УДК 519

© 2002 г. А. А. ВОРОНИН, д-р физ.-мат. наук,
С. П. МИШИН
(Волгоградский государственный университет, Волгоград)

АЛГОРИТМЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается социально-экономическая система, состоящая из исполнителей, организованных некоторым образом для выполнения системой своих функций. В реализации каждой из функций участвует некоторая группа исполнителей, которая организуется из каких-либо подгрупп. Введено понятие организации заданных групп и ее стоимости. В случае неизменной внешней среды конструирование оптимальной системы сводится к нахождению организации минимальной стоимости. Найдены классы организаций, среди которых содержится оптимальная. Найдены оценки сложности задачи поиска оптимальной организации, построены алгоритмы ее решения. Определены возможные стратегии реорганизации системы при изменениях внешней среды, описана модель выбора оптимальной стратегии.

1. Введение

В теории активных систем широко изучены теоретико-игровые модели двухуровневых организационных систем: центр и подчиненные элементы. Один из подходов к изучению многоуровневой системы состоит в ее декомпозиции на ряд двухуровневых. В отдельных случаях это позволяет изучать систему с неизменной структурой [1]. Однако на изменения внешней среды система иногда отвечает структурной перестройкой, которая не описывается в рамках вышеуказанных моделей [2]. Вопросы выбора структуры либо переносятся на уровень постановки задачи [3], т.е. не анализируются математически, либо задачи о выполнении работ исполнителями (задача о назначениях) и о поиске организационной структуры системы полностью разделяются, после чего конструируется оптимальное дерево из жестко заданного класса [4]. В рамках такой постановки не представляется возможным промоделировать влияние изменений внешней среды на структуру системы.

Будем считать, что система располагает набором исполнителей $a_1, \ldots, a_n$ (например, рабочие или машины), которые могут выполнять некоторые из элементарных работ $e_1, \ldots, e_r$. Цель системы – выпуск некоторых изделий из набора $I_1, \ldots, I_q$, который соответствует отрасли. Выполнение элементарных работ необходимо для выпуска изделий. Набор $e_1, \ldots, e_r$ не содержит вспомогательных операций, связанных с организацией системы, одинаков для любой системы в данной отрасли.

Будем считать заданными матрицы $T = \{t_{i,j}\}$ и $S = \{s_{i,j}\}$, где $t_{i,j}$ – количество единиц e_j, необходимое для выпуска одной единицы I_i, $s_{i,j}$ – количество единиц e_j, которое a_i может выполнить за единицу времени.

Также будем считать заданными сложности единицы элементарной работы $c_1^e, \ldots$ $\ldots, c_r^e$ (средние трудозатраты, затраты машинного времени и т.п.) – безразмерные сравнимые показатели. Сложность $C(I_i)$ выпуска единицы изделия I_i положим равной суммарной сложности необходимых для выпуска элементарных работ: $C(I_i) = c_1^e t_{i,1} + \ldots + c_r^e t_{i,r}$. Сложность (потенциал) $C(a_i)$ исполнителя a_i положим равной максимальной сложности элементарной работы, которую a_i способен произвести за единицу времени: $C(a_i) = \max(c_1^e s_{i,1}, \ldots, c_r^e s_{i,r})$.

Пусть система выпускает y_i единиц I_i в единицу времени, причем $0 \le y_i \le v_i$, где v_i – максимальный объем изделия, который система может продать на рынке.

Обозначим через $x_{i,j}$ долю единицы времени, которую исполнитель a_i уделяет выполнению элементарной работы e_j, тогда $0 \le x_{i,j} \le 1$, загруженность a_i обозначим через $z_i = \sum_{j=\overline{1,r}} x_{i,j}$, $0 \le z_i \le 1$. Для соблюдения баланса выполненных и требуемых работ должны выполняться соотношения $\sum_{i=\overline{1,q}} y_i t_{i,j} \le \sum_{k=\overline{1,n}} x_{k,j} s_{k,j}$, $j = \overline{1,r}$.

Будем считать, что затраты на содержание исполнителя a_i в течение единицы времени составляют $p_i^c + z_i p_i^v$, где p_i^c, p_i^v – постоянные и переменные издержки соответственно. Обозначим цену изделия I_i через p_i. Тогда выручка за единицу времени составит $V = y_1 p_1 + \ldots + y_q p_q$. Прямые затраты, т.е. затраты на содержание исполнителей, составят $Z = \sum_{i=\overline{1,n}} (p_i^c + z_i p_i^v)$. Величины y_i, $x_{i,j}$ можно найти, например, максимизируя валовую прибыль $V - Z$. Последняя задача с учетом линейных ограничений на y_i, $x_{i,j}$ является задачей линейного программирования.

Обозначим множество исполнителей через $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Группой исполнителей будем называть любое непустое подмножество $f \subseteq A$, множество всех групп обозначим через $F = 2^A \backslash \{\varnothing\}$. Уровнем группы будем называть количество содержащихся в ней исполнителей. Каждый исполнитель a_i выполняет элементарные работы в объемах $x_{i,1}s_{i,1}, \ldots, x_{i,r}s_{i,r}$. Распределив их некоторым образом, выясним участвует ли a_i в выпуске каждого из изделий. Получим, что в выпуске изделия I_i участвует некоторое подмножество исполнителей $f \subseteq A$, причем $f = \varnothing$ при $y_i = 0$, в противном случае $f \in F$. Игнорируя пустые множества, получим, что для выпуска изделий необходимо организовать совместную работу исполнителей в группах $f_1, \ldots, f_m$, $m \le q$.

Для произвольной группы $f \in F$ определим ее сложность (потенциал) $C(f) = \left(\sum_{a_i \in f} C(a_i)^{1/\alpha} \right)^{\alpha}$, где $\alpha \in (0, +\infty)$. При $\alpha = 1$ сложность группы равна сумме сложностей составляющих ее исполнителей, при $\alpha > 1$ – больше этой суммы (усложняющий параметр), при $\alpha < 1$ – меньше (упрощающий параметр).

Считаем, что стоимость организации совместной работы произвольных подгрупп $g_1, \ldots, g_k \in F$ в группе $g = g_1 \cup \ldots \cup g_k$ в течение единицы времени определяется функционалом стоимости организации $P(C(g_1), \ldots, C(g_k), C(g))$. Аргументами P являются сложности подгрупп и сложность организуемой группы. Если P не зависит от последнего аргумента, то будем его опускать. При перестановке подгрупп значение P не изменяется. Содержательно стоимость организации совместной работы – это затраты на координацию действий (управление), учет результатов, транспорт и прочие накладные расходы.

Для организации совместной работы исполнителей в группах $f_1, \ldots, f_m$ могут быть организованы некоторые промежуточные группы. Под стоимостью организации будем понимать суммарные затраты на организацию всех групп. Стоимость организации (косвенные затраты) определяется структурой конкретной системы.

2. Граф организации системы. Виды организаций

Определение 1. *Будем называть ориентированный граф $G = (V, E)$ графом организации групп $f_1, \ldots, f_m$, если он удовлетворяет следующим условиям:*

a) вершины соответствуют группам, т.е. $V \subseteq F$, $f_1, \ldots, f_m$, $\{a_1\}, \ldots, \{a_n\} \in V$;

b) $E \subseteq V \times V$, для любого ребра $(g, h) \in E$ выполнено $g \subset h$, $g \ne h$ (граф без петель);

c) для произвольной вершины $g \in V$ обозначим через $Q(g) = \{h : (h, g) \in E\}$ множество вершин, из которых идут ребра в g. Тогда для любой $g \ne \{a_i\}$, $i = \overline{1,n}$

выполнено $g = \bigcup_{h \in Q(g)} h$, $Q(\{a_i\}) = \varnothing$, *т.е. любая группа* $g \neq \{a_i\}$ *организуется из подгрупп множества* $Q(g)$;

d) из любой $g \in V$, $g \notin \{f_1, \ldots, f_m\}$ *выходит, по крайней мере, одно ребро.*

Под организацией будем понимать соответствующий граф организации. Вершины (группы) $\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$ графа G будем называть элементарными, неэлементарные вершины G, отличные от $f_1, \ldots, f_m$ – промежуточными.

Определение 2. *Пусть задана организация* $G = (V, E)$. *Рассмотрим* $g \in V \setminus \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$. *Пусть* $Q(g) = \{g_1, \ldots, g_k\}$. *Группе* g *поставим в соответствие пометку* $R(g)$ – *стоимость организации данной группы из подгрупп* $g_1, \ldots, g_k$: $R(g) = P(C(g_1), \ldots, C(g_k), C(g))$. *Стоимостью организации* G *назовем величину* $P(G) = \sum_{g \in V \setminus \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}} R(g)$. *Организацию* G' *назовем оптимальной, если* $P(G') = \min P(G)$, *где минимум берется по всем возможным организациям групп* $f_1, \ldots, f_m$. *Задачей об оптимальной организации будем называть задачу поиска одной из оптимальных организаций.*

Среди известных задач дискретной оптимизации (см., например, [5]) не встречается задачи, аналогичной задаче об оптимальной организации. Анализ ее сложности и алгоритмы решения изложены ниже.

Определение 3. *Организацию* $G = (V, E)$ *будем называть последовательной, если для любой* $g \in V \setminus \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$ $Q(g) = \{g \setminus \{a_i\}, \{a_i\}\}$ *для некоторого* $1 \leq i \leq n$.

Определение 4. *Организацию* $G = (V, E)$ *будем называть* r*-организацией,* $r \geq 2$, *если для любой* $g \in V |Q(g)| \leq r$.

Определение 5. *Организацию* $G = (V, E)$ *будем называть одновременной, если* $V = \{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, f_1, \ldots, f_m\}$, *причем* $Q(f_i) \subseteq \{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\}$, $1 \leq i \leq m$.

Последовательная организация – частный случай 2-организации. Одновременная организация единственна.

Определение 6. *Сложностью* $C(G)$ *организации* $G = (V, E)$ *групп* $f_1, \ldots, f_m$ *будем называть величину* $C(G) = \left(\sum_{g \in V} C(g) \right) / (C(a_1) + \ldots + C(a_n) + C(f_1) + \ldots + C(f_m))$.

Сложность одновременной организации минимальна и равна единице.

Определение 7. *Пусть* G – *организация групп* $f_1, \ldots, f_m$ *из исполнителей* $a_1, \ldots, a_n$. *Оптимальной относительно* G *организацией групп* $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+k}$ *из исполнителей* $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+s}$ *будем называть организацию минимальной стоимости среди тех, которые содержат* G *в качестве подграфа.*

3. Требования к функционалу стоимости, возможные виды функционала

Определение 8. *Функционал стоимости назовем однородным, если для любых неотрицательных чисел* $x, C_1, \ldots, C_k, C$, $C \geq \max(C_i)$ *выполняется* $P(xC_1, \ldots, xC_k, xC) = \xi(x) P(C_1, \ldots, C_k, C)$, *где* $\xi(x)$ *монотонно неубывающая функция,* $\xi(0) = 0$, $\xi(x) > 0$ *для любого* $x > 0$.

Определение 9. *Функционал стоимости назовем корректным, если для любого* $C \geq 0$ *выполняется* $P(C, 0, \ldots, 0, C) = 0$, *т.е. стоимость организации какой-либо группы с группами нулевой сложности равна нулю.*

Определение 10. *Функционал стоимости* $P(C_1, \ldots, C_k, C)$ *назовем монотонным, если:*

a) для любых $C'_1 \geq C_1, \ldots, C'_k \geq C_k$, $C' \geq C$ *выполнено* $P(C'_1, \ldots, C'_k, C') \geq$ $\geq P(C_1, \ldots, C_k, C)$;

b) для любых $C' \in [0; +\infty)$, $C'' \geq C$ *выполнено* $P(C_1, \ldots, C_k, C', C'') \geq P(C_1, \ldots$ $\ldots, C_k, C)$.

Т.е. при организации подгрупп с большей сложностью и при добавлении к организуемым подгруппам еще одной стоимость не убывает.

Выполнение условия однородности функционала стоимости гарантирует независимость оптимальных организаций от масштаба сложностей. Будем считать, что функционал стоимости однороден. Если присоединение группы с нулевой сложностью требует затрат, то функционал стоимости может не быть корректным. Если при увеличении сложности одной из организуемых групп стоимость организации может понизиться, то функционал стоимости может не быть монотонным. Исходя из определений 8–10, можно предложить следующие варианты функционала стоимости:

(1) $$P(C(g_1), \ldots, C(g_k)) = [C(g_1) + \ldots + C(g_k) - \max(C(g_1), \ldots, C(g_k))]^\beta;$$

(2) $$P(C(g_1), \ldots, C(g_k)) = [C(g_1) + \ldots + C(g_k)]^\beta;$$

(3) $$P(C(g_1), \ldots, C(g_k), C(g)) = C(g)/\max(C(g_1), \ldots, C(g_k)) - 1;$$

(4) $$P(C(g_1), \ldots, C(g_k), C(g)) = \sum_{i=\overline{1,k}} C(g) - C(g_i),$$

где группа $g = g_1 \cup \ldots \cup g_k$ организуется из подгрупп $g_1, \ldots, g_k$, $\beta \in (0; +\infty)$.

Функционал (1) однороден, корректен и монотонен. Стоимость организации определяется суммой сложностей групп, организуемых с самой сложной.

Функционал (2) однороден и монотонен, но не корректен.

Функционал (3) однороден, корректен, но не монотонен. Стоимость организации – относительный показатель – определяется отношением сложности группы к максимальной сложности подгруппы. Считаем $P(0, \ldots, 0, 0) = 0$.

Функционал (4) однороден, но не корректен и не монотонен. Стоимость организации – абсолютный показатель – определяется разностью между сложностью группы и сложностями подгрупп.

4. Виды оптимальной организации для различных функционалов стоимости

В дальнейшем будет использовано неравенство, которое легко доказывается индукцией по n:

(5) $$(x_1 + \ldots + x_n)^y \geq x_1^y + \ldots + x_n^y$$
для любых $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ при $y \geq 1$.

Утверждение 1. Решение задачи об оптимальной организации групп $f_1, \ldots$ $\ldots, f_m$ *с функционалом стоимости* (1) *при* $\beta \geq 1$ *существует в классе 2-организаций.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – оптимальная организация. Рассмотрим $g \in V \backslash \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$, $Q(g) = \{g_1, \ldots, g_k\}$, $k \geq 3$, $C(g_i) = C_i$, $C_1 = \max(C_1, \ldots, C_k)$. Если такой вершины нет, то G уже является 2-организацией (см. определение 4). Иначе построим организацию C' следующим образом. Удалим ребра, идущие из вершин $g_1, \ldots, g_k$ в g, добавим вершины и ребра: $h_2 = g_1 \cup g_2$, $Q'(h_2) = \{g_1, g_2\}$; $h_3 =$ $= h_2 \cup g_3$, $Q'(h_3) = \{h_2, g_3\}$; и так далее, $h_{k-1} = h_{k-2} \cup g_{k-1}$, $Q'(h_{k-1}) = \{h_{k-2}, g_{k-1}\}$. Тогда g организуем из вершин $Q'(g) = \{h_{k-1}, g_k\}$. Таким образом, одновременную организацию $g_1, \ldots, g_k$ в g мы заменили последовательным присоединением

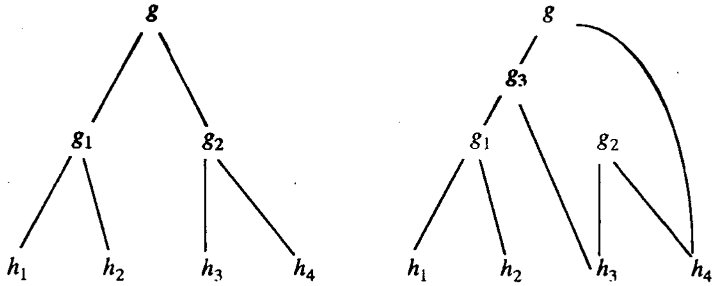

Рис. 1. Перестроение графа организации. Ориентация ребер снизу вверх.

$g_2, \ldots, g_k$. При этом во все добавленные вершины входят два ребра, g также организуется из двух подгрупп. Получили граф G', в котором число вершин g с $|Q(g)| \geq 3$ уменьшилось на единицу. Если мы докажем, что G' оптимальна, то, проделывая такую операцию далее, получим искомую оптимальную 2-организацию.

В $P(G)$ входила пометка $R(g)$ вершины g, обозначим ее через $P_1 = (C_2 + \ldots + C_k)^\beta$. В $P(G')$ вместо P_1 будут входить новые пометки $P_2 = R'(h_2) + \ldots + R'(h_{k-1}) + R'(g) = C_2^\beta + \ldots + C_k^\beta$. Так как $\beta \geq 1$, то из (5) следует $P_2 \leq P_1$. Следовательно, $P(G') \leq P(G)$, что и доказывает утверждение.

Теорема 1. *Решение задачи об оптимальной организации групп $f_1, \ldots, f_m$ с функционалом стоимости* (1) *при $\beta \geq 1$ и $\alpha\beta \geq 1$ существует в классе последовательных организаций.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – оптимальная 2-организация (см. утверждение 1). Будем называть вершину графа G неправильной, если она организуется из двух неэлементарных групп, в противном случае будем называть ее правильной. Назовем вершину h дочерней для g, если $g \neq h$ и из h существует путь в g.

Если в G нет неправильных вершин, то G – последовательная организация (см. определение 3). В противном случае построим оптимальную 2-организацию G', число неправильных вершин которой на одну меньше, чем в G. Тогда, проделав такую операцию нужное число раз, придем к оптимальной последовательной организации.

Пусть g – такая неправильная вершина, все дочерние вершины которой правильные, $Q(g) = \{g_1, g_2\}$. Пусть, в свою очередь $Q(g_1) = \{h_1, h_2\}$, $Q(g_2) = \{h_3, h_4\}$. Не ограничивая общности, полагаем $C(g_1) \geq C(g_2)$, $C(h_1) = C_1 \geq C_2 = C(h_2)$, $C_3 = C(g_3)$, $C_4 = C(g_4)$, h_4 элементарна. Так как g_1 – правильная вершина, то хотя бы одна из вершин h_1, h_2 элементарна. G не содержит петель (см. определение 1 b), следовательно, $h_1 \cap h_2 = \varnothing$, аналогично, $h_3 \cap h_4 = \varnothing$. Тогда $C(g_1) = (C_1^{1/\alpha} + C_2^{1/\alpha})^\alpha$, $C(g_2) = (C_3^{1/\alpha} + C_4^{1/\alpha})^\alpha$.

Перестроим G следующим образом: добавим вершину $g_3 = g_1 \cup h_3$ и изменим ребра так, чтобы $Q(g) = \{g_3, h_4\}$, $Q(g_3) = \{g_1, h_3\}$. Соответствующая часть G до и после перестроения изображена на рис. 1 слева и справа соответственно.

Если из g_2 в G выходило одно ребро и g_2 не содержится среди $f_1, \ldots, f_m$, то удалим g_2. Обозначим полученную 2-организацию групп $f_1, \ldots, f_m$ через G_1. В стоимость G входила величина:

$$P_1 = R(g_1) + R(g_2) + R(g) = R(g_1) + R(g_2) + \left(C_3^{1/\alpha} + C_4^{1/\alpha}\right)^{\alpha\beta}.$$

Если вершина g_2 сохранилась, то в стоимость G_1 вместо P_1 входит величина:

$$P_2 = R'(g_1) + R'(g_2) + R(g_3) + R'(g) = R(g_1) + R(g_2) + C_3^\beta + C_4^\beta.$$

С учетом (5) при $\alpha\beta \geq 1$ имеем $(C_3^{1/\alpha} + C_4^{1/\alpha})^{\alpha\beta} \geq (C_3^{1/\alpha})^{\alpha\beta} + (C_4^{1/\alpha})^{\alpha\beta}$, откуда $P_2 \leq P_1$, следовательно, $P(G_1) \leq P(G)$. Удаление g_2 может лишь уменьшить P_2.

Итак, G_1 оптимальна. Если g_3 правильна, то мы получили искомый граф G'. В противном случае рассуждаем следующим образом. Уровень g_3 меньше, чем уровень g, все дочерние вершины g_3 правильные. Повторим описанное перестроение, взяв в качестве G граф G_1, а в качестве g вершину g_3. Таким образом, мы снова уменьшим уровень неправильной вершины. Повторяя такие действия, мы либо получим на очередном шаге искомый граф G', либо дойдем до момента, когда уровень g_3 равен двум. В этом случае g_3 правильна, что и доказывает теорему.

Утверждение 2. *Решение задачи об оптимальной организации групп $f_1, \ldots$ $\ldots, f_m$ с функционалом стоимости* (3) *существует в классе 2-организаций.*

Доказательство проводится повторением доказательства утверждения 1. Сохраняя обозначения этого доказательства, положим $C_i = C(h_i)$, $i = \overline{1,k}$, $h_1 = g_1$, $h_k = g$. Тогда для $i = \overline{1,k}$ выполнено $C(g_i) \leq C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_k$, можно записать величины P_1, P_2: $P_1 = C_k/C_1 - 1$, $P_2 = C_2/C_1 + C_3/C_2 + \ldots + C_k/C_{k-1} - (k-1)$.

