*Автоматика и телемеханика, № 2, 1997*

*Развивающиеся системы*

УДК 519.714.3

© 1997 г. Д. А. НОВИКОВ, канд. техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва)

# ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПРАВИЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ I. МЕХАНИЗМЫ ПЛАНИРОВАНИЯ[3]

**В настоящей работе определен класс активных систем, в котором при поиске оптимального механизма планирования можно без потери эффективности ограничиться рассмотрением только launch неманипулируемых механизмов.**

## 1. Введение

Основными требованиями к любому механизму управления активной системой, включающему механизм планирования и механизм стимулирования, являются его оптимальность (в смысле максимальной эффективности), согласованность (в смысле выполнения плана) и неманипулируемость (в смысле достоверности сообщаемой информации). Согласованные и неманипулируемые механизмы получили название правильных [1]. Естественно, хотелось бы, чтобы оптимальный механизм был правильным. Однако это не всегда имеет место.

Исследованию соотношений оптимальности и согласованности, оптимальности и неманипулируемости посвящено значительное число работ [1, 2 и 3–5 соответственно]. В работе [4] приведены достаточные условия оптимальности механизма открытого управления, при использовании которого сообщение достоверной информации является доминантной стратегией элементов. Требование существования доминантной стратегии является достаточно сильным и ему удовлетворяет узкий класс активных систем [5]. Принцип выявления (R. Myerson) [5], фактически, сводит многоэлементную задачу к одноэлементной, для которой оптимальность принципа открытого управления хорошо известна [1, 3]. Исключением в некотором смысле являются механизмы распределения ресурса и механизмы активной экспертизы [3], для которых доказано существование эквивалентных прямых механизмов. Обзор результатов отечественных и зарубежных авторов по механизмам с сообщением информации приведен в [5].

В настоящей работе определяется класс активных систем (предположения А1–А7), такой, что для любой процедуры планирования существует эквивалентная процедура, в которой сообщение достоверной информации является равновесием Нэша.

## 2. Модель активной системы

Рассмотрим активную систему (АС), состоящую из управляющего органа – центра и $n$ активных элементов (АЭ). Задача центра заключается в назначении планов активным элементам. Предположим, что центр не знает параметров, определяю-

[3]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00327а).

щих предпочтения элементов, поэтому планы назначаются на основании сообщаемой элементами информации. Коль скоро АЭ осознают возможность влияния на принимаемые центром решения, они сообщают такие заявки, чтобы назначенные на их основании планы были для них наиболее выгодны. Понятно, что при этом получаемая центром информация может вовсе не соответствовать истине. Значит появляется проблема искажения информации.

Возникает первый вопрос – может ли центр использовать такой механизм, в котором всем АЭ было выгодно сообщать достоверную информацию (то есть механизм, в котором сообщение правды – равновесие Нэша)? Второй вопрос – если существует такой "хороший" механизм, в котором все ведут себя честно, то какова его эффективность? Если он не оптимален (эффективность его низка), то может быть стоит смириться с неправдой ради оптимальности.

Оказывается, что в достаточно широком классе активных систем, определяемом ниже, возможно сконструировать такой механизм, который будет оптимальным и неманипулируемым. Перейдем к описанию модели.

Обозначим $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество активных элементов.

План $i$-го АЭ

$$x_i = \pi_i(s), \tag{1}$$

где $\pi(s)$ – процедура планирования, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – сообщения (заявки) элементов. Заявка $i$-го АЭ $s_i \in \Omega_i$, $s \in \Omega$, где $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$. Обозначим $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in D = \pi(\Omega)$,

$$s_{-i} = \left(s_1, \ldots, s_{(i-1)}, s_{(i+1)}, \ldots, s_n\right),$$

где $s_{-i}$ – обстановка для $i$-го АЭ, $i \in I$.

Обозначим SP – класс действительнозначных функций $q(x)$, определенных на $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $q(x) \in C(\mathbb{R}^1)$;

2) существует единственная точка $r \in \mathbb{R}^1$ (возможно $r = -\infty$ или $r = +\infty$) такая, что $q(x)$ строго монотонно возрастает при $x < r$ и строго монотонно убывает при $x > r$;

3) $q(r) < +\infty$.

Функции, принадлежащие классу SP называются однопиковыми.

Обозначим SP$'$ – класс действительнозначных функций $q(x)$, определенных на $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $q(x)$ – полунепрерывна сверху;

2) существуют точки $r^-$, $r^+ \in \mathbb{R}^1$ (возможно $r^- = r^+ = r$, $r^- = -\infty$ или $r^+ = +\infty$) такие, что $q(x)$ не убывает при $x \leqslant r^-$, постоянна при $x \in [r^-, r^+]$ и не возрастает при $x \geqslant r^+$;

3) $q(r^{\pm}) < +\infty$.

Функции, принадлежащие классу SP$'$ назовем квазиоднопиковыми.

Все последующее изложение будем проводить параллельно для однопиковых и квазиоднопиковых функций (соответственно используя для последних обозначение "$'$" и приводя для них результаты в круглых скобках).

Обозначим

$$G_i = \{j \in I : \pi_i(s) \ - \text{ не убывает по } s_j, \quad \forall s \in \Omega\},$$
$$H_i = \{j \in I : \pi_i(s) \ - \text{ не возрастает по } s_j, \quad \forall s \in \Omega\}.$$

Обозначим $\varphi_i(x_i)$ – функцию предпочтения $i$-го АЭ [2].

*Точку $r_i \in \mathbb{R}^1$ – назовем идеальной точкой i-го АЭ, а точку $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ – идеальной точкой. Для функций предпочтения из класса* SP$'$ *область* $R^* = \prod_{i=1}^{n} [r_i^-, r_i^+]$ *назовем идеальной областью.*

*Точка $s^* \in \Omega$ является равновесием Нэша, если $\forall\, i \in I$, $\forall\, s_i \in \Omega_i$*

$$(2) \qquad \varphi_i\left(\pi_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right)\right) \geqslant \varphi_i\left(\pi_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)\right).$$

Очевидно, при фиксированном множестве $\Omega$ и процедуре планирования $\pi(\cdot)$ равновесие Нэша зависит от идеальной точки, то есть $s^* = s^*(r)$.

Введем следующие предположения.

A1 (A1$'$). $\Omega_i = [d_i, D_i] \in \mathbb{R}^1$, $-\infty < d_i < D_i < +\infty$, $i \in I$.

A2. $\pi_i(s)$ – непрерывная строго возрастающая функция $s_i\, \forall\, s \in \Omega$, $i \in I$.

A2$'$. $\pi_i(s)$ – непрерывная неубывающая функция $s_i\, \forall\, s \in \Omega$, $i \in I$.

A3 (A3$'$). $\forall\, i \in I\ G_i \cup H_i = I$.

A4 (A4$'$). $\forall\, i \in I$, $\forall\, r \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{r}_i \in \mathbb{R}^1$ если

$$\pi_i\left(s^*\left(\widetilde{r}_i, r_{-i}\right)\right) \geqslant \pi_i\left(s^*\left(r_i, r_{-i}\right)\right),$$

то

$$(3) \qquad \forall\, i \in G_i \quad \pi_j\left(s^*\left(\widetilde{r}_i, r_{-i}\right)\right) \geqslant \pi_j\left(s^*\left(r_i, r_{-i}\right)\right),$$

$$(4) \qquad \forall\, i \in H_i \quad \pi_i\left(s^*\left(\widetilde{r}_i, r_{-i}\right)\right) \leqslant \pi_i\left(s^*\left(r_i, r_{-i}\right)\right).$$

A5. $\varphi_i \in$ SP.

A5$'$. $\varphi_i \in$ SP$'$.

A6. $r \notin D$.

A6$'$. $R^* \cap D = \varnothing$.

A7$'$. Для любого $i \in I$, для любых $s_{-i} \in \Omega_{-i}$, $s_i^1$, $s_i^2 \in \Omega_i$, $s_i^1 > s_i^2$,
если $\pi_i(s_i^1, s_{-i}) < r_i$, $\pi_i(s_i^2, s_{-i}) < r_i$, то АЭ сообщит $s_i^1$;
если $\pi_i(s_i^1, s_{-i}) > r_i$, $\pi_i(s_i^2, s_{-i}) > r_i$, то АЭ сообщит $s_i^2$.

Прокомментируем введенные предположения.

Предположение A1 ограничивает множество допустимых сообщений элементов и играет ключевую роль для последующего анализа. Если отказаться от ограниченности заявок, то, например, при $\varphi \in$ SP и $r = +\infty$, элементы будут сообщать бесконечные заявки и могут не достичь “разумного” равновесия. Ограничение заявок в некотором смысле гарантирует существование конечного равновесия Нэша. Отметим, что многие результаты (так называемые теоремы о невозможности) – парадокс Эрроу, например, обусловлены “неограниченностью” предпочтений элементов [5].

