УДК 519.86

 В. Н. БУРКОВ, д-р техн. наук,
Д. А. НОВИКОВ, канд. техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ. II

Исследуются свойства решения задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в вероятностной активной системе. Приводится решение этой задачи для системы с простым активным элементом.

1. Введение

В работе [1] рассматривалась задача синтеза оптимальной функции стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью. Основное внимание, помимо описания вычислительных методов решения, было сконцентрировано на исследовании условий оптимальности так называемых “скачкообразных” решений. В настоящей работе исследуются свойства оптимального решения, предлагается обобщение решения одноэлементной задачи на многоэлементные системы со слабо связанными элементами и приводится решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования для активной системы с простым активным элементом [2]. Постановка задачи, система обозначений и допущения приведены в [1].

2. Свойства оптимального решения

Приведенные в [1] результаты позволяют рассматривать величины $|y_2 - y^*|$, $|x_0 - y^*|$ как некоторые характеристики эффективности используемых механизмов. В соответствии с теоремой 3 работы [1], если $y^* = x_0$, то система стимулирования $\mathcal{X}_1$ оптимальна. Таким образом, величина x_0 может рассматриваться как абсолютная оценка сверху максимального действия активного элемента (АЭ), которое может быть реализовано в данной вероятностной активной системе. Отметим, что это именно абсолютная оценка, так как она не всегда достижима оптимальной системой стимулирования.

Более того, справедлив следующий результат.

Утверждение 1. Система стимулирования, реализующая действие x_0, оптимальна в M.

Доказательство утверждения 1 практически повторяет доказательство теоремы 3 в работе [1] и не приводится.

Следовательно, естественно ввести следующий критерий эффективности механизма стимулирования из класса M:

$$K_x(\mathcal{X}) = \frac{y^* - y_2}{x_0 - y_2}.$$

Очевидно $0 \leqslant K_x \leqslant 1$, причем $K_x = 1$ тогда и только тогда, когда $y^* = x_0$, $K_x = 0$ при $y^* = y_2$ по определению. Задача синтеза оптимальной функции стимулирования может быть теперь сформулирована не в терминах максимизации ожидаемого действия элемента, а как задача выбора системы стимулирования с максимальной эффективностью.

Простая структура скачкообразного решения, а также приведенные в [1] содержательные интерпретации подсказывают, что это решение должно обладать рядом естественных свойств, присущих реальным системам стимулирования, используемым на практике. Ниже устанавливаются и обосновываются некоторые такие свойства. В рамках принятых предположений справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Существуют окрестности точек x^* и y^*, в которых x и y являются непрерывно дифференцируемыми функциями параметра C.

Доказательства всех утверждений вынесены в приложения.

Свойства зависимости $y = y(C)$ представляют интерес как с содержательной точки зрения, так и для анализа многоэлементных вероятностных активных систем. Поэтому приведем результат, характеризующий некоторые полезные свойства решения.

Теорема 1.

а. Множество действий, реализуемых системами стимулирования из класса M_x, связно и составляет $S = [y_2, y^*]$.

б. Величина ожидаемого действия АЭ является неубывающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра C.

Следствие. Если $y_1 \leqslant y^*$, то система стимулирования из M_x оптимальна в M. Это утверждение, вытекающее из связности множества S, представляется достаточно естественным: если интересы центра и АЭ не сильно рассогласованы, то рассматриваемая система стимулирования оптимальна.

Вторая часть теоремы 1 имеет простую содержательную интерпретацию, соответствующую практическому опыту, а именно: с ростом фонда заработной платы (ФЗП) максимальное реализуемое действие АЭ (множество достижимости) не уменьшается.

Непрерывная зависимость максимального действия, реализуемого системой стимулирования из класса M_x, от ограничений механизма стимулирования позволяет определить минимальную величину C, необходимую для того, чтобы реализовать заданное действие.

До сих пор мы исследовали одноэлементную задачу. Анализ имеющихся на настоящий момент в отечественной и зарубежной литературе (см. [3]) методов решения многоэлементных задач свидетельствует о том, что как и в базовой модели теории контрактов, так и в теории активных систем в них не существует методов получения аналитических решений. Увеличение числа элементов в системе приводит к очень быстрому росту вычислительной сложности соответствующих задач математического программирования и в еще большей степени лишает возможности качественного анализа решения. В этом смысле обнадеживающе выглядят результаты, полученные при исследовании скачкообразных решений. Действительно, имея условия оптимальности для одноэлементной статической системы, можно анализировать с их помощью некоторые классы более сложных задач.

3. Многоэлементные системы со слабо связанными элементами

Рассмотрим вероятностную активную систему со слабо связанными элементами. Под системой со слабо связанными элементами будем понимать такую систему, в которой результат деятельности каждого АЭ зависит только от его собственных действий и не зависит от действий других АЭ, но существуют общие для всей системы ограничения механизма стимулирования. В приведенной ниже модели в качестве такого ограничения выступает ограниченность общего ФЗП.