Докажем, что $P_2 \leq P_1$ индукцией по k. При каждом k обозначаем P_1, P_2 через $P_1(k)$, $P_2(k)$. Имеем $P_2(2) = P_1(2)$. Пусть $P_2(k) \leq P_1(k)$ выполняется для $k \leq j$. Положим $k = j+1$:

$$
\begin{aligned}
&P_1(j+1) = C_{j+1}/C_1 - 1 = (C_{j+1} - C_j + C_j)/C_1 - 1 = \\
&= P_1(j) + (C_{j+1} - C_j)/C_1, \\
&P_2(j+1) = C_2/C_1 + C_3/C_2 + \ldots + C_j/C_{j-1} + C_{j+1}/C_j - j = \\
&= P_2(j) + (C_{j+1} - C_j)/C_j.
\end{aligned}
$$

Так как $C_j \geq C_1$ и $P_2(j) \leq P_1(j)$ по предположению, то $P_2(j+1) \leq P_1(j+1)$, т.е. $P_2 \leq P_1$, что и доказывает утверждение.

Теорема 2. *Решение задачи об оптимальной организации групп $f_1, \ldots, f_m$ с функционалом стоимости* (3) *существует в классе последовательных организаций.*

Доказательство проводится повторением доказательства теоремы 1, все обозначения аналогичны, оптимальная 2-организация существует по утверждению 2. Величины P_1, P_2 можно записать так: $P_1 = R(g_1) + R(g_2) + C(g)/C(g_1) - 1$, $P_2 = R(g_1) + R(g_2) + C(g_3)/C(g_1) - 1 + C(g)/C(g_3) - 1$. Обозначим $x = C(g)$, $y = C(g_3)$, $z = C(g_1)$. Тогда выполнено $z \leq y \leq x$ и можно записать:

$$P_1 - P_2 = x/z - 1 - y/z + 1 - x/y + 1 = (xy + yz - y^2 - xz)/yz.$$

Обозначим $\xi(x) = xy + yz - y^2 - xz$. Продифференцируем: $\xi'(x) = y - z \geq 0$ в силу $y \geq z$. Далее $\xi(y) = y^2 + yz - y^2 - yz = 0$, следовательно, для всех $x \geq y$ выполняется $\xi(x) \geq 0$, т.е. $P_2 \leq P_1$, что и доказывает теорему.

5. Задача об оптимальной последовательной организации. Алгоритмы решения

Определение 11. *Последовательную организацию групп $f_1, \ldots, f_m$ имеющую минимальную стоимость среди всех таких организаций, назовем оптимальной последовательной организацией. Задачу поиска одной из таких организаций будем называть задачей об оптимальной последовательной организации.*

Определение 12. *Будем называть графом задачи ориентированный граф $H = (V_H, E_H) : V_H = F \cup \{\varnothing\}$, $E_H = E'_H \cup E''_H \cup E'''_H$, где $E'_H = \{(\varnothing, \{a_i\}) : i = \overline{1,n}\}$, $E''_H = \{(\{a_i\}, \{a_i, a_j\}) : 1 \leq i < j \leq n\}$, $E'''_H = \{(g, g \cup \{a_i\}) : g \in V,\ |g| \geq 2,\ a_i \notin g,\ i = \overline{1,n}\}$ (см. рис. 2). Определим вес $\lambda : E_H \to R^+$ ребер графа. Для ребер из E'_H положим вес*

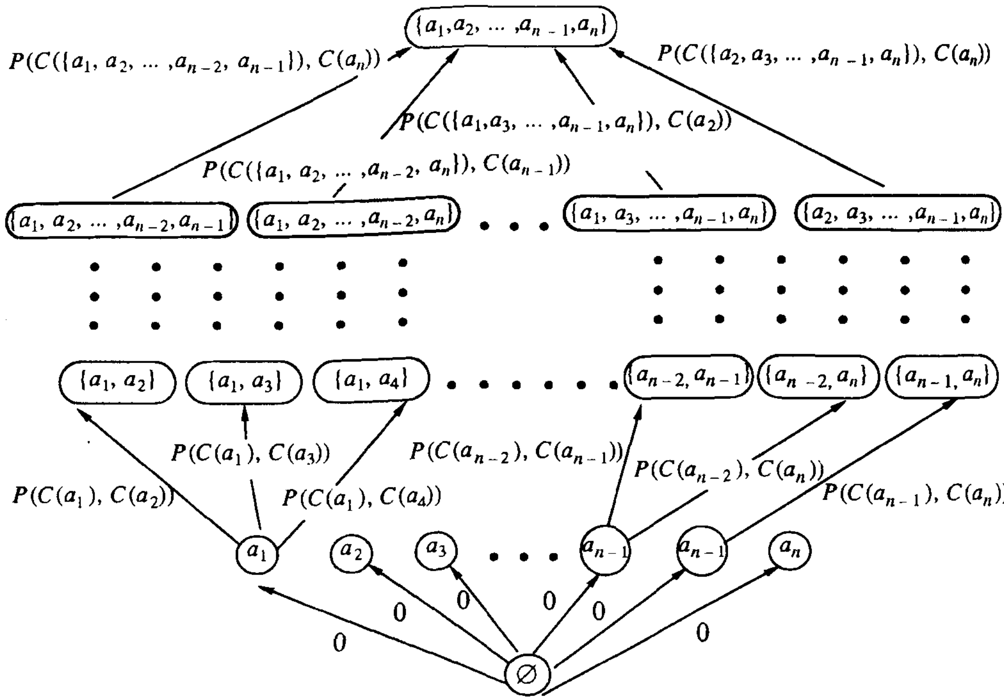

Рис. 2. Граф $H = (V_H, E_H)$ задачи о последовательной организации.

равным нулю. Любое ребро из $E''_H \cup E'''_H$ имеет вид $e = \{g, g \cup \{a_i\}\}$, соответствует организации g и $\{a_i\}$ в $g \cup \{a_i\}$. Положим $\lambda(e) = P(C(g), C(\{a_i\}), C(g \cup \{a_i\}))$.

Граф задачи изображен на рис. 2. Чтобы не загромождать рисунок, в P опущен последний аргумент и фигурные скобки у элементарных групп.

Определение 13. Рассмотрим поддерево D графа задачи H с корнем в $\varnothing$, содержащее $f_1, \dots, f_m$, листья которого содержатся среди $f_1, \dots, f_m$. Задачу поиска такого поддерева минимального веса назовем задачей об оптимальном поддереве в H. Под весом $\lambda(D)$ поддерева D будем понимать сумму весов ребер D.

Далее, если не оговорено противное, под поддеревом понимаем поддерево указанного вида.

