УДК 519.714.3:519.21

© 1994 г. **В.Н. БУРКОВ, д-р. техн. наук,**
А.К. ЕНАЛЕЕВ, канд. техн. наук,
Д.А. НОВИКОВ
(Институт проблем управления РАН, Москва)

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ

Рассматривается активная система с одним стохастическим элементом. Дается постановка задачи синтеза оптимальной функции стимулирования для случая симметричной информации. Описываются и исследуются методы ее решения.

1. Введение

В работах по теории активных систем (АС) детально исследована детерминированная задача синтеза оптимальной функции стимулирования в двухуровневых иерархических системах [1]. Детерминированность подразумевает отсутствие случайных возмущений в системе и полную информированность центра о моделях активных элементов (АЭ). Однако функционирование АС в условиях неопределенности представляется недостаточно изученным. Среди работ отечественных авторов, рассматривавших стохастические задачи теории активных систем, следует выделить статьи [2–4]. В [2] описан такой механизм функционирования АС, при котором АЭ выбирает свое состояние, зная реализовавшееся значение случайной величины, а центр должен выбирать функцию стимулирования, исходя лишь из знания функции распределения.

В данной статье рассматривается стохастическая задача оптимального стимулирования в двухуровневой иерархической системе, когда и управляющий элемент (центр), и АЭ имеют одинаковую априорную информацию: и тот, и другой знают лишь функцию распределения некоторого возмущения (случайной величины), от которой зависит результат деятельности АЭ.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из управляющего элемента (центра) и одного АЭ. Результатом деятельности АЭ является некоторая величина z. От реализации z центр получает доход $\pi(z)$ и выплачивает АЭ вознаграждение $\sigma(z)$ ($\sigma(z)$ – функция стимулирования). Целевая функция центра имеет вид:

$$\Phi\big(\sigma(z); z\big) = v\big(\pi(z) - \sigma(z)\big), \tag{1}$$

где $v(\cdot)$ – функция полезности центра.

Целевая функция АЭ:

$$f\big(\sigma(z); z\big) = u\big(\sigma(z) - c(z)\big), \tag{2}$$

где $c(z)$ – затраты АЭ на достижение результата z; $u(\cdot)$ – функция полезности АЭ.

Влияние случайных внешних возмущений на функционирование рассматриваемой системы описывается зависимостью результата z от случайной величины θ (состояния природы), имеющей функцию распределения $F(\theta)$. Таким образом,

$$(3)\qquad z = z(y;\theta),$$

где y – набор параметров, непосредственно выбираемых АЭ. В дальнейшем мы будем называть y внутренним планом АЭ и считать, что затраты АЭ определяются только его внутренним планом.

Содержательно это можно интерпретировать следующим образом: перед началом работы АЭ планирует для себя состояние y и предпринимает усилия для его достижения с затратами $c(y)$, но в процессе работы на него воздействуют случайные факторы и результатом его деятельности является z, за который АЭ получает вознаграждение $\sigma(z)$.

Опишем порядок функционирования активной системы. Центр, зная $F(\theta)$, выбирает функцию стимулирования $\sigma(z)$, принадлежащую некоторому классу S, которая максимизировала бы его ожидаемую полезность. При этом он руководствуется тем, что АЭ стремится выбрать из множества допустимых внутренних планов А такой, который максимизировал бы его ожидаемую полезность.

Таким образом, задача поиска оптимальной функции стимулирования имеет вид:

$$(4)\qquad E\Phi\big(z(y^*;\theta);\sigma(z)\big) \Rightarrow \max_{\sigma(z)\in S}$$

при условии:

$$(5)\qquad y^* \in \operatorname*{argmax}_{y\in A} Ef\big(z(y,\theta);\sigma(z)\big).$$

В иностранной литературе задачи типа (4), (5) изучаются теорией контрактов [5–10]. В общей постановке она представляет собой нестандартную задачу поиска экстремума некоторого функционала от искомой функции $\sigma(z)$ и действия АЭ при условии, что действие АЭ определяется в результате решения задачи на поиск экстремума, содержащей искомую функцию.

