УДК 62-505.5

А. К. ЕНАЛЕЕВ, канд. техн. наук; Ю. Г. ЛАВРОВ

(Институт проблем управления, Москва)

ОПТИМАЛЬНОЕ СТИМУЛИРОВАНИЕ В АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Рассматривается модель активной системы со стохастическим активным элементом. Решается задача синтеза оптимальной функции стимулирования.

1. Введение

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования в работах по теории активных систем наиболее широко и детально исследована только для случая детерминированных активных систем при полной информированности центра о моделях активных элементов [1, 2]. Для активных систем в условиях случайных возмущений задача синтеза оптимальной функции стимулирования решена для довольно частного случая линейной функции затрат [3]. В этой работе также дается приближенное решение задачи определения оптимальной функции стимулирования при нелинейной функции затрат. В [4] рассматривается задача синтеза оптимальной стратегии центра для случая, когда множество выборов активного элемента зависит от случайного параметра.

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования в общей постановке представляет собой нестандартную задачу поиска экстремума некоторого функционала, зависящего от искомой функции и от фазовых состояний системы, когда фазовые состояния системы сами определяются в результате решения экстремальной задачи, также зависящей от искомой функции.

В предлагаемой статье дается решение этой задачи путем сведения ее к классической задаче оптимального управления и затем использования принципа максимума Понтрягина.

2. Модель активной системы и постановка задачи

Пусть система состоит из управляющего элемента (центра) и одного активного элемента (АЭ). АЭ представляет собой модель некоторого социально-экономического объекта, эффективность функционирования которого оценивается показателем x, $x\geqslant 0$. Например, в качестве x может быть выбран показатель объема выпускаемой продукции или какой-либо комплексный показатель эффективности работы АЭ. Целевая функция АЭ имеет вид

$$f(x, r)=\sigma(x)-\zeta(x, r),$$

где $\sigma(x)$ — функция стимулирования, устанавливаемая центром, а $\zeta(x, r)$ — функция затрат активного элемента при реализации значения x показателя эффективности. Здесь r — случайный параметр, характеризующий производственные возможности АЭ. При помощи рассмотрения функции затрат, зависящий от параметра r, моделируется влияние на объект (активный элемент) случайных внешних возмущений.

Предполагается, что $r \in [\varepsilon, M]$, где $M > \varepsilon > 0$, $x \in X(r)$, где $X(r)$ — множество, определяемое ниже.

Целевую функцию центра обозначим $f^0 = f^0(x, \sigma(x))$.

Примем следующий порядок функционирования активной системы. Сначала центр устанавливает функцию стимулирования $\sigma(\cdot)$, зная функцию распределения $F(r)$ случайной величины r. Затем реализуется значение параметра r и АЭ при заданной функции стимулирования выбирает значение показателя эффективности x, уже зная реализовавшееся значение параметра r. Выбор активным элементом показателя $x = x(r)$ определяется из условия максимизации его целевой функции

$$x(r) \in \operatorname{Arg} \max_{z \in X(r)} f(z, r). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь в общей постановке задачу синтеза оптимальной функции стимулирования $\sigma(x)$. Эта задача формируется следующим образом: на некотором заданном классе функций G определить функцию $\sigma = \sigma(x)$, для которой математическое ожидание целевой функции центра максимально, при условии, что выбор активным элементом значения показателя $x = x(r)$ определяется выражением (1), т. е.

$$J(\sigma) = \max_{\sigma^0 \in G} \int_{\varepsilon}^{M} \inf_{x(r) \in \widetilde{X}(r)} f^0(x(r), \sigma^0(x(r)))\, dF(r), \tag{2}$$

где

$$x(r) \in \widetilde{X}(r) = \operatorname{Arg} \max_{z \in X(r)} (\sigma^0(z) - \zeta(z, r)). \tag{3}$$

Заданием целевой функции f^0, функции затрат $\zeta(x, r)$, функции распределения $F(r)$ и класса функций стимулирования выделяется конкретная задача синтеза. Приведенные ниже предположения как раз конкретизируют рассматриваемую задачу.

1°. Множество G функций стимулирования $\sigma(x)$ состоит из всех дважды кусочно-дифференцируемых функций, определяемых на $[0, \infty)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \sigma(x) \leqslant g$, где g — «фонд» стимулирования.

2°. $F(r)$ — абсолютно непрерывная функция распределения; $F(M) = 1$, $F(\varepsilon) = 0$, где $M > \varepsilon > 0$.

3°. Функция затрат $\zeta(x, r)$ имеет следующую область определения: $\varepsilon \leqslant r \leqslant M$, $x \in X(r) = [0, x^*(r))$, $x^*(r)$ — неубывающая функция r, в частности может быть $x^*(r) = \infty$. Предполагается, что $\forall r \in [\varepsilon, M]$, $\zeta(x^*(r), M) > g$.

4°. Функция затрат $\zeta(x, r)$ дважды непрерывно дифференцируема по любой из переменных $\zeta(0, r) = 0$, $\dot{\zeta}_x(x, r) > 0$, $\dot{\zeta}_r(x, r) < 0$, $\ddot{\zeta}_{xx}(x, r) > 0$, $\ddot{\zeta}_{xr}(x, r) < 0$ при $x > 0$, $r > 0$. Примерами таких функций затрат являются: $\zeta = -\ln(1 - x/r)$, $\zeta = {}^1/_2 (x/r)^2$ и другие.

5°. $f^0(x, \sigma) = \varphi(x) - \alpha\sigma(x)$, где $\varphi(x)$ — неубывающая дифференцируемая функция, $\varphi(0) = 0$, $\alpha > 0$.

3. Синтез функции стимулирования как решение задачи оптимального управления

Сведем задачу синтеза оптимальной функции стимулирования (2), (3) к классической задаче оптимального управления, для которой применим принцип максимума Понтрягина.

Сначала сформулируем несколько вспомогательных утверждений, доказательства которых приводятся в приложении.

Рассмотрим функцию стимулирования $\sigma^1(x)$, такую, что при некотором значении r_1 параметра r имеет место

$$\sigma^1(x_1)-\zeta(x_1,r_1)=\sigma^1(x_2)-\zeta(x_2,r_1)=\max_{x\in X(r)}[\sigma^1(x)-\zeta(x,r_1)]=M^0,\ x_1<x_2,$$

а также функцию стимулирования $\sigma^2(x)$, такую, что

$$\sigma^2(x)=\begin{cases}\sigma^1(x), & \text{если} \quad x\notin[x_1,x_2],\\ \zeta(x,r_1)+M^0, & \text{если} \quad x\in[x_1,x_2].\end{cases}$$

Лемма 1. $J(\sigma^1)=J(\sigma^2)$.

Рассмотрим функцию стимулирования $\sigma^3(x)$, такую, что $\exists x_1,\ x_2,\ \forall x\in\in[x_1,x_2]$: $\sigma^3(x_1)\geqslant\sigma^3(x)$, и функцию

$$\sigma^4(x)=\begin{cases}\sigma^3(x), & \text{если} \quad x\notin[x_1,x_2],\\ \sigma^3(x_1), & \text{если} \quad x\in[x_1,x_2].\end{cases}$$

Лемма 2. $J(\sigma^3)=J(\sigma^4)$.

Следствие. Оптимальная функция стимулирования содержится в классе неубывающих функций.

Лемма 3. Для любой кусочно-непрерывной функции $\sigma^5(x)$ найдется непрерывная функция $\sigma^6(x)$, такая, что $J(\sigma^5)\leqslant J(\sigma^6)$.

Из лемм 2 и 3 следует, что оптимальная функция стимулирования на классе дважды кусочно-дифференцируемых функций содержится в классе неубывающих, непрерывных, дважды кусочно-дифференцируемых функций. Поэтому дальше будет предполагаться непрерывность и неубывание функций $\sigma(x)$.

Проведем ряд преобразований задачи (2) и (3).

Необходимое условие экстремума в задаче выбора активным элементом показателя (1) для непрерывной кусочно-дифференцируемой функции $f(x,r)=\sigma(x)-\zeta(x,r)$ записывается в следующем виде.

Если для заданного r имеет место

(4) $\qquad \forall y\colon \sigma(y)<\zeta(y,r)$,

то

(5) $\qquad x(r)=0$;

в противном случае существует выбор $x(r)\neq 0$, определяемый условием

(6) $\qquad \zeta_x(x,r)\in\partial\sigma(x)$,

где ∂ обозначает знак субдифференциала.

Таким образом, при поиске решения задачи (2), (3) можно использовать решение задачи (2), (4), (5), (6).

Проведем дальнейшие преобразования условий (4), (5), (6). Для этого исследуем вопрос с разрешимости зависимости, заданной соотношениями (4), (5), (6) относительно r.

В приложении приводится доказательство следующей леммы.

Лемма 4. Если затраты ζ имеют вид $\zeta=\zeta^0(x/r)$, где $\zeta^0(\cdot)$ — выпуклая, возрастающая дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на полуинтервале $[0,\ a)$ (здесь a — положительно число, возможен случай $a=\infty$) [1], то

[1] Требование того, чтобы функция затрат имела вид $\zeta=\zeta^0(x/r)$, связано только с тем, что в этом случае достаточно просто доказывается лемма 4. По-видимому, это имеет место и при более слабых требованиях на функцию затрат $\zeta=\zeta(x,\ r)$.

1) неявная функция, заданная соотношениями (4)—(6), глобально разрешима относительно r при всех $0 \leqslant x \leqslant x^M$, за исключением, быть может, конечного числа точек $x=x_i$, $i=1,\ldots,I$, в которых функция $\sigma(x)$ недифференцируема, а также за исключением точки $x=x_0=0$; здесь x^M определяется условиями (4)—(6) при $r=M$;

2) функция $r=\tilde{r}^0(x, \partial\sigma(x))$, являющаяся решением соотношений (4)—(6), не убывает по x;

3) функция $x=\tilde{x}(r)$, обратная для функции $\tilde{r}^0(x, \partial\sigma(x))$, является неубывающей по r и однозначной, за исключением, быть может, счетного числа точек.

Пусть в точках x, где $\sigma(x)$ дифференцируема, $u(x)=\dot{\sigma}(x)$, а в точках x_i, $i=0, 1,\ldots, I$ функция $u(x_i)$ равна производной слева функции $\sigma(x)$.

Обозначим

$$\tilde{r}(x,u)=\begin{cases} \tilde{r}^0(x,u), & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant x^M,\\ M, & \text{если} \quad x>x^M.\end{cases}$$

Пусть справедлива лемма 4, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Решение задачи (2), (3) для $f^0(x, \sigma)=\varphi(x)-\alpha\sigma(x)$, $G=\{\sigma(x)\,|\,0\leqslant\sigma(x)\leqslant g,\ 0\leqslant x<\infty\}$ является также решением задачи оптимального управления:

$$J(\sigma)=\min_{u=u(x)}\int_0^\infty [F(\tilde{r}(x,u))-1][\dot{\varphi}(x)-\alpha u]\,dx, \tag{7}$$

$$0\leqslant\int_0^\infty u(x)\,dx\leqslant g, \tag{8}$$

где $u(x)=\dot{\sigma}(x)$.

Доказательство теоремы 1 приводится в приложении.

Для решения задачи (7), (8) можно использовать принцип максимума Понтрягина. Гамильтониан для этой задачи имеет вид

$$H(x,u,\lambda)=[1-F(\tilde{r}(x,u))][\dot{\varphi}(x)-\alpha u]-\lambda u.$$

Оптимальное управление $u(x, \lambda)$ определяется из условия максимума функции H по u, где параметр $\lambda=\lambda(g)\geqslant 0$ вычисляется из условия (8), т. е. из решения уравнения

$$\int_0^\infty u(x,\lambda)\,dx=g.$$

Оптимальная функция стимулирования определяется по формуле

$$\sigma(x)=\int_0^x u(t,\lambda(g))\,dt.$$

Для вычисления по этой формуле оптимальной функции стимулирования необходимо иметь зависимости $u(t, \lambda)$ и $\lambda=\lambda(g)$. Исследуем свойства этих зависимостей, которые могут оказаться полезными при вычислении оптимальной функции стимулирования.

Теорема 2. 1) Оптимальное управление $u=u(x, \lambda)$ является невозрастающей функцией по параметру λ. 2) Зависимость $\lambda=\lambda(g)$ является убывающей по g.

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

Свойство монотонности функции $\lambda(g)$ позволяет строить итерационные алгоритмы вычисления оптимального управления по следующей схеме.

Фиксируется $\lambda>0$ и из условия максимума функции $H(x, u, \lambda)$ по u определяется $u(x, \lambda)$. Если $\int_0^\infty u(x,\lambda)\,dx>g$, то на следующей итерации алгоритма λ увеличивается на некоторую достаточно малую величину; если же $\int_0^\infty u(x,\lambda)\,dx<g$, то λ уменьшается. После этого процедура повторяется для вновь полученного значения показателя λ до тех пор, пока условие (8) не будет выполняться с достаточной точностью. Полученные на последней итерации λ и $u(x, \lambda)$ являются решением задачи (7), (8).

Рассмотрим решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования на примере.

Пусть функция затрат равна $\zeta(x, r)=-\ln(1-x/r)$, целевая функция центра равна $f^0(x, \sigma)=x$, а случайная величина r равномерно распределена на отрезке $[d, D]$. В этом случае $\tilde r(x, u)=x+1/u$. Из условия максимума гамильтониана $H=1-F(x+1/u)-\lambda u$, где F — функция равномерного распределения, получим

$$\sigma(x)=\begin{cases} -\ln\left(1-\dfrac{x}{d}\right), & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant d-\beta(\lambda),\\ \dfrac{x}{\beta(\lambda)}-\ln\dfrac{\beta(\lambda)}{d}, & \text{если} \quad d-\beta(\lambda)\leqslant x\leqslant D-2\beta(\lambda),\\ g, & \text{если} \quad D-2\beta(\lambda)\leqslant x<\infty. \end{cases}$$

Здесь $\beta(\lambda)=\sqrt{(D-d)\lambda}$.

Видим, что решение задачи состоит из трех «режимов». При определенных соотношениях параметров d, D, g первый или второй режимы могут отсутствовать.

4. Заключение

Основной результат статьи — это сведение задачи (2), (3) к задаче оптимального управления (7), (8), для которой методы решения известны. Решение конкретных примеров этой задачи показывает, что полученные результаты могут быть использованы при проведении качественного и, в отдельных случаях, количественного анализа систем стимулирования в экономике.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Покажем, что если максимум функции $f(x, r_1)=\sigma(x)-\zeta(x, r_1)$ при некотором r_1 достигается в точках x_1 и x_2, $x_1<x_2$, то при любом $r\neq r_1$ в точке $x'\in(x_1, x_2)$ не может достигаться максимум функции $f(x, r)$.

Предположим противное, т. е. существуют такие, что

(П.1) $\quad \forall x\in X(r): \sigma(x')-\zeta(x', r)\geqslant\sigma(x)-\zeta(x, r).$

Условие достижения максимума функции $f(x, r_1)$ в точках x_1 и x_2 имеет вид

(П.2) $\quad \forall x\in X(r): \sigma(x_1)-\zeta(x_1, r_1)=\sigma(x_2)-\zeta(x_2, r_1)\geqslant\sigma(x)-\zeta(x, r_1).$

Из (П.1) и (П.2) следует, что

$$\text{(П.3)}\qquad \begin{aligned}&\zeta(x_1, r)-\zeta(x', r)\geqslant\zeta(x_1, r_1)-\zeta(x', r_1),\\ &\zeta(x_2, r)-\zeta(x', r)\geqslant\zeta(x_2, r_1)-\zeta(x', r_1).\end{aligned}$$

Перепишем (П.3) в виде

$$\text{(П.4)}\qquad \int\limits_{x_1}^{x'}\dot\zeta_x(x, r)\,dx\leqslant\int\limits_{x_1}^{x'}\dot\zeta_x(x, r_1)\,dx,$$

$$\text{(П.5)}\qquad \int\limits_{x'}^{x_2}\dot\zeta_x(x, r)\,dx\geqslant\int\limits_{x'}^{x_2}\dot\zeta_x(x, r_1)\,dx.$$

Из $\ddot\zeta_{xr}(x, r)<0$ следует, что

$$\text{(П.6)}\qquad \dot\zeta_x(x, r)>\dot\zeta_x(x, r_1),\ \text{если}\ r_1>r,$$

$$\text{(П.7)}\qquad \dot\zeta_x(x, r)<\dot\zeta_x(x, r_1),\ \text{если}\ r_1<r.$$

Неравенство (П.6) противоречит неравенству (П.4), а неравенство (П.7) противоречит неравенству (П.5). Таким образом, приведенное выше утверждение доказано.

Заметим, что функции $\sigma^1(x)$ и $\sigma^2(x)$ совпадают одна с другой на всей области определения, за исключением отрезка $[x_1, x_2]$. Заметим также, что максимум функции $f^2(x, r_1)=\sigma^2(x)-\zeta(x, r_1)$ достигается на всем отрезке $[x_1, x_2]$. Из доказанного выше утверждения следует, что при $r\neq r_1$ точки максимума целевых функций $f^1(x, r)=\sigma^1(x)-\zeta(x, r)$ и $f^2(x, r)=\sigma^2(x)-\zeta(x, r)$ не принадлежат отрезку $[x_1, x_2]$. Но поскольку вне $[x_1, x_2]$ функции $\sigma^1(x)$ и $\sigma^2(x)$ совпадают, то совпадают и точки максимумов функций $f^1(x, r)$ и $f^2(x, r)$, где $r\neq r_1$. Отсюда следует $J(\sigma^1)=J(\sigma^2)$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим функцию $\sigma(x)$, такую, что $\sigma(x)=\sigma^4(x)$ при $x\notin[x_1, x_2]$ и $\sigma(x)\leqslant\sigma^4(x)$ при $x\in[x_1, x_2]$, где $x_1<x_2$. Покажем, что точка максимума x^* функции $f(x, r)=\sigma(x)-\zeta(x, r)$ не принадлежит (x_1, x_2). Предположим противное, $x^*\in(x_1, x_2)$, тогда получим противоречивое неравенство $\sigma(x^*)-\zeta(x^*, r)\geqslant\sigma(x_1)-\zeta(x_1, r)$, так как $\sigma(x^*)\leqslant\sigma(x_1)$ по определению функции $\sigma(x)$, а $\zeta(x^*, r)>\zeta(x_1, r)$ в силу монотонности функции затрат. Таким образом, $x^*\in(x_1, x_2)$. Следовательно, $J(\sigma)=J(\sigma^4)$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть $\sigma^5(x)$ – неубывающая функция. В противном случае всегда, согласно лемме 2, можно найти неубывающую функцию, имеющую не меньшую эффективность.

Пусть $\sigma^5(x)$ претерпевает разрыв 1-го рода в точке $x^*>0$. Случай $x^*=0$ будет рассмотрен ниже. Обозначим через $\Delta\sigma^5$ величину изменения функции $\sigma^5(x)$ в точке x^*.

Покажем, что существует окрестность $(x^*-\delta, x^*)$, такая, что ни при одном допустимом значении $r\in(\varepsilon, M)$ точка максимума функции $f^5(x, r)=\sigma^5(x)-\zeta(x, r)$ не принадлежит области $(x^*-\delta, x^*)$. Выберем δ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\text{(П.8)}\qquad \dot\zeta_x(x^*, \varepsilon)\delta<\Delta\sigma^5$$

и $\delta<x^*$, где ε – наименьшее допустимое значение параметра r. Предположим противное, т. е.

$$\exists x'\in(x^*-\delta, x^*),\quad \exists r\in[\varepsilon, M],\quad \forall x:\sigma^5(x')-\zeta(x', r)\geqslant\sigma^5(x)-\zeta(x, r),$$

а значит,

$$\text{(П.9)}\qquad \sigma^5(x')-\zeta(x', r)\geqslant\sigma^5(x^*)-\zeta(x', r).$$

Из монотонности функции $\sigma^5(x)$ следует, что

$$\text{(П.10)}\qquad \sigma^5(x')\leqslant\sigma^5(x^*)-\Delta\sigma^5.$$

Из суммы (П.9) и (П.10) следует $\zeta(x^*, r)-\zeta(x', r)\geqslant\Delta\sigma^5$, т. е. $\int\limits_{x'}^{x^*}\dot\zeta_x(x, r)\,dx\geqslant\Delta\sigma^5$.

Из $\ddot{\zeta}_{xr}(x, r)<0$ и $\ddot{\zeta}_{xx}(x, r)>0$ следует, что $\dot{\zeta}_x(x', r)<\dot{\zeta}_x(x^*, \varepsilon)$. Тогда

$$\int_{x'}^{x^*} \dot{\zeta}_x(x_*, \varepsilon)\,dx > \int_{x'}^{x^*} \dot{\zeta}_x(x, r)\,dx \geqslant \Delta\sigma^5$$

или

$$\dot{\zeta}_x(x^*, \varepsilon)\,(x^*-x')>\Delta\sigma^5. \tag{П.11}$$

Очевидно, что (П.11) противоречит (П.8), так как $x^*-x'<\delta$. Таким образом, существует окрестность $(x^*-\delta, x^*)$, на которой не достигается максимум функции $f^5(x, r)$ ни при одном допустимом r.

Рассмотрим функцию

$$\sigma^6(x)=\begin{cases} \sigma^5(x), & \text{если} \quad x\notin(x^*-\delta, x^*),\\ \dfrac{\sigma^5(x^*+0)-\sigma^5(x^*-\delta)}{\delta}(x-x^*)+\sigma^5(x^*+0), & \text{если} \quad x\in(x^*-\delta, x^*), \end{cases}$$

непрерывную на отрезке $[x^*-\delta, x^*]$. Заметим, что $\sigma^5(x^*+0)-\sigma^5(x^*-\delta)\geqslant\Delta\sigma^5$ в силу монотонности функции $\sigma^5(x)$. Следовательно, на интервале $(x^*-\delta, x^*)$: $\dot{\sigma}^6(x)\geqslant \geqslant\Delta\sigma^5/\delta>\dot{\zeta}_x(x, \varepsilon)>\dot{\zeta}_x(x, r)$. Отсюда следует, что максимум функции $f^6(x, r)=\sigma^6(x)-\zeta(x, r)$ не достигается на $(x^*-\delta, x^*)$. Поскольку на остальной области определения функции $\sigma^5(x)$ и $\sigma^6(x)$ совпадают, то $J(\sigma^5)=J(\sigma^6)$. Аналогично рассматриваются все точки разрыва функции $\sigma^5(x)$.

Рассмотрим теперь точку разрыва $x^*=0$, считая, что в остальных точках σ^5 непрерывна. Отметим, что оптимальная функция стимулирования в точке $x^*=0$ принимает значение $\sigma(x^*)=0$. Пусть $\sigma(0)\neq0$. Очевидно, что выборы активным элементом стратегии $x(r)$ при любом допустимом r для функции стимулирования $\sigma(x)$ и $\sigma'(x)=\sigma(x)-\sigma(0)\geqslant0$ совпадают. Поэтому далее будем считать, что $\sigma^5(0)=0$. Поскольку $\zeta(0, \varepsilon)=0$, $\lim\limits_{x\to+0}\sigma^5(x)=\Delta\sigma^5(0)>0$, $\sigma^5(x)\leqslant g$, $\zeta(x^*(\varepsilon), \varepsilon)>g$, функция $\zeta(x, \varepsilon)$ непрерывна, $\sigma^5(x)$ непрерывна при $x>0$, то существует хотя бы одна точка x', в которой $\zeta(x', \varepsilon)=\sigma^5(x')$. Пусть x' – минимальная из таких точек. Определим функцию $\sigma^6(x)$ следующим образом: $\sigma^6(x)=\zeta(x, \varepsilon)$ при $0\leqslant x\leqslant x'$ и $\sigma^6(x)=\sigma^5(x)$ при $x>x'$. Покажем, что $J(\sigma^6)>J(\sigma^5)$. Заметим, что по построению $\sigma^6(x)\leqslant\sigma^5(x)$. Если при функции стимулирования $\sigma^5(x)$ выбор $x(r)$ таков, что $x(r)\geqslant x'$, то в силу $\sigma^6(x)\leqslant\sigma^5(x)$ для всех $0\leqslant x\leqslant x'$ выбор при функции стимулирования $\sigma^6(x)$ остается тем же. Если же при функции стимулирования $\sigma^5(x)$ выбор $x(r)$ таков, что $x(r)<x'$, то в силу свойств 4° функции затрат выбор при использовании функции $x^6(x)$ будет равным x'. Так как $\varphi(x)$ – возрастающая функция, то $J(\sigma^6)\geqslant J(\sigma^5)$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 4. Рассмотрим вопрос о разрешимости относительно r неявной функции $\Phi(x, r, \partial\sigma(x))=\dot{\zeta}_x(x, r)-u(x)-t=0$, где t – одно из значений субдифференциала $\partial\sigma(x)$. Уравнение

$$\dot{\zeta}_x(x, r)=u(x)+t \tag{П.12}$$

имеет хотя бы одно решение r^* при некоторых значениях $x^*\neq0$, t^*. Так как $\ddot{\zeta}_{xr}(x, r)< <0$, то уравнение (П.12) локально разрешимо в окрестности точки (x^*, t^*). Если $\zeta(x, r)=\zeta^0(x, r)$, то уравнение (П.12) глобально разрешимо:

$$r=\frac{x}{\mu[x(u(x)+t)]}, \tag{П.13}$$

где $\mu[\cdot]$ – функция, обратная для функции $\nu(x/r)=\dot{\zeta}_x^0(x/r)x$. Функция $\nu(x/r)$ глобально обратима, поскольку $\dot{\nu}_s(s)=\zeta_{ss}^0s+\zeta_s^0(s)>0$ при $s=x/r>0$. Пункт 1 леммы доказан.

Покажем, что $\tilde{r}(x, \partial\sigma(x))$ – неубывающая функция, т. е. если $x_1<x_2$, то $r_1= =\tilde{r}(x_1, t_1(x_1))<r_2=\tilde{r}(x_2, t_2(x_2))$, где $t_1(x_1)$ и $t_2(x_2)$ – некоторые значения субдифференциала в точках x_1 и x_2 соответственно.

Предположим противное, т. е. из $x_1<x_2$ следует $r_1>r_2$. Из $\sigma(x_1)-\zeta(x_1, r_1)> >\sigma(x_2)-\zeta(x_2, r_1)$ и $\sigma(x_2)-\zeta(x_2, r_2)>\sigma(x_1)-\zeta(x_1, r_2)$ получим $\zeta(x_2, r_1)-\zeta(x_1, r_1)>$

$>\zeta(x_2, r_2)-\zeta(x_1, r_2)$. Отсюда следует

$$\int_{x_1}^{x_2}[\dot{\zeta}_x(x, r_1)-\dot{\zeta}_x(x, r_2)]\,dx>0. \tag{П.14}$$

Но из $\overset{\bullet\bullet}{\zeta}_{xr}(x, r)<0$ следует, что

$$\dot{\zeta}_x(x, r_1)-\dot{\zeta}_x(x, r_2)<0 \quad \text{для } r_1>r_2. \tag{П.15}$$

Но (П.15) противоречит (П.14), следовательно, $\tilde{r}(x, \partial\sigma(x))$ – неубывающая функция. Пункт 2 леммы доказан.

Пусть x_1 и x_2 таковы, что $r^*=\tilde{r}(x_1, u(x_1))=\tilde{r}(x_2, u(x_2))$. Тогда из леммы 1 следует, что существует функция стимулирования σ' не меньшей эффективности по сравнению с исходной, для которой $\tilde{r}(x, u'(x))=r^*$ при всех $x\in[x_1, x_2]$. Определим $[\underline{x}_1, \bar{x}_2]$, где $\underline{x}_1=\inf x$, $\bar{x}_2=\sup x$ по всем x, для которых $\tilde{r}(x, u'(x))=r^*$. В результате получаем интервал $(\underline{x}_1, \bar{x}_2)$, на котором $\tilde{r}$ постоянна. Определим все такие интервалы. Очевидно, что их не более чем счетное число. Следовательно, функция, обратная к $\tilde{r}$, неоднозначна не более чем в счетном числе точек. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функцию $\tilde{r}(x, \partial\sigma(x))$ и обратную к ней $\tilde{x}(r)$. Множество определения функции $\tilde{x}(r)$ обозначим Ω, а множество ее значений – X. Из лемм 1 и 4 следует, что для решения исходной задачи (2), (3) достаточно рассмотреть такие функции стимулирования $\sigma(x)$, при которых $\tilde{x}(r)$ такова, что X – связное множество.