Теорема 3. Задача об оптимальной последовательной организации эквивалентна задаче об оптимальном поддереве в H.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – последовательная организация групп $f_1, \dots, f_m$. Построим поддерево $D = (V_D, E_D)$ графа H – множество вершин $V_D = V'_D \cup V''_D \cup \{\varnothing\}$, где $V'_D = \{g \in V, |g| \geq 2\}$, $V''_D = \{\{a_i\} : \exists j > i, \{a_i, a_j\} \in V\}$. Рассмотрим $g \in V$, $|g| \geq 3$, тогда в G $Q(g) = \{h, \{a_i\}\}$, g, $h \in V_D$, включим ребро $e = (h, g)$ в E_D, при этом имеем $R(g) = \lambda(e)$. Рассмотрим $g = \{a_i, a_j\} \in V$, $i < j$, тогда $g, \{a_i\} \in V_D$. Включим ребро $e = (\{a_i\}, g)$ в E_D. Опять имеем $R(g) = \lambda(e)$. Для $\{a_i\} \in V_D$ включим ребро $e = (\varnothing, \{a_i\})$ в E_D, $\lambda(e) = 0$. По построению D – поддерево, $P(G) = \lambda(D)$.

Обратно, пусть $D = (V_D, E_D)$ – поддерево H. Построим последовательную организацию $G = (V, E)$ групп $f_1, \dots, f_m$: $V = (V_D \cup \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}) \setminus \{\varnothing\}$. В вершину $g \in V$, $|g| \geq 2$, в дереве D входит одно ребро $e = (h, g)$, добавим к E ребра (h, g), $(g \setminus h, g)$, тогда $R(g) = \lambda(e)$. По построению $P(G) = \lambda(D)$.

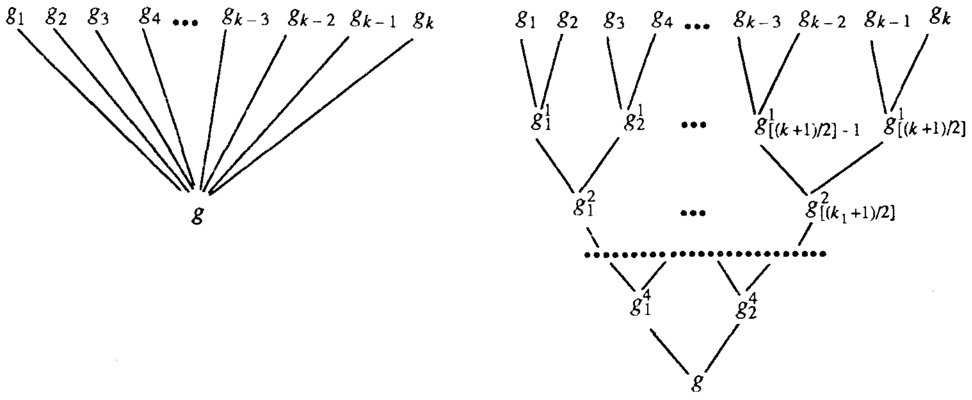

Рис. 3. Приведение к нормализованному графу задачи.

Итак, каждому поддереву D соответствует последовательная организация G, $P(G) = \lambda(D)$, и наоборот. Что и доказывает теорему.

Определение 14. Рассмотрим $H = (V_H, E_H)$. Для $g \in V_H$ обозначим через $S(g)$ множество вершин, в которые идут ребра из g. Пусть $g \in V_H$, $k = |S(g)| \geq 3$, $S(g) = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Преобразуем H: удалим ребра (g, g_i), $i = \overline{1, k}$. Добавим $k_1 = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ вершин, обозначив их $g_1^1, \ldots, g_{k_1}^1$, и ребра $(g^1_{\lfloor (i+1)/2 \rfloor}, g_i)$, $i = \overline{1, k}$, вес которых равен весу удаленных ребер (g, g_i). Если $k_1 \geq 3$, добавим $k_2 = \lfloor (k_1+1)/2 \rfloor$ вершин, обозначив их $g_1^2, \ldots, g_{k_2}^2$, и ребра $(g^2_{\lfloor (i+1)/2 \rfloor}, g_i^1)$, $i = \overline{1, k_1}$ нулевого веса. И так далее, на очередном шаге добавим две вершины g_1^q g_2^q и ребра (g, g_1^q), (g, g_2^q) нулевого веса. Проделав такие шаги для всех $g \in V_H$, $|S(g)| \geq 3$, получим граф $N = (V_H, E_N)$, из каждой вершины которого выходит не более двух ребер. Назовем его нормализованным графом задачи.

Описанное перестроение для $k = 2^{q+1}$ изображено на рис. 3.

Утверждение 3. Задача об оптимальном поддереве в H эквивалентна задаче об оптимальном поддереве в нормализованном графе задачи N.

Доказательство. Рассмотрим поддерево $D = (V_D, E_D)$ графа $H = (V_H, E_H)$. Построим поддерево $D' = (V_D', E_D')$ графа $N = (V_N, E_N)$. Добавим в V_D' все вершины из V_D. Для $g \in V_D$, $|S(g)| \leq 2$ добавим выходящие из g ребра в E_D'. Рассмотрим $g \in V_D$, $S(g) = \{g_1, \ldots, g_k\}$, $k \geq 3$. Тогда в N есть вершины $g_1^j, \ldots, g_{k_j}^j$, $j = \overline{1, q}$ (см. определение 14). Пусть в D из g выходят ℓ ребер в $g_{i_1}, \ldots, g_{i_\ell}$, добавим в V_D' вершины $g^1_{\lfloor (i_j+1)/2 \rfloor}$ и в E_D' ребра $(g^1_{\lfloor (i_j+1)/2}, g_{i_j})$, $j = \overline{1, \ell}$. Для добавленных вершин добавим ведущие в них в графе N ребра и соответствующие вершины и так далее, пока не добавим идущие из g ребра. Получим поддерево D' графа N, причем по построению $\lambda(D') = \lambda(D)$.

Обратно, рассмотрим поддерево $D' = (V_D', E_D')$ графа N. Построим поддерево $D = (V_D, E_D)$ графа H. Добавим в V_D все вершины из $V_D' \cap V_H$. Для $g \in V_D' \cap V_H$, $|S(g)| \leq 2$ добавим в D ребра, выходящие из g в D'. Для $g \in V_D' \cap V_H$, $Q(g) = \{g_1, \ldots, g_k\}$, $k \geq 3$ некоторые $0 \leq \ell \leq k$ вершин $g_{i_1}, \ldots, g_{i_\ell}$ (см. определение 14) принадлежат V_D'. Тогда добавим в E_D ребра (g, g_{i_j}), $j = \overline{1, \ell}$. Получим поддерево D графа H, причем по построению $\lambda(D') = \lambda(D)$.

Итак, каждому поддереву N соответствует поддерево H такого же веса и наоборот, что и доказывает утверждение.

Теорема 4. *Существует алгоритм, решающий задачу об оптимальном поддереве в $N = (V_N, E_N)$ путем сравнения менее $V_2(N)3^m$ весов различных поддеревьев, где $V_2(N) = |\{g \in V_N : |S(g)| = 2\}|$. Построение алгоритма приведено в доказательстве.*

Доказательство. Обозначим: $M = \{f_1, \dots, f_m\}$, $L = 2^M \backslash \{\varnothing\}$. Рассмотрим $v \in L$ и $g \in V_N$. Через $\lambda(g, v)$ будем обозначать минимальный вес поддерева с корнем в g, которое содержит вершины из v, листья которого содержатся среди вершин v. Если соответствующего дерева не существует, положим $\lambda(g, v) = \infty$.