Рассмотрим следующую модель. В активной системе, состоящей из центра и m активных элементов, доход центра $H(y_1, y_2, \dots, y_m)$ зависит от действий всех АЭ y_i, $i = \overline{1, m}$. В распоряжении центра имеется ограниченное количество ресурса R. К примеру, R – фонд заработной платы или количество льготных квот. Задачей центра является распределение ресурса таким образом, чтобы обеспечить максимальное значение своей ожидаемой целевой функции при условии, что выбираемые элементами действия максимизируют их собственные ожидаемые полезности при заданной системе стимулирования, т.е. решается следующая задача:

$$(1)\qquad EH(y_1, y_2, \dots, y_m) \Rightarrow \max_C,$$

$$(2)\qquad Ef_i(y^*) \geqslant Ef_i(y) \quad \forall\, y \in A, \quad i = \overline{1, m},$$

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{m} \chi_i(z_i) \leqslant R \quad \forall\, z \in A_0,$$

где E означает взятие математического ожидания.

Отметим, что условие (2) есть условие максимизации целевой функции элемента выбираемым им действием, т.е. величины y_i^* зависят от соответствующих ограничений механизма стимулирования $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$.

Потребуем, чтобы ограничение (3) выполнялось с вероятностью единица, т.е. чтобы в любой возможной ситуации расходы центра на стимулирование не превосходили имеющийся у него ФЗП:

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{m} c_i \leqslant R.$$

Зная полученное в [1] решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования для одноэлементной системы, т.е. зависимости $y_i^*(c_i)$ и $x_i^*(c_i)$, заменим задачу (1) – (3) следующей (естественно, при условии, что скачкообразное решение оптимально во всем диапазоне значений c_i) стандартной задачей условной оптимизации:

$$(5)\qquad H(y_1(c_1),\ y_2(c_2), \dots, y_m(c_m)) \Rightarrow \max_C$$

при условии

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{m} c_i \leqslant R.$$

Аналогичная задача может быть решена для одноэлементной системы, функционирующей в течение нескольких периодов при условии, что результаты деятельности АЭ в различные периоды времени независимы.

Итак, полученные результаты позволяют решать следующую задачу: зная зависимости ожидаемых действий элементов от ограничений системы стимулирования (ограниченность ФЗП, нормативы на налоговые и штрафные отчисления), выбрать управляющие параметры, т.е. вектор C, таким образом, чтобы максимизировать полезность центра, зависящую от ожидаемых действий активных элементов.

4. Решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в активной системе с простым активным элементом

В [1] был приведен ряд результатов, описывающих классы систем, в которых система стимулирования из M_x оптимальна. Эти классы достаточно широки, поэтому возникает вопрос о том, не оптимальны ли "скачкообразные" функции стимулирования в любых вероятностных активных системах? Как показывает рассматриваемая ниже модель, это не так.

Рассмотрим задачу синтеза оптимальной системы стимулирования в активной системе с простым активным элементом. Простым АЭ [2] называется АЭ с следующей функцией распределения:

$$F(z,y) = \begin{cases} F(z), & z \leqslant y, \\ 1, & z > y. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть введенные выше предположения о функциях дохода и допустимых множествах остаются в силе ($A = \mathbb{R}_1^+$, $F(0) = 0$, $F(z) < 1$ $\forall z \geqslant 0$). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Функция стимулирования "компенсаторного" типа:

$$\widetilde{\chi}_c(z) = \begin{cases} C, & z \leqslant y_2, \\ \widetilde{h}(z) - \widetilde{h}(\widetilde{y}_3), & z \in [y_2, \widetilde{y}_3], \\ 0, & z \geqslant \widetilde{y}_3 \end{cases} \tag{8}$$

где $\widetilde{y}_3 : \widetilde{h}(\widetilde{y}_3) = \widetilde{h}(\widetilde{y}_2) - C$, $\widetilde{y}_3 \geqslant y_2$, оптимальна в классе M для простого АЭ.

Таким образом, теорема 2 дает решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования для АС с простым АЭ. Представляет интерес, оптимальна ли в системе с простым АЭ функция стимулирования из M_x, т.е. существует ли x: $y^*(x) = y_3$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Утверждение 2. Функция стимулирования из класса M_x не оптимальна в активной системе с простым АЭ.

5. Заключение

В настоящей работе, являющейся продолжением исследования, начатого в [1], обоснованы такие свойства "скачкообразного" решения, как монотонная зависимость максимального реализуемого действия от ограничений механизма стимулирования, связность множества достижимости и другие. Простая структура исследуемого решения позволила свести задачу синтеза оптимальной функции стимулирования в многоэлементной системе со слабо связанными элементами к стандартной задаче условной оптимизации.

Как свидетельствуют приведенные выше результаты, "скачкообразное" решение оптимально не во всех вероятностных активных системах – в системе с простым активным элементом оптимальны штрафы "компенсаторного" типа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Запишем условия оптимальности в следующем виде:

$$F_1(C, x, y) = h(y) - h(y_5) + C\left[\widehat{F}(x - y_5) - \widehat{F}(x - y)\right] = 0, \tag{П.1}$$

$$F_2(C, x, y) = \frac{\partial h(y)}{\partial y} + C\widehat{p}(x - y) = 0. \tag{П.2}$$

Якобиан системы (П.1), (П.2):

$$J = -C\,\widehat{p}(x-y)\left[\frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} - C\widehat{p}'(x-y)\right]. \tag{П.3}$$

Так как выполнено $y_5 \leqslant x \leqslant y$ то $\widehat{p}'(x-y) \geqslant 0$ в силу унимодальