t).$$

Следовательно, согласно (6), (11), (12), $V(\Sigma, \mathbf{p}_t) = R(\Sigma, \mathbf{p}_t)$ и, согласно (8), $\mathbf{z}_\nu \in B(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu)$. На этом доказательство необходимости заканчивается.

2. *Достаточность.* Покажем, что при $\Sigma \in (\Pi \cap M)$ имеет место

$$(\text{П}.14) \qquad M_\nu v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) = v_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{z}_\nu), \qquad \mathbf{z}_\nu \in V(\Sigma, \mathbf{p}_\nu).$$

Заметим, что при $\mathbf{x}_\nu \in Y(p_\nu)$, $t = \nu$ вследствие (7), (10) $V(\Sigma, \mathbf{p}_\nu) = \mathbf{x}_\nu$. Отсюда, используя определение (11), имеем при $t = \nu$, $\mathbf{x}_\nu \neq \mathbf{y}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)$

$$(\text{П}.15) \qquad f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_\nu) + \sum_{\tau=\nu+1}^{\nu+T} \rho^{\tau-\nu} [E_{\nu+1}^{\nu+T} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_\nu) - E_{\nu+1}^{\nu+T} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu)] > f(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu).$$

Кроме того, согласно (П.1) и (9), $V(\Sigma, \mathbf{p}_\nu) = F(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu)$. Далее, по аналогии с (П.10), (П.11) имеем, соответственно, при прогрессивности по оценке

$$(\text{П}.16) \qquad \sum_{\tau=\xi+1}^{\mu} \rho^{\tau-\nu} [E_{\nu+1}^{\mu} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{q}_\nu) - E_{\nu+1}^{\mu} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{g}_\nu)] \geqslant 0,$$

а при регрессивности по оценке

$$(\text{П}.17) \qquad \sum_{\tau=\xi+1}^{\mu} \rho^{\tau-\nu} [E_{\nu+1}^{\mu} \tilde{\varphi}_\nu(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{q}_\nu) - E_{\nu+1}^{\mu} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{g}_\nu)] \leqslant 0$$

при любых $\nu \leqslant \xi \leqslant \mu \leqslant \nu+T-1$.

2.1. *Регрессивность по оценке.* Если $\mathbf{x}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)$, то $B(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu) = A(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu)$ и, повторяя доказательство достаточности теоремы 2 [1], получаем (П.14). Предположим теперь, что $\mathbf{x}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)$. Тогда в силу (7), (8) $B(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{p}_\nu) = \mathbf{x}_\nu = \mathbf{z}_\nu$ и имеет место (П.1). Если $I(a_\nu, \mathbf{x}_\nu) \leqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$, то, полагая в (П.17) $\mathbf{q}_\nu = \mathbf{y}_\nu$, $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{x}_\nu$, получаем

$$(\text{П}.18) \qquad \sum_{\tau=\nu+1}^{t+T} \rho^{\tau-\nu} [E_{\nu+1}^{t+T} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) - E_{\nu+1}^{\nu+T} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_\nu)] \leqslant 0.$$

Суммируя (П.18) с (П.1) и учитывая (П.5), получаем (П.14). Пусть теперь $I(a_\nu, \mathbf{x}_\nu) \geqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$. Тогда, полагая в (П.17) $\xi = t+T$, $\mu = \nu+T$, $\mathbf{q}_\nu = \mathbf{x}_\nu$, $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{y}_\nu$, имеем

$$(\text{П}.19) \qquad \sum_{\tau=t+T+1}^{\nu+T} \rho^{\tau-t} [E_{\nu+1}^{\nu+T} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) - E_{\nu+1}^{\nu+T} \tilde{\varphi}_\tau(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_\nu)] \geqslant 0.$$

Суммируя (П.15) и (П.19) и учитывая (П.5), вновь получаем (П.14).