Определим следующие подмножества множества Ω: Ω_1 – подмножество интервалов $(r_j{}^{\text{н}}, r_j{}^{\text{в}})$, на которых функция $\tilde{x}(r)$ непрерывна и строго монотонно возрастает, $j=1,\ldots,J_1$; Ω_2 – подмножество интервалов $(r_k{}^{\text{н}}, r_k{}^{\text{в}})$, на которых функция $\tilde{x}(r)$ постоянна, $k=1, \ldots, K$; $\Omega_3=\Omega\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$. Отметим, что Ω_3 по лемме 4 состоит из не более чем счетного числа точек r_n, $n=1,\ldots,N$, а множества Ω_1 либо Ω_2, вообще говоря, могут быть пустыми. Аналогично введем подмножества значений функции $\tilde{x}(r)$: $X_1=\tilde{x}(\Omega_1)$; $X_2=\tilde{x}(\Omega_2)$; $X_3=\tilde{x}(\Omega_3)$. Заметим, что X_1 – это множество интервалов $(x_j{}^{\text{н}}, x_j{}^{\text{в}})$, где $x_j{}^{\text{н}}=\tilde{x}(r_j{}^{\text{н}}+0)$, $x_j{}^{\text{в}}=\tilde{x}(r_j{}^{\text{в}}-0)$; X_2 – множество, состоящее не более чем из счетного числа точек x_k, $k=1,\ldots,K$; X_3 – это множество отрезков $[x_n{}^{\text{н}}, x_n{}^{\text{в}}]$, где $x_n{}^{\text{н}}=\tilde{x}(r_n-0)$, $x_n{}^{\text{в}}=\tilde{x}(r_n+0)$. Отметим также, что $r_k{}^{\text{н}}=\tilde{r}(x_k-0, u(x_k-0))$, $r_k{}^{\text{в}}=\tilde{r}(x_k+0, u(x_k+0))$, $r_j{}^{\text{н}}=\tilde{r}(x_j{}^{\text{н}}+0, u(x_j{}^{\text{н}}+0))$, $r_j{}^{\text{в}}=\tilde{r}(x_j{}^{\text{в}}-0, u(x_j{}^{\text{в}}-0))$, $r_n=\tilde{r}(x_n{}^{\text{н}}+0, u(x_n{}^{\text{н}}+0))=$ $=\tilde{r}(x_n{}^{\text{в}}-0, u(x_n{}^{\text{в}}-0))$.

Сравним две величины: $I=\int\limits_{\Omega}[\varphi(x(r))-\alpha\sigma(x(r))]\,d[F(r)-1]$ и $J=\int\limits_{X}[F(\tilde{r}(x, u(x)))-1][\dot{\varphi}(x)-\alpha u(x)]\,dx$. Заметим, что соответствующие интегралы на подмножествах Ω_3 и X_2 равны нулю, так как мера множеств Ω_3 и X_2 равна нулю.

Используя свойства функций $\tilde{r}(x, u)$, $x(r)$, интегрируя по частям и производя замену переменных на подмножествах Ω_1 и X_1, перепишем выражения для I и J в следующем виде:

$$I=\sum_{j=1}^{J_1}[\varphi(x_j^{\text{в}})-\alpha\sigma(x_j^{\text{в}})][F(r_j^{\text{в}})-1]-\sum_{j=1}^{J_1}[\varphi(x_j^{\text{н}})-\alpha\sigma(x_j^{\text{н}})][F(r_j^{\text{н}})-1]+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}[\varphi(x_k)-\alpha\sigma(x_k)][F(r_k^{\text{в}})-1]-\sum_{k=1}^{K}[\varphi(x_k)-\alpha\sigma(x_k)][F(r_k^{\text{н}})-1]-$$

$$-\sum_{j=1}^{J_1}\int_{x_j^{\text{н}}}^{x_j^{\text{в}}}[F(\tilde{r}(x, u(x)))-1][\dot{\varphi}(x)-\alpha u(x)]\,dx,$$

$$J=\sum_{n=1}^{N}[F(r_n)-1][\varphi(x_n^{\text{в}})-\alpha\sigma(x_n^{\text{в}})]-\sum_{n=1}^{N}[F(r_n)-1]\times$$

$$\times[\varphi(x_n^{\text{н}})-\alpha\sigma(x_n^{\text{н}})]+\sum_{j=1}^{J_1}\int_{x_j^{\text{н}}}^{x_j^{\text{в}}}[F(\tilde{r}(x, u(x)))-1][\dot{\varphi}(x)-\alpha u(x)]\,dx.$$

Обозначим $B(x)=[\varphi(x)-\alpha\sigma(x)][F(\tilde r(x, u(x)))-1]$ и рассмотрим величину $I+J$. После сокращений и переобозначений получим

$$I+J=\sum_{j=1}^{J_1}[B(x_j^{\text{в}}-0)-B(x_j^{\text{н}}+0)]+\sum_{k=1}^{K}[B(x_k+0)-B(x_k-0)]+$$
$$+\sum_{n=1}^{N}(B(x_n^{\text{в}}-0)-B(x_n^{\text{н}}+0)].$$

Из определения множеств Ω_1, Ω_2, Ω_3 и соответственно множеств X_1, X_2, X_3 следует, что $X=X_1\cup X_2\cup X_3$. При этом точки $x_j^{\text{н}}$, $x_j^{\text{в}}$, x_k, $x_n^{\text{н}}$, $x_n^{\text{в}}$, где $j=1,\ldots,J_1$, $k=1,\ldots,K$, $n=1,\ldots,N$, разбивают связное множество X на систему не более чем счетного числа интервалов и отрезков. Отметим, что поскольку указанные точки являются границами соответствующих смежных интервалов или отрезков, то среди них имеются точки, которые совпадают. Упорядочим указанные точки по возрастанию и обозначим их x_i, $i=1, 2,\ldots$ Запишем величину $I+J$: $I+J=\sum_i \Delta B(x_i)+B(x^M)-B(x^0)$,