Пусть $|S(g)| = 0$: если $g \notin M$, то $\lambda(g, v) = \infty$ для любого $v \in L$; если $g \in M$, то $\lambda(g, \{g\}) = 0$, $\lambda(g, v) = \infty$ для любого $v \neq \{g\}$.

Пусть из g выходит одно ребро $e = (g, h)$. Если $g \notin M$, то для любого $v \in L$ имеем $\lambda(g, v) = \lambda(h, v) + \lambda(e)$, соответствующее $\lambda(g, v)$ поддерево строится как объединение ребра e и поддерева для $\lambda(h, v)$. Если $g \in M$: для любого $v \in L$, $g \notin v$ имеем $\lambda(g, v) = \lambda(h, v) + \lambda(e)$; для любого $v \in L$, $g \in v$, $v \neq \{g\}$ имеем $\lambda(g, v) = \lambda(h, v \backslash \{g\}) + \lambda(e)$, так как g уже содержится в корне дерева. Если $g \in M$, то $\lambda(g, \{g\}) = 0$.

Пусть из g выходит два ребра $e_1 = (g, h_1)$ и $e_2 = (g, h_2)$. Рассмотрим $v \in L$, в соответствующем $\lambda(g, v)$ поддереве некоторый набор $v_1 \subseteq v$ содержится в поддереве с корнем в h_1, набор $v_2 = v \backslash v_1$ (или $v_2 = v_1 \backslash (v_1 \cup \{g\})$, если $g \in M$) содержится в поддереве с корнем в h_2. Если $v_1 \neq \varnothing$, $v_2 \neq \varnothing$, то $\lambda(g, v) = \lambda(h_1, v_1) + \lambda(e_1) + \lambda(h_2, v_2) + \lambda(e_2)$. Если $v_1 \varnothing$, $v_2 = \varnothing$, то $\lambda(g, v) = \lambda(h_2, v_2) + \lambda(e_2)$. Если $v_1 \neq \varnothing$, $v_2 = \varnothing$, то $\lambda(g, v) = \lambda(h_1, v_1) + \lambda(e_1)$. Если $g \in M$, то $\lambda(g, \{g\}) = 0$. Сравнив не более $2^{|v|}$ вариантов разбиения v на v_1, v_2, найдем $\lambda(g, v)$. Для всех $v \in L$ сравним не более $\sum\limits_{i=\overline{1,m}} C_m^i 2^i < 3^m$ вариантов.

Для вершин, из которых ребра не выходят, для любого $v \in L$ известны $\lambda(g, v)$ и соответствующие поддеревья. Будем говорить, что для таких вершин задача о поддеревьях решена. В силу ацикличности N найдется $g \in V_N$, такая что ребра из g идут в вершины, для которых задача о поддеревьях решена. Тогда решим задачу для g, что потребует менее 3^m сравнений весов поддеревьев. И так далее, в итоге решим задачу для всех вершин $g \in V_N$, тогда $\lambda(\varnothing, M)$ и соответствующее поддерево являются искомыми, что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Существует алгоритм, решающий задачу об оптимальной последовательной организации путем сравнения менее $(n+1)2^n 3^m$ весов поддеревьев графа N.*

Доказательство. Для любой $g \in V_H$, $k = |S(g)| \geq 3$ добавим в N не более $2k$ вершин. Из вершины i-го уровня H выходит $n - i$ ребер, $i = \overline{2, n-3}$. Для всех вершин уровня i добавим не более $2C_n^i(n-i)$ вершин в N. Из вершины $\{a_i\}$, $j = \overline{1, n-1}$ графа H выходит $n - j$ ребер, для всех вершин первого уровня добавим в N не более $\sum\limits_{j=\overline{1,n-1}} 2(n-j)$ вершин. Для $\varnothing$ добавим в N не более $2n$ вершин. Всего добавим вершин не более $\sum\limits_{i=\overline{2,n-3}} 2C_n^i(n-i) + \sum\limits_{j=\overline{1,n-1}} 2(n-j) + 2n$. Учитывая $iC_n^i = nC_{n-1}^{i-1}$, оценим последнее выражение величиной $n2^n$. Так как $|V_H| = 2^n$, то $V_2(N) \leq |V_N| \leq (n+1)2^n$, что и доказывает следствие.

Следствие 1 дает верхнюю оценку сложности в худшем случае. Сгенерируем случайным образом набор групп (каждый исполнитель входит в группу с вероятностью 0,5), вычислим $V_2(N)$, по теореме 2 оценим сложность в среднем по 100 тестам. Для $m, n = 15$ сложность примерно $3 \cdot 10^8$, т.е. еще приемлема.

При $C(a_1) = \ldots = C(a_n) = C$ сложность группы определяется только ее уровнем. Обозначим стоимость организации группы уровня i с элементарной группой через

$P_i = P(i^\alpha C, C, (i+1)^\alpha C)$. Задача об оптимальной последовательной организации полностью определяется величинами $P_1, \ldots, P_{n-1}$ и набором $f_1, \ldots, f_m$.

Теорема 5. *При $C(a_1) = \ldots = C(a_n)$ задача об оптимальной последовательной организации $f_1, \ldots, f_m$, $|f_i| \leq 3$, $i = \overline{1,m}$ NP-полна для любых $P_1 > 0$, P_2.*

Доказательство. Покажем принадлежность к классу NP. В оптимальной последовательной организации f_i организуется в некоторой последовательности. Сгенерировав эту последовательность недетерминированной машиной для каждой f_i, уберем все повторяющиеся группы, вычислим стоимость за полиномиальное время.

Рассмотрим задачу о представителях в 2-множествах: задано множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и 2-х элементные подмножества $Y_1, \ldots, Y_m \subseteq X$ необходимо найти $Y \subset X$ минимальной мощности, чтобы $|Y \cap Y_i| \geq 1$ для $i = \overline{1,m}$. Задача о представителях в 2-множествах NP-полна (см. [6]).

Пусть $Y_i = \{x_{j_i}, x_{k_i}\}$, $i = \overline{1,m}$, $1 \leq j_i < k_i \leq n$. Положим $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, $f_i = \{a_0, a_{j_i}, a_{k_i}\}$. Пусть задано множество представителей $Y = \{x_{\ell_1}, \ldots, x_{\ell_q}\} \subset X$. Построим $G = (V, E)$: $V = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, f_1, \ldots, f_m, \{a_0, a_{\ell_1}\}, \ldots, \{a_0, a_{\ell_q}\}\}$. К E добавим ребра для организации $\{a_0, a_{\ell_1}\}, \ldots, \{a_0, a_{\ell_q}\}$. Для $Y_i = \{x_{j_i}, x_{k_i}\}$ выполнено $x_{j_i} \in Y$ или $x_{k_i} \in Y$, следовательно $\{a_0, a_{j_i}\} \in V$ или $\{a_0, a_{k_i}\} \in V$. С помощью одной из этих групп организуем f_i. В результате построим последовательную организацию G групп $f_1, \ldots, f_m$ стоимости $qP_1 + mP_2$.