2.2. *Прогрессивность по оценке.* Пусть $\mathbf{x}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)$. Тогда в силу (7), (10) $\mathbf{z}_\nu \in A(\mathbf{p}_\nu \subset W(\mathbf{p}_\nu)$, так что из-за (2), (3) $I(a_\nu, \mathbf{z}_\nu) \geqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$, если $\mathbf{y}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)/A(\mathbf{p}_\nu)$. Отсюда, полагая в (П.16) $\xi = \nu$, $\mu = t+T$, $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{z}_\nu$, $\mathbf{q}_\nu = \mathbf{y}_\nu$ и суммируя полученное неравенство с (П.2), с учетом (П.5) получаем (П.14). Пусть теперь $\mathbf{x}_\nu \in Y(\mathbf{p}_\nu)$. Тогда в силу (7), (10) $\mathbf{z}_\nu = \mathbf{x}_\nu$ и имеет место (П.9) Если $I(a_\nu, \mathbf{x}_\nu) \geqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$, то, полагая в (П.16) $\xi = \nu$, $\mu = t+T$, $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{x}_\nu$, $\mathbf{q}_\nu = \mathbf{y}_\nu$ и вычитая полученное неравенство из (П.9), получаем (П.14). Наконец, если $I(a_\nu, \mathbf{x}_\nu) \leqslant I(a_\nu, \mathbf{y}_\nu)$, то, полагая в (П.16) $\xi = t+T$, $\mu = \nu+T$, $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{y}_\nu$, $\mathbf{q}_\nu =$

$=\mathbf{x}_\nu$, имеем

$$(\Pi.20) \qquad \sum_{\tau=t+T+1}^{\nu+T} \rho^{\tau-\nu} [E_{\nu+1}^{\nu+T} \tilde{\varphi}_\tau (\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}_\nu) - E_{\nu+1}^{\nu+T} \tilde{\varphi}_\tau (\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_\nu)] \geqslant 0.$$

Теперь, суммируя (П.20) и (П.15), вновь получаем (П.14). Таким образом, (П.14) имеет место, если $\Sigma \in (\Pi \cap M)$. Далее, подставляя (П.14) в (П.17) и сравнивая полученное выражение с (П.4), получаем искомое уравнение (П.6) при любых ν, $t+1 \leqslant \leqslant \nu \leqslant t+T$. Полагая в (П.6) $\nu = t+1$ и учитывая определения (5), получаем (П.13) при любых $\mathbf{x}_t \in X_t$, $\mathbf{z}_t \in V(\Sigma, \mathbf{p})$, $\mathbf{y}_t \in Y(\mathbf{p})/V(\Sigma, \mathbf{p})$. Следовательно, согласно (6), (8), (11), (12), $R(\Sigma, \mathbf{p}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = V(\Sigma, \mathbf{p}) \subset B(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2 для краткости проведем лишь для случая АМФ, регрессивного по оценке. Зафиксируем a_t и $\mathbf{x}_t = \pi(a_t)$. Пусть $\zeta_t \in \theta$ таково, что $\mathbf{x}_t \equiv \equiv Y(a_t, \zeta_t)$. Тогда в силу (2) $a_{t+1}^* = I(a_t, \pi(a_t)) > I(a_t, \mathbf{z}_t)$, $\mathbf{z}_t \in W(\mathbf{p}_t)$, $\mathbf{p}_t = (a_t, \zeta_t)$. Кроме того, $B(\mathbf{x}_t, p_t) = A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$. В этом случае условия теоремы (14)–(17) полностью совпадают с условиями (20)–(22) теоремы 3 работы [1], откуда следует их необходимость и достаточность.

Рассмотрим теперь случай $\mathbf{x}_t \in Y(\mathbf{p}_t)$. Тогда $B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) = \mathbf{x}_t$ $\forall \mathbf{p}_t \in P$ и в силу (3) $a_{t+1}^* \leqslant I(a_t, \mathbf{z}_t)$, $\mathbf{z}_t \in W(\mathbf{p}_t)$. Докажем вначале необходимость, а затем и достаточность условий теоремы.

Необходимость. Рассмотрим $\mathbf{y}_t$, $\mathbf{y}_t' \in \bigcup_{\zeta_t \in \theta} A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$, такие, что $a_{t+1} > a_{t+1} \Rightarrow = I(a_t, \mathbf{y}_t) > I(a_t, \mathbf{y}_t') = a_{t+1}'$. Тогда, повторяя дословно рассуждения, приведенные в п. 1 доказательства теоремы 3 [1], получаем

$$(\Pi.21) \qquad f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = h(a_t, a_{t+1}) \uparrow a_{t+1}, \ a_{t+1} \leqslant a_{t+1}^*, \ \mathbf{y}_t \in B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t),$$

$$(\Pi.22) \qquad u(a_t, a_{t+1}) \uparrow a_{t+1}, \ a_{t+1} \leqslant a_{t+1}^*.$$

Пусть теперь $\mathbf{y}_t \in A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ таково, что $a_{t+1} = I(a_t, \mathbf{y}_t) > a_{t+1}^*$. В силу $\Sigma \in \Pi$ и (9) имеем

$$(\Pi.23) \qquad f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) < f(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t).$$