где $i=1, 2,\ldots$ Нетрудно видеть, что $\Delta B(x_i)=B(x_i-0)-B(x_i+0)=0$, если $\exists j$, n такие, что $x_i=x_j^{\text{н}}=x_n^{\text{в}}$ либо $x_i=x_j^{\text{в}}=x_n^{\text{н}}$, а также $\Delta B(x_i)=B(x_i-0)+B(x_i+0)-B(x_i-0)-B(x_i+0)$, если $\exists j$, k, n такие, что $x_i=x_j^{\text{в}}=x_k=x_n^{\text{н}}$ либо $x_i=x_n^{\text{в}}=x_k=x_j^{\text{н}}$, либо $\exists j_1$, j_2, k такие, что $x_i=x_{j_1}^{\text{в}}=x_k=x_{j_2}^{\text{н}}$, либо $\exists n_1$, n_2, k такие, что $x_i=x_{n_1}^{\text{в}}=x_k=x_{n_2}^{\text{н}}$; $B(x^0)=\lim_{\delta\to 0} B(x(\delta))$. Заметим, что $B(x^M)=B(x(M))=[\varphi(x^M)-\alpha\sigma(x^M)][F(M)-1]=0$,

так как $F(M)=1$. Величина $B(x^0)$ также равна нулю. Действительно, как показано в доказательстве леммы 3, $\sigma(0)=0$ и при всех $x>0$ $\sigma(x)<\zeta(x, \delta)$, если $\delta<\varepsilon$. Тогда из (4), (5) следует $x(\delta)=0$. Из того, что $\varphi(0)=0$ и $\sigma(0)=0$, получаем $B(x^0)=B(0)=0$. Отсюда следует, что $I+J=0$. Так как при $x\geqslant x^M$ имеют место $F(\tilde r(x, u)=1$, то

$J=\int_0^\infty [F(\tilde r(x, u(x)))-1][\varphi(x)-\alpha u(x)]dx$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим гамильтониан $H(x, u, \lambda)$ при двух различных значениях параметра $\lambda=\lambda'\neq 0$ и $\lambda=\lambda''\neq 0$, $\lambda'<\lambda''$. Из условия оптимальности управлений $u(x, \lambda)$ и $u(x, \lambda'')$ следует, что

$$H(x, u(x, \lambda'), \lambda')\geqslant H(x, u(x, \lambda''), \lambda'),$$
$$H(x, u(x, \lambda''), \lambda'')\geqslant H(x, u(x, \lambda'), \lambda'').$$

Складывая эти неравенства, получим

$$H(x, u(x, \lambda'), \lambda)-H(x, u(x, \lambda'), \lambda'')\geqslant H(x, u(x, \lambda''), \lambda')-$$
$$-H(x, u(x, \lambda''), \lambda'').$$

Отсюда, подставляя выражения для $H(x, u, \lambda)$, получим

$$\lambda''u(x, \lambda')-\lambda'u(x, \lambda')\geqslant\lambda''u(x, \lambda'')-\lambda'u(x, \lambda''),$$

т. е. $u(x, \lambda')\geqslant n(x, \lambda'')$. Пункт 1 теоремы доказан.

Пусть $0<\lambda'<\lambda''$. Рассмотрим следующие величины:

$$g(\lambda')=\int_0^\infty u(x, \lambda')\,dx \quad \text{и} \quad g(\lambda'')=\int_0^\infty u(x, \lambda'')\,dx.$$

Из того, что $u(x, \lambda')\geqslant u(x, \lambda'')$, следует, что $g(\lambda')\geqslant g(\lambda'')$, т. е. функция $g(\lambda)$ невозрастающая.

Покажем, что $\lambda(g)$ является убывающей по g_∞. Пусть $g_1>g_2$ и $\lambda(g_1)=\lambda(g_2)=\lambda^0$,

тогда $g_1=\int_0^\infty u(x, \lambda^0)\,dx$ и $g_2=\int_0^\infty u(x, \lambda^0)\,dx$, т. е. $g_1=g_2$, что противоречит предположению $g_1 > g_2$. Таким образом, функция $\lambda(g)$ не может быть константой. Из невозрастания функции $g(\lambda)$ из из того, что $\lambda(g)$ не является константой, следует, что $\lambda(g)$ — убывающая функция. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. *Ашимов А. А., Бурков В. Н., Джапаров Б. А., Кондратьев В. В.* Согласованное управление активными производственными системами. М.: Наука, 1986.
3. *Еналеев А. К., Казахбаева Г. У.* Стимулирование эффективности управления производственными процессами // Вопросы создания АСУ ТП и АСУП. Алма-Ата: Каз. политехн. ин-т, 1983. С. 44–52.
4. *Кононенко А. Ф., Халезов А. Д.* Об одной игре двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при неточной информации о множестве выборов партнеров // Вопросы прикладной математики. Иркутск: Сиб. энергетическ. ин-т, 1975. С. 44–55.