Обратно, пусть задана последовательная организация $G = (V, E)$ групп $f_1, \ldots, f_m$, $P(G) = qP_1 + mP_2$, где q – число групп уровня 2 в G. Пусть $g = \{a_i, a_j\} \in V$, $1 \leq i < j \leq n$. Из g может выходить ребро лишь в $f = \{a_0, a_i, a_j\}$. Удалим g, а f организуем из $\{a_0, a_i\}$ и $\{a_j\}$, добавив, если нужно, $\{a_0, a_i\}$. Продолжая такие действия, найдем последовательную организацию $G' = (V', E')$, которая содержит q' групп $\{a_0, a_{\ell_1}\}, \ldots, \{a_0, a_{\ell_{q'}}\}$ уровня 2, $P(G') = q'P_1 + mP_2$, $q' \leq q$. Тогда рассмотрим $Y = \{x_{\ell_1}, \ldots, x_{\ell_{q'}}\} \subset X$. Для $f_i = \{a_0, a_{j_i}, a_{k_i}\}$ выполнено $\{a_0, a_{j_i}\} \in V'$ или $\{a_0, a_{k_i}\} \in V'$, т.е. существует $1 \leq r \leq q'$: $a_{j_i} = a_{\ell_r}$ или $a_{k_i} = a_{\ell_r}$, следовательно, $x_{j_i} = x_{\ell_r}$ или $x_{k_i} = x_{\ell_r}$, $|Y_i \cap Y| \geq 1$. Итак Y – множество представителей из q' элементов.

Найдем оптимальную последовательную организацию G, $P(G) = qP_1 + mP_2$, тогда за полиномиальное время найдем множество представителей Y из q' элементов, $q' \leq q$. Если бы существовало множество представителей из $q'' < q' \leq q$ элементов, то существовала бы последовательная организация G'', $P(G'') = q''P_1 + mP_2 < P(G)$, что противоречит оптимальности G. Следовательно, Y – решение задачи о представителях в 2-множествах, что и доказывает теорему.

Определение 15. *Будем называть узловыми группами группы множества $U = \{f_{i_1} \cap \ldots \cap f_{i_k} : 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m\} \backslash \{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, \varnothing\}$.*

Утверждение 4. *При $C(a_1) = \ldots = C(a_n)$ существует оптимальная последовательная организация $G = (V, E)$, для которой любая $g \in V$, из которой выходит более одного ребра, является либо узловой, либо элементарной.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – оптимальная последовательная организация групп $f_1, \ldots, f_m$. Пусть из $g \in V \backslash \{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\}$, $g \notin U$ выходят, по крайней мере, два ребра в h_1, ℓ_1, причем из g не существует пути ни в одну вершину, обладающую такими же свойствами. Пусть $h_1 - h_2 - \ldots - h_{n_1}$ – путь из h_1 в $h_{n_1} \in U$, который не содержит других узловых групп; аналогично $\ell_1 - \ell_2 - \ldots - \ell_{n_2}$ – путь из ℓ_1 в $\ell_{n_2} \in U$. Из каждой вершины h_i, $i = \overline{1, n_1 - 1}$, ℓ_j, $j = \overline{1, n_2 - 1}$ выходит ровно одно ребро по построению.

Рассмотрим $g' = h_{n_1} \cap \ell_{n_2}$, имеем $g \subseteq g'$, следовательно, g' неэлементарна, следовательно, $g' \in U$, тогда $g \subset g'$, так как $g \notin U$. Вершины $f_1, \ldots, f_m$ не содержатся среди $h_1, \ldots, h_{n_1-1}, \ell_1, \ldots, \ell_{n_2-1}$, удалим эти вершины. Пусть $g' \backslash g = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, тогда добавим в G вершины $g_j = g \cup \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}\}$, $j = \overline{1,k}$ и ребра (g_{j-1}, g_j), $(\{a_{i_j}\}, g_j)$, где $g_0 = g$. Аналогично последовательным образом достроим g' до h_{n_1} и ℓ_{n_2}. В результате получим последовательную организацию G' групп $f_1, \dots, f_m$.

Вместо пометок вершин $h_1, \dots, h_k$, $\ell_1, \dots, \ell_k$ в $P(G')$ входят пометки вершин $g_1, \dots, g_k$, т.е. $P(G') \le P(G)$. Мы не добавили в G' ни одной неузловой вершины, из которой выходило бы более одного ребра. Из g в G' выходит на одно ребро меньше, чем в G. Проделаем вышеперечисленные действия до тех пор, пока из g не будет выходить одно ребро.

В результате построим оптимальную последовательную организацию групп $f_1, \dots, f_m$, в которой число вершин $g \notin U \cup \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ с более чем одним выходящим ребром на одну меньше, чем в G. Продолжая такие действия, получим искомую оптимальную последовательную организацию, что и доказывает утверждение.

Утверждение 5. *Существует оптимальная последовательная организация $G = (V, E)$, для которой кроме условий утверждения 4 выполняется следующее. Если g, $h \in V \cap U$, $h \subset g$, и существует путь из h в g, не содержащий узловых вершин, то не существует $g_3 \in U$, $g_1 \subset g_3 \subset g_2$. Если ни из одной узловой вершины G не существует пути в g, то не существует $h \in U$, $h \subset g$.*

Доказательство. Рассмотрим оптимальную последовательную организацию G, для которой выполняются условия утверждения 4, и некоторый путь $h_1 - \dots - h_k$ в G, $k \ge 2$ $h_k \in U$, $h_1 \in U \cup \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$, $h_2, \dots, h_{k-1} \notin U$. Путь назовем неправильным, если существует $g' \in U$, $h_1 \subset g' \subset h_k$.

Пусть $h_1 - \dots - h_k$ – неправильный путь, тогда ему соответствует $g' \in U$. Удалим вершины $h_2, \dots, h_{k-1}$ из G. Пусть $g' \backslash h_1 = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$, добавим в G вершины $h'_j = h_1 \cup \{a_{i_1}, \dots, a_{i_j}\}$, $j = \overline{1, r}$, организовав h'_j из h'_{j-1} и $\{a_{i_j}\}$, где $h'_0 = h_1$. Аналогичным образом достроим g' до h_k. Получили новую организацию G', причем $P(G') = P(G)$. Если неправилен путь из h_1 в g', или из g' в h_k, то проделаем описанную процедуру для этих подпутей. И так далее, в итоге получим оптимальную организацию в которой любой подпуть пути из h_1 в h_k правилен. Следовательно, число неправильных путей по сравнению с G уменьшилось на единицу.

Повторяя описанные действия, получим оптимальную последовательную организацию, все пути которой правильные, что и доказывает утверждение.

Для дальнейшего изложения переопределим граф задачи $H = (V_H, E_H)$ при $C(a_1) = \dots = C(a_n)$. Множество вершин $V_H = U \cup \{\varnothing\}$. Рассмотрим g_1, $g_2 \in V_H$, $g_1 \subset g_2$, причем не существует $g_3 \in V_H$ для которой $g_1 \subset g_3 \subset g_2$. Для каждой такой пары включим ребро $e = (g_1, g_2)$ в E_H, положив $\lambda(e) = P_{|g_1|} + P_{|g_1|+1} + \dots + P_{|g_2|-1}$, где $P_0 = 0$. Т.е. вес $\lambda(e)$ равен стоимости последовательной достройки g_1 до g_2.