Следовательно, функция f убывает по a_{t+1} при $a_{t+1} > a_{t+1}^*$. Кроме того, она убывает по a_t. Наконец, при $\mathbf{y}_t' \in A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ имеем по определению $A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$

$$(\Pi.24) \qquad f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t'), \quad I(\mathbf{a}_t, \mathbf{y}_t) = I(a_t, \mathbf{y}_t').$$

Последнее равенство имеет место в силу $A(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) \subset W(\mathbf{p}_t)$. С учетом (П.24), (П.25) и $\mathbf{x}_t = \pi(a_t)$ имеем при $a_{t+1} > a_{t+1}^*$

$$(\Pi.25) \qquad f(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = h(a_t, a_{t+1}) < h(a_t, a_{t+1}^*) = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t).$$

Поскольку АМФ Σ – *правильный*, то по теореме 1 $V(\Sigma, \mathbf{p}_t) \subset B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) = \mathbf{x}_t$. Подставляя (П.21) и (П.25) в условия (10)–(12) теоремы 1, имеем с учетом определения (17)

$$(\Pi.26) \qquad V(\Sigma, \mathbf{p}_t) = \arg \max_{y_t \in \bigcup_{\zeta \in [b, \zeta_t]} A(\mathbf{x}_t, a_t, \zeta)} u(a_t, a_{t+1}) = \mathbf{x}_t.$$

Следовательно,

$$(\Pi.27) \qquad \arg \max_{a_{t+1} \in A_{t+1}} u(a_t, a_{t+1}) = a_{t+1}^*, \ a_{t+1} > a_{t+1}^*.$$

Объединяя (П.21) и (П.25), а также (П.22) и (П.27), получаем (16). На этом доказательство необходимости заканчивается.

Достаточность. В силу $a_{t+1}^* \leqslant I(a_t, \mathbf{z}_t)$, $\mathbf{z}_t \in W(\mathbf{p}_t)$ имеем, согласно (16), $\arg \max_{a_{t+1} \in A_{t+1}} u(a_t, a_{t+1}) = a_{t+1}^*$. С другой стороны, используя определение $V(\Sigma, \mathbf{p}_t)$ (11), (12) и условия (14)–(17), вновь получаем (П.26). Отсюда, учитывая, что $a_{t+1}^* = = I(a_t, \pi(a_t))$, имеем $V(\Sigma, \mathbf{p}_t) = \pi(a_t)$. Но $\pi(a_t) = \mathbf{x}_t = B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$, так что $V(\Sigma. \mathbf{p}_t) = = B(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ и выполняется условие (10) теоремы 1. Таким образом, АМФ Σ правилен в силу теоремы 1, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3. Как следует из теоремы 1, условие (22) необходімо и достаточно для того, чтобы имело место (8). Далее, используя определения (21) и (5), имеем $\hat{w}(\mathbf{x}_t) = E_{\zeta_t} M_t \hat{w}(x_t, y_t) = E_{\zeta_t} M_t v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = E_{\zeta_t} v(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$. Второе равенство имеет место в силу (П.13), а третье – в силу (22). Следовательно, $Q(\Sigma, X) = \operatorname{Arg}\max_{\mathbf{x}_t \in X} E_{\zeta_t} v(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$. Значит, $Q(\Sigma, X) \subset B(X)$ тогда и только тогда, когда имеет место (23). Отсюда, используя определение оптимального открытого АМФ, получаем требуемое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цыганов В. В.* Характеристика и оптимальность адаптивных механизмов // АиТ. 1988. № 10. С. 119–127.
2. *Бурков В. Н., Цыганов В. В.* Адаптивные механизмы функционирования активных систем. I. Активная идентификация и прогрессивность // АиТ. 1985. № 9. С. 87–94.

Поступила в редакцию
3.XII.1987

CORRECT ADAPTIVE MECHANISMS

TSYGANOV V. V.

An active system is taken up which includes a center and a far-sighted active element with a controllable stochastic model of constraints. The notion is introduced of correctness of adaptive functioning mechanisms, AFM, under uncertainty. The Problem is stated of optimal synthesis of a correct AFM. A characteristic function of AFM is derived which provides the necessary and sufficient conditions of correctness. The incentive procedure is synthesized in an optimal way in a correct AFM. The problems of above-board and challenge scheduling in an AFM are formulated and solved. The findings are illustrated for assuredly correct AFMs.