Второе предположение характеризует возможность монотонного воздействия каждого исполнителя на получаемый план в любой ситуации игры.

Третье и четвертое предположения накладывают ограничения на взаимодействие элементов. Предполагается, что элементы связаны, причем монотонно, при любой ситуации игры. Предположение A4 требует, чтобы изменение назначаемых планов при изменении идеальной точки одного из элементов соответствовало знаку “связи” между ними. В некоторых случаях можно выделить группы элементов, связанных “ресурсно” – когда при увеличении плана одного из АЭ планы остальных не увеличиваются, и “комплектно” – когда увеличение плана одного АЭ не приводит к уменьшению плана остальных.

Предположение A5 означает, что у каждого АЭ существует абсолютно оптимальный план $r_i$ (множество таких планов для SP$'$), причем чем ближе назначаемый центром план к абсолютно оптимальному, тем он лучше (не хуже) для АЭ. Важно отметить, что предпочтения АЭ сепарабельны – каждого конкретного элемента “не интересует” какие планы назначены остальным.

Предположение А6 не является критичным и, практически, не используется в дальнейшем. Оно свидетельствует лишь о том, что нет полного согласования интересов центра и элементов, то есть центр не может назначить абсолютно оптимальные для всех АЭ планы. Если абсолютно оптимальный план является допустимым, то задача вырождается и проблема манипулирования не появляется.

Предположение А7′ гласит, что если для двух различных стратегий $i$-го АЭ $s_i^1$ и $s_i^2$ назначаемый ему план строго меньше (больше) абсолютно оптимального, то АЭ сообщит большую (меньшую) заявку. Фактически, это – предположение о поведении элементов при выборе заявок (в процессе схождения к равновесию Нэша) – элемент будет стремиться использовать весь диапазон допустимых заявок, даже если это не приближает его к абсолютно оптимальному плану. Такое поведение АЭ имеет место, например, если выполнена гипотеза индикаторного поведения [2]. Введение подобного предположения обусловлено необходимостью "доопределить" положение равновесия (в А2′ и А5′ по сравнению с А2 и А5 мы отказались от строгой монотонности). Возможно вместо приведенного выше А7′ использовать следующее предположение:

для любых $i,\ j \in I$, для любых $r_i,\ r_j,\ \widetilde{r}_j \in \mathbb{R}^1$, $r_{-j} \in \mathbb{R}^{n-1}$ выполнено: если $\pi_i\left(s^*\left(r_j, r_{-j}\right)\right) \leqslant r_i$, $\pi_i\left(s^*\left(\widetilde{r}_j, r_{-j}\right)\right) \geqslant r_i$, то

$$s_i^*(r_j, r_{-j}) \geqslant s_i^*\left(\widetilde{r}_j, r_{-j}\right).$$

Седьмое предположение в такой "редакции", исключает из рассмотрения "экзотические" системы, в которых АЭ в равновесии "просит" больше, а получает меньше. Последний вариант выглядит менее "естественно" и при его использовании усложняется доказательство приводимой ниже леммы 3′.

Предположениям А1–А7 удовлетворяют, например, механизмы распределения ресурса [3], затрат, механизмы активной экспертизы [3], механизмы планирования в производственных системах при фиксированном суммарном объеме выпуска или при требованиях к пропорции (комплектности) выпускаемых изделий и т.д.

## 3. Оптимальность неманипулируемых процедур планирования

Равновесие Нэша, определяемое (2), обладает следующим свойством

*Лемма 1 (1′). Если выполнено* А1, А2, А5 (А1′, А2′, А5′, А7′), *то для любого* $r \in \mathbb{R}^n$ *и для любого* $i \in I$

1 (1′). *Если* $\pi_i(s^*(r)) < r_i(r_i^-)$, *то* $s_i^*(r) = D_i$.

2 (2′). *Если* $\pi_i(s^*(r)) > r_i(r_i^+)$, *то* $s_i^*(r) = d_i$.

3. *Если* $s_i^*(r) \in (d_i, D_i)$, *то* $\pi_i(s^*(r)) \equiv r_i$.

Доказательство леммы 1 приведено в приложении.

Построим соответствующий механизму $\pi(\cdot)$ прямой механизм $g$, определив его следующим образом:

$$g_i(\widetilde{r}) = \pi_i\left(s^*\left(\widetilde{r}\right)\right), \quad i \in I, \tag{5}$$

где $\widetilde{r} = (\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2, \ldots, \widetilde{r}_n)$ – сообщение элементов о своей идеальной точке $r$.

Сообщение $r$ является равновесием Нэша, если $\forall\, i \in I$, $\forall\, \widetilde{r}_i \in \mathbb{R}^1$

$$\varphi_i(\pi_i(s^*(r_i, r_{-i}))) \geqslant \varphi_i\left(\pi_i\left(s^*\left(\widetilde{r}_i, r_{-i}\right)\right)\right),$$

где $r_{-i} = \left(r_1, \ldots, r_{(i-1)}, r_{(i+1)}, \ldots, r_n\right)$.

Следует отметить, что вопрос о существовании и единственности равновесия Нэша $s^*(r)$ не принципиален для проводимого исследования и в настоящей работе не рассматривается. Действительно, утверждения всех приводимых результатов можно читать следующим образом: "Если для некоторого $r \in \mathbb{R}^n$ существует равновесие

Нэша (может быть не единственное), то любое из этих равновесий удовлетворяет..." и далее по тексту.

В дальнейшем нам потребуются свойства механизма $g$, даваемые следующими леммами:

*Лемма 2 (2′). Если выполнено* A1, A2, A5 (A1′, A2′, A5′, A7′), *то для любого* $r \in \mathbb{R}^n$ *и для любого* $i \in I$

1. *Если* $g_i(r) < r_i$, *то* $\forall \widetilde{r}_i \geqslant g_i(r)$, $\forall j \in I$

$$g_j\left(r_{-i}, \widetilde{r}_i\right) = g_j(r).$$

2. *Если* $g_i(r) > r_i$, *то* $\forall \widetilde{r}_i \leqslant g_i(r)$, $\forall j \in I$

$$g_j\left(r_{-i}, \widetilde{r}_i\right) = g_j(r).$$

Справедливость леммы 2 (2′) следует из леммы 1 (1′).

*Лемма 3 (3′). Если выполнено* A1–A5 (A1′–A5′, A7′), *то для любого* $r \in \mathbb{R}^n$ *и для любого* $i \in I$

1. *Если* $g_i(r) < r_i$, *то* $\forall \widetilde{r}_i < g_i(r)$

$$g_i\left(r_{-i}, \widetilde{r}_i\right) \leqslant g_i(r);$$

2. *Если* $g_i(r) > r_i$, *то* $\forall \widetilde{r}_i > g_i(r)$

$$g_i\left(r_{-i}, \widetilde{r}_i\right) \geqslant g_i(r).$$

Доказательство леммы 3 (3′) приведено в приложении.

Лемма 2 (2') утверждает, что при изменении идеальной точки в определенных пределах ситуация равновесия не меняется.

Лемма 3 (3') характеризует монотонность изменения итогового равновесия при изменении идеальной точки в определенных пределах.

Для поиска равновесия Нэша при фиксированном $r$ и функциях предпочтения из класса SP можно использовать следующий алгоритм:

*Алгоритм 1.*

1. Вычислить все комбинации $\{s_i\}_{i=1}^n$, где $s_i$ равно либо $d_i$, либо $D_i$, либо таково, что $x_i = r_i$ (в последнем случае необходимо решить систему из $k$, в общем случае нелинейных, алгебраических уравнений, где $k$ – число АЭ, получающих абсолютно оптимальные для себя планы).

2. Проверить полученные комбинации на соответствие условий 1 и 2 леммы 1.

Число комбинаций, определяемых на первом шаге, очевидно не превышает $3^n$. Поэтому алгоритм закончится за конечное число шагов. Результаты лемм 2 и 3 существенно облегчают анализ равновесия Нэша при изменении идеальной точки.

Для функций предпочтения из класса SP′ можно предложить алгоритм, отличающийся от алгоритма 1 тем, что на первом этапе необходимо проверять для $k$ элементов выполнение условия $x_i \in \left[r_i^-, r_i^+\right]$.

Докажем для рассматриваемой модели существование эквивалентного прямого механизма (эквивалентным прямым механизмом называется такой прямой механизм, удовлетворяющий (5), в котором элементы сообщают непосредственно параметры своих функций предпочтения и сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для всех элементов [5]). В рамках введенных предположений справедлива следующая

*Теорема 1 (1′). Если выполнено* A1–A7 (A1′–A7′), *то для любого механизма существует эквивалентный прямой механизм.*

Доказательство теоремы 1 (1′) приведено в приложении.