Теорема 6. *При $C(a_1) = \dots = C(a_n)$ задача об оптимальной последовательной организации эквивалентна задаче об оптимальном поддереве в H.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – оптимальная последовательная организация $f_1, \dots, f_m$, которая удовлетворяет условиям утверждения 5. Сконструируем поддерево $D = (V_D, E_D)$ графа H. Множество вершин $V_D = V_U \cup \{\varnothing\}$, где $V_U \subset V$ – множество узловых групп из V. Рассмотрим $g \in V_U$, пусть $Q(g) = \{g_1, \{a_{i_1}\}\}$. Если $g_1 \notin V_U \cup \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$, то рассмотрим $Q(g_1) = \{g_2, \{a_{i_2}\}\}$, повторим рассуждения для g_2 и так далее, в итоге дойдем до $g_k \in V_U \cup \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$. Либо g_k элементарна, тогда добавим в D ребро $(\varnothing, g)$, либо $g_k \in V_U$, тогда добавим в D ребро (g_k, g). В первом случае не существует $g' \in U$, $g' \subset g$, во втором не существует $g' \in U$, $g_k \subset g' \subset g$, т.е. в обоих случаях добавленное ребро принадлежит E_H, причем вес ребра равен суммарной стоимости пометок вершин $g, g_1, \dots, g_{k-1}$. В каждую вершину D, кроме $\varnothing$, входит ровно одно ребро из вершины меньшего уровня, следовательно, D – поддерево H. Пометка каждой неэлементарной группы G входит в $\lambda(D)$ ровно один раз, следовательно, $P(G) = \lambda(D)$.

Обратно, пусть $D = (V_D, E_D)$ – поддерево графа H. Построим последовательную организацию $G = (V, E)$. Добавим к V вершины $(V_D \cup \{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\}) \backslash \{\varnothing\}$. Пусть $g \in V_D$, в дереве D в нее входит ровно одно ребро $e = (h, g)$. Пусть $g \backslash h = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, тогда добавим в V вершины $h_j = h \cup \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}\}$ (кроме элементарной $\{a_{i_1}\}$ при $h = \varnothing$), $j = \overline{1, k-1}$, организовав h_j из h_{j-1} и $\{a_{i_j}\}$, где $h_0 = h$. Сумма пометок g и добавленных в V вершин будет равна $\lambda(e)$. В результате построим G, $P(G) = \lambda(D)$. Что и доказывает теорему.

Алгоритм решения задачи об оптимальном поддереве в H в случае $C(a_1) = \ldots = C(a_n)$ полностью совпадает с алгоритмом для общего случая, в чем можно убедиться, дословно повторив определение 14, утверждение 3, теорему 4.

Следствие 2 (из теоремы 4). *При $C(a_1) = \ldots = C(a_n)$ существует алгоритм, решающий задачу об оптимальной последовательной организации, который сравнивает менее $22^{2m}3^m$ весов различных поддеревьев нормализованного графа задачи N.*

Доказательство. При $C(a_1) = \ldots = C(a_n)$ граф H содержит не более 2^m вершин, из каждой выходит не более $2^m - 1$ ребер. Следовательно, конструируя граф N, добавим не более $2^{m+1} - 2$ вершин для каждой вершины из H. Всего добавим не более $2^{2m+1} - 2^{m+1}$ вершин. Итак, $V_2(N) \le |V_N| < 22^{2m}$, что и доказывает следствие.

Для построения H необходимо найти не более 2^m вершин, не более 2^{2m-1} ребер. Для поиска вершины проделаем не более mn операций, для поиска ребра – не более n. Порядок сложности остальных операций (построение N, переход от поддерева в N к поддереву в H) не превосходит 2^{2m}. Итак, порядок сложности алгоритма для решения задачи при $C(a_1) = \ldots = C(a_n)$ не превосходит $22^{2m}3^m + n(2^{2m-1} + m2^m)$. От n зависит лишь второе слагаемое, причем линейно, что позволяет решать задачу для больших n. Генерируя случайным образом набор групп (исполнитель входит в группу с вероятностью 0,5), оценив сложность в среднем по 100 тестам, получим, что задачу можно решать, если m не превосходит полутора десятков.

6. Заключение

Если внешняя среда не меняется (статический случай), то можно минимизировать затраты и создать систему с оптимальной структурой с помощью решения задачи об оптимальной организации. Для функционала (1) при $\beta \ge 1$, $\alpha\beta \ge 1$, и для функционала (3) задачу об оптимальной организации можно решить с помощью вышеописанных алгоритмов поиска оптимальной последовательной организации (см. теоремы 1, 2). Для функционала (4) существует оптимальная 2-организация, последовательной же, в общем случае, не существует (см. [7]). Для монотонных функционалов стоимости доказано существование оптимального дерева организации одной группы (см. [7]), для поиска которого можно использовать построенные в [7] алгоритмы. Используя вид оптимальной среди последовательных организаций одной группы (см. [7]) и опираясь на теоремы 1, 2, можно найти оптимальную организацию одной группы для функционалов (1), (3). Для функционала (2), кроме области $\alpha < 1$, $\beta > 1$, оптимальная организация одной группы найдена в [7].

При изменениях внешней среды (динамический случай), может меняться набор групп $f_1, \ldots, f_m$, множество исполнителей, функционал стоимости, параметры сложности. Если задана стоимость перехода от одной структуры к другой, то можно сравнивать различные стратегии реорганизации, например, по среднему результату функционирования системы за определенное время. Можно предложить следующие стратегии. Стратегия максимальных изменений – при каждом изменении внешней среды переходим к оптимальной организации. Стратегия минимальных изменений – при добавлении новых групп и исполнителей переходим от старой организации G к оптимальной относительно G организации (см. определение 7), затем удаляем "лишние” части графа. Большинство алгоритмов, описанных в данной работе и в [7], можно модифицировать для поиска относительно оптимальной организации. Стратегия сохранения структуры минимальной сложности (см. определение 6) – все время сохраняем одновременную организацию (см. определение 5), требующую наименьших перестроений при изменениях. Смоделировав поведение системы, можно выяснить, какая из стратегий (вышеперечисленных либо каких-то еще) наиболее приемлема в данных условиях, например, при данной интенсивности изменений внешней среды. Одной из задач моделирования является проверка наблюдаемой на практике закономерности: при жестких (интенсивных) внешних изменениях выгодно поддерживать простую структуру системы, усложняя ее по мере смягчения внешних воздействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Месарович М., Мако Д.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
2. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд “Проблемы управления”, 1999.
3. *Овсиевич Б.И.* Модели формирования организационных структур. Л.: Наука, 1979.
4. *Дементьев В.Т., Ерзин А.И., Ларин Р.М. и др.* Задачи оптимизации иерархических структур. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.
5. *Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е.* Прикладные задачи теории графов. Тбилиси, 1972.
6. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
7. *Воронин А.А., Мишин С.П.* Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева // Вестн. Волг. ун-та. 2001. Сер. 1: Математика. Физика. С. 78–98.