Среди известных методов решения задачи (4), (5) следует выделить подход первого порядка, при котором вместо (5) y^* полагается стационарной точкой функции $f(\cdot)$. Возможность его применения требует выполнения ряда условий [11], сильно ограничивающих класс решаемых задач. Подробно останавливаться на описании этого метода мы не будем.

К сожалению, до настоящего времени не существует общего метода решения задачи теории контрактов (4), (5). Все рассматриваемые в литературе, и в данной статье в частности, модели ограничиваются простейшим случаем, в котором множество A содержит конечное число элементов.

Связь теории контрактов с вероятностными задачами согласованного планирования будет описана в последующих работах.

3. Синтез функции стимулирования

Рассмотрим два возможных способа усреднения в задаче (4), (5). Модель 1, соответствующая усреднению по реализациям случайной величины в (3), в литературе не описана. В модели 2, по сравнению с двухшаговым методом, предлагается альтернативный метод поиска функции стимулирования. В заключение доказывается утверждение об эквивалентности этих моделей. Конкретизируем постановку задачи.

Модель 1. Положим, что и центр, и АЭ нейтральны к риску, т. е. функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ линейны. Пусть множество допустимых внутренних планов конечно ($A = \{y_i : i = \overline{1,n}\}$). Пусть θ может с вероятностью $p_j \geqslant 0$ принимать одно из конечного числа значений θ_j ($j = \overline{1,m}$). Очевидно $\sum\limits_{j=1}^{m} p_j = 1$.

Обозначим:

$$z_{ij} = z(y_i;\theta_j);\ \ s_{ij} = s(z_{ij});\ \ p_{ij} = p(z_{ij});\ \ c_i = c(y_i);\ \ I = \{1\dots n\};\ \ i,j = \overline{1,n}.$$

Множество S задается системой неравенств:

$$d_{ij} \leqslant s_{ij} \leqslant D_{ij}.$$

Дискретный аналог задачи (4), (5) имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_{i^*j}p_j - \sum_{j=1}^{m} s_{i^*j}p_j \to \max_{s_{i^*j}\in S}, \tag{6}$$

где i^* определяется из условия

$$\sum_{j=1}^{m} s_{ij}p_j - c_i \to \max_{i\in I}. \tag{7}$$

При этом необходимо учитывать, что один и тот же результат z может быть получен при различных внутренних планах, т. е.

$$z_{ij} = z_{kl} \text{ при } i \neq k, j \neq l. \tag{8}$$

Если выполнено (8), то s_{ij} должно совпадать с s_{kl}.

Условия (7) могут быть заменены на

$$\forall k, i = \overline{1,n}:\ \ \sum_{j=1}^{m} s_{ij}p_j - c_i \geqslant \sum_{j=1}^{m} s_{kj}p_j - c_k. \tag{9}$$

В данном случае решаются n задач линейного программирования (каждая для фиксированного i): максимизировать (6) при условиях (8), (9) ($k = \overline{1,n}$). После этого выбирается та задача, в которой ожидаемая полезность центра максимальна. Предложенный выше метод обобщается и на случай нелинейной функции полезности центра.

При числе попарно различных возможных результатов, совпадающем с числом допустимых внутренних планов, возможен другой способ решения задачи (6), (7). Обозначим:

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_{ij}p_j = \pi_i;\quad \sum_{j=1}^{m} s_{ij}p_j = s_i;\quad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Тогда (6), (7) примет вид:

$$\pi_i - s_i \to \max_{s_i\in S'}, \tag{11}$$

$$s_i - c_i \to \max_{i\in I}, \tag{12}$$

где S' – образ множества S при отображении (10).

Задача (11), (12) описана в [1,12]. Пусть мы знаем ее решение s_i^0, $i = \overline{1,n}$. Для нахождения s_{ij} воспользуемся системой уравнений (10):

$$\sum_{j=1}^{m} s_{ij}p_j = s_i^0;\qquad i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Ниже будут рассмотрены условия существования решения системы (13).

Модель 2. В модели 1 рассматривалось усреднение целевых функций центра и АЭ по всем реализациям случайной величины. Рассмотрим другой способ описания влияния возмущений на функционирование активной системы.

Пусть АЭ планирует для себя состояние $y \in A$, но в результате случайного воздействия попадает в состояние $z \in A^0$ с вероятностью $p(z,y) \geqslant 0$; $\left(\int\limits_{A^0} p(z,y)dz = 1\right)$.

В данной постановке сама случайная величина θ явно не присутствует. Пусть функции полезности центра и АЭ линейны, тогда задача (4), (5) примет вид:

$$\int\limits_{A^0} \pi(z)p(z,y)dz - \int\limits_{A^0} \sigma(z)p(z,y)dz \Rightarrow \max_{\sigma(z)\in S} \tag{14}$$

при

$$\int\limits_{A^0} \sigma(z)p(z,y)dz - c(y) \to \max_{y\in A}. \tag{15}$$

Опишем двухэтапный метод, предложенный в [5]. При использовании этого алгоритма на первом этапе минимизируются затраты центра на стимулирование при условии его согласованности, т. е. решается задача

$$\int\limits_{A^0} \sigma(z)p(z,y)dz \to \min_{\sigma(z)\in S} \tag{16}$$

при условии

$$\int\limits_{A^0} \sigma(z)p(z,x)dz - c(x) \geqslant \int\limits_{A^0} \sigma(z)p(z,y)dz - c(y) \qquad \forall y \in A. \tag{17}$$

Решением этой задачи является некоторая функция $h(x)$.

На втором этапе из решения задачи

$$\int\limits_{A^0} \pi(z)p(z,x)dz - h(x) \to \max_{x\in X} \tag{18}$$

определяется x^*-оптимальный с точки зрения центра внутренний план АЭ (X – множество $x \in A$ и удовлетворяющих (17)). Заметим, что описанный выше двухэтапный метод поиска оптимальной функции стимулирования и оптимального внутреннего плана элемента выявляет аналогию данной задачи с задачами стимулирования, в которых план центра фигурирует в явном виде, т. е. допускается трактовка x^*, найденного из (18), как плана центра, удовлетворяющего условиям согласованности [1].

Рассмотрим дискретный аналог задачи (14)–(15). Предположим, что множество $A \equiv I$ конечно. Стохастическая матрица переходов $P = \|p_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ задает вероятности реализации результата i при внутреннем плане j. Очевидно, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. В этом случае целевые функции центра и АЭ задаются выражениями:

$$\Phi(i) = \sum_{j=1}^{n}(\pi_j - \sigma_j)p_{ij} \to \max_{\sigma_j\in S}, \tag{19}$$

$$f(i) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j p_{ij} - c_i \to \max_{i\in I}, \tag{20}$$

где σ_j – искомая функция стимулирования.

Введем обозначения:

$$(21)\qquad s(i)=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j p_{ij}.$$

$$(22)\qquad \pi(i)=\sum_{j=1}^{n}\pi_j p_{ij}.$$

В результате имеем

$$(23)\qquad \Phi(i)=\pi(i)-s(i)\Rightarrow \max_{s(i)\in S'},$$

$$(24)\qquad f(i)=s(i)-c(i)\Rightarrow \max_{i\in I},$$

где S' – образ множества S при отображении (21).

Получив решение $s(i)$ задачи (23), (24), мы должны "восстановить" с помощью (21) решение исходной задачи (19), (20). Имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$(25)\qquad \sum_{j=1}^{n}\sigma_j p_{ij}=s(i),\qquad i=\overline{1,n}$$

относительно n чисел σ_j.

Достаточное условие существования решения дискретной задачи (25) задается следующим утверждением.

Если $p_{ij}>\frac{1}{2}$, $i=\overline{1,n}$, то матрица P не вырождена.

Справедливость этого утверждения следует из достаточного условия невырожденности произвольной матрицы B с неотрицательными элементами $b_{ij}\geqslant 0$: $b_{ii}>$ $>\sum\limits_{i\neq j}b_{ij}$ и стохастичности матрицы P. Содержательно это утверждение означает, что результат деятельности АЭ совпадает с его внутренним планом с вероятностью, большей, чем 1/2. При одномодальных распределениях это предположение довольно естественно, так как если АЭ знает распределение вероятностей P, то при наличии регулярного "сноса" (т. е. если $\exists j: p_{ij}>1/2;\ p_{ij}>p_{ii}$) он скорректирует свой внутренний план.

Увеличение вероятности перехода из точки внутреннего плана АЭ в какую-либо другую точку (или увеличение дисперсии для одномодальной функции распределения) приводит к уменьшению определителя стохастической матрицы. При этом задача становится некорректной. В частности, это проявляется в появлении отрицательных решений. В общем случае условия существования неотрицательных решений системы (25) требуют дополнительного исследования. Аналогичные явления происходят при многомодальных функциях распределения и регулярном "сносе", о чем свидетельствуют результаты численных экспериментов.

Рассмотрим связь между моделями 1 и 2. Мы неоднократно подчеркивали аналогию задач (11), (12) и (23), (24). Докажем следующее утверждение.

Решение задачи, описываемой моделью 1 (6), (7), совпадает с решением задачи, описываемой моделью 2 (19), (20), при условии, что число попарно различных элементов в множестве A^0 в модели 1 равно n.

Доказательство. В модели 1 мы имеем $m\cdot n$ неизвестных значений функции стимулирования s_{ij} $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$. Но в соответствии с (8), если существуют только n попарно различных результатов x_{ij}, то справедливо: $\sigma_k=s_{ij}$ при $x_{ij}=k$; т. е. σ_k – стимулирование за результат $x_{ij}=k$ при всех i и j: $x_{ij}=k$. Число различных k равно n. Вместо $m\cdot n$ независимых s_{ij} мы получили n неизвестных σ_k, каждое из которых входит в математическое ожидание с весом $p(i;k) = \sum\limits_{j:\,x(i,j)=k} p_j$; $k, i = \overline{1,n}$.

В результате получили задачу

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k p(i,k) = s_i; \qquad i = \overline{1,n},$$

где s_i и $p(i,k)$ известны, что совпадает с моделью 2.

Авторами был разработан ряд программ для ПЭВМ, предназначенных для численного решения модели 2 и анализа этого решения.

4. Заключение

Мы рассмотрели две постановки стохастических задач оптимальнсго стимулирования. Установлена их эквивалентность. Задача, соответствующая модели 2, была решена путем сведения ее к известной детерминированной задаче.

Проведенный анализ решения свидетельствует о возможности обобщения ряда результатов, полученных ранее в детерминированной теории активных систем, на стохастический случай.

Приведенные методы решения задач, а также реализованные авторами на ЭВМ численные алгоритмы могут быть использованы для качественного и количественного анализа систем стимулирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. *Еналеев А.К., Лавров Ю.Г.* Оптимальное стимулирование в системе с одним стохастическим элементом // АиТ. 1990. № 2. С. 104–113.
3. *Еналеев А.К., Казахбаева Г.У.* Стимулирование эффективности управления производственными процессами // Вопросы создания АСУТП и АСУП. Алма-Ата: Каз. политехн. ин-т, 1983. С. 44–52.
4. *Кононенко А.Ф., Халезов А.Д.* Об одной игре двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при неточной информации о множестве выбора партнеров // Вопрсы прикладной математики. Иркутск: Сиб. энергетич. ин-т, 1975. С. 44–53.
5. *Grossman S., Hart O.D.* An analysis of the principal-agent problem // Econometrica. 1983. V. 51. № 1. P. 7–47.
6. *Hart O.D., Holmstrom B.* Theory of contracts // Advances in economic theories. Vth world congress. Cambridge Univ. press, 1987. P. 71–155.
7. *Azariadis C.* Impplicit contracts and underemployment equilibria // J. of Political Economy. 1975. P. 1183–1202.
8. *Hart O.D.* Optimal labour contracts under assymetric information // Rev. of Econ. Studies. 1983. V. 50. № 160. P. 3–35.
9. *Spence M., Zeckhauser R.* Insurance, information and individual action // AER. 1971. № 61. P. 380–387.
10. *Harris M., Raviv A.* Some results on incentive contracts // AER. 1978. № 68. P. 20–30.
11. *Rogerson W.* The first-order approach to principal-agent problem // Econometrica. 1985. V. 53. № 6. P. 1357–1368.
12. *Гермейер Ю.Б.* Теория игр с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 25.02.93