Таким образом, если в исходном механизме существует равновесие Нэша (одно или несколько), то существует равновесие в соответствующем прямом механизме. В этом равновесии все элементы и, естественно, центр, получают те же полезности, что и в исходном механизме, и сообщаемая АЭ информация достоверна.

Используя результат теоремы 1, центр может предложить элементам не сообщать заявки, а честно сказать, какие планы они считают для себя абсолютно оптимальными. На основании этой информации центр может пообещать "восстановить" равновесные заявки элементов. Так как центр использует в прямом механизме заявки, которые были равновесными в исходном механизме, результат не изменится, но центр получит представление об истинных предпочтениях элементов. Поэтому аналогичный подход к управлению получил в ряде работ название механизма выявления [5].

## 4. Заключение

В настоящей работе определен класс активных систем, в которых оптимальными являются неманипулируемые механизмы планирования. Теоремы о существовании неманипулируемых механизмов для ряда моделей [3] являются частными случаями полученных результатов.

Теорема 1 позволяет при рассмотрении активных систем, удовлетворяющих приведенным выше ограничениям, искать оптимальный механизм планирования сразу в классе неманипулируемых механизмов.

## *ПРИЛОЖЕНИЕ*

*Доказательство леммы 1.*

Предположим, что $\exists\, r \in \mathbb{R}^n (R^* \subseteq \mathbb{R}^n)$ и $\exists\, i \in I$ такие, что $\pi_i(s^*(r)) < r_i(r_i^-)$ и $s_i^*(r) < D_i$. Тогда, сообщая $s_i = D_i$, $i$-й АЭ может обеспечить в силу А2 (А2$'$) $\pi_i(s_{-i}^*, D_i) > (\geqslant) \pi_i(s^*(r))$, что в соответствии с А5 (А5$'$) противоречит (4) (в случае равенства для SP$'$ элемент сообщит $s_i = D_i$ в силу А7$'$).

Предположим, что $\exists\, r \in \mathbb{R}^n (R^* \subseteq \mathbb{R}^n)$ и $\exists\, i \in I$ такие, что $\pi_i(s^*(r)) > r_i(r_i^+)$ и $s_i^*(r) > d_i$. Тогда, сообщая $s_i = d_i$, $i$-й АЭ может обеспечить в силу А2 (А2$'$) $\pi_i(s_{-i}^*(r), d_i) < (\leqslant) \pi_i(s^*(r))$, что в соответствии с А5 (А5$'$) противоречит (2) (в случае равенства для SP$'$ элемент сообщит $s_i = d_i$ в силу А7$'$).

Пусть $\exists\, r \in \mathbb{R}^n$ и $\exists\, i \in I$ такие, что $s_i^*(r) \in (d_i, D_i)$ и $\pi_i(s^*(r)) \neq r_i$. Предположим, что $\pi_i(s^*(r)) < r_i$. Тогда в соответствии с пунктом 1 утверждения настоящей леммы $s_i^*(r) = D_i$ – противоречие. Предположим, что $\pi_i(s^*(r)) > r_i$. Тогда в соответствии с пунктом 2 утверждения настоящей леммы $s_i^*(r) = d_i$ – противоречие.

Лемма 1 доказана.

*Доказательство леммы 3 (3').*

Докажем первое утверждение леммы (второе утверждение доказывается полностью аналогично). Предположим противное – пусть $\exists\, r \in \mathbb{R}^n$ и $\exists\, i \in I$ и $\exists\, \widetilde{r}_i \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\widetilde{r}_i < g_i(r) < r_i$ и

$$g_i(r_{-i}, \widetilde{r}_i) > g_i(r). \tag{П.1}$$

В силу леммы 1 (1$'$):

$$s_i^*(r) = D_i, \quad s_i^*(\widetilde{r}_i, r_{-i}) = d_i.$$

Рассмотрим, как изменится равновесная стратегия $j$-го АЭ ($j \neq i$) при изменении в прямом механизме сообщения $r$ на сообщение $(\widetilde{r}_i, r_{-i})$.

Так как $\pi_i(s^*(\widetilde{r}_i, r_{-i})) > \pi_i(s^*(r))$, то по свойству (3) A4 (A4′)

$$\pi_j(s^*(\widetilde{r}_i, r_{-i})) \geqslant \pi_j(s^*(r)) \, \forall j \in G_i,$$

а по свойству (4) A4 (A4′)

$$\pi_j(s^*(\widetilde{r}_i, r_{-i})) \leqslant \pi_j(s^*(r)) \, \forall j \in H_i.$$

Фиксируем произвольное $j \neq i$.

Если $j \in G_i$, то возможны следующие случаи:

1) $\pi_j(s^*(r)) = r_j$. Тогда $\pi_j(s^*(\widetilde{r}_i, r_{-i})) \geqslant r_j$. Значит, в соответствии с A2 (A2′), A5 (A5′) и леммой 1 (1′)

$$s_j^*(\widetilde{r}_i, r_{-i}) \leqslant s_j^*(r);$$

2) $\pi_j(s^*(r)) < r_j$. Тогда по лемме 1 (1′) $s_j^*(r) = D_j$;

3) $\pi_j(s^*(r)) > r_j$. Тогда по лемме 1 (1′) $s_j^*(r) = d_j$. Так как $\pi_j(s^*(\widetilde{r}_i, r_{-i})) \geqslant \pi_j(s^*(r)) > r_j$, то по лемме 1 (1′) $s_j^*(\widetilde{r}_i, r_{-i}) = d_j$.

Если $j \in H_i$, то возможны следующие случаи:

1) $\pi_j(s^*(r)) = r_j$. Тогда $\pi_j(s^*(\widetilde{r}_i, r_{-i})) \leqslant r_j$. Значит, в соответствии с A2 (A2′), A5 (A5′) и леммой 1 (1′)

$$s_j^*(\widetilde{r}_i, r_{-i}) \geqslant s_j^*(r);$$

2) $\pi_j(s^*(r)) < r_j$. Тогда по лемме 1 (1′) $s_j^*(r) = D_j$. Так как $\pi_j(s^*(\widetilde{r}_i, r_{-i})) \leqslant \pi_j(s^*(r)) < r_j$, то по лемме 1 (1′) $s_j^*(\widetilde{r}_i, r_{-i}) = D_j$;

3) $\pi_j(s^*(r)) > r_j$. Тогда по лемме 1 (1′) $s_j^*(r) = d_j$.

Таким образом, мы доказали, что

$$s_j^*(\widetilde{r}_i, r_{-i}) \leqslant s_j^*(r) \quad \forall j \in G_i;$$
$$s_j^*(\widetilde{r}_i, r_{-i}) \geqslant s_j^*(r) \quad \forall j \in H_i.$$

Так как в соответствии с A3 (A3′) $H_i \cup G_i = I$, то, используя A2 (A2′) и A5 (A5′), получаем противоречие с (П.1).

Лемма 3 (3′) доказана.

*Доказательство теоремы 1(1′).*

Достаточно показать, что сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для любого $r \in \mathbb{R}^n$ (при этом значения целевых функций центра и всех АЭ в исходном механизме $\pi(\cdot)$ и в механизме $g(\cdot)$ совпадут в силу (5), то есть совпадут и их эффективности).

Предположим противное. Пусть $\exists i \in I$ и $\exists r \in \mathbb{R}^n$ такие, что $i$-й АЭ, сообщая $\widetilde{r}_i \neq r_i$, может обеспечить:

$$\text{(П.2)} \qquad \varphi_i(g_i(\widetilde{r}_i, r_{-i})) > \varphi_i(g_i(r)).$$

Возможны следующие случаи:

1) $g_i(r) = r_i$; тогда в соответствии с A5 (A5′) (П.2) не имеет места;

2) $g_i(r) \neq r_i$. Для определенности предположим, что $g_i(r) < r_i$ (случай $g_i(r) > r_i$ рассматривается полностью аналогично). В силу леммы 2 (2′), если $\widetilde{r}_i \geqslant g_i(r)$, то ситуация равновесия не изменится. Если же $\widetilde{r}_i < g_i(r)$, то в силу леммы 3 (3′) (П.2) противоречит A5 (A5′).

Теорема 1 (1′) доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В. Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
2. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
3. *Бурков В. Н., Данев Б., Еналеев А. К. и др.* Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989.
4. *Бурков В. Н., Еналеев А. К.* Оптимальность принципа открытого управления // АиТ. 1985. № 3. С. 73–80.
5. *Бурков В. Н., Еналеев А. К., Новиков Д. А.* Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // АиТ. 1996. № 3. С. 3–25.


Поступила в редакцию 28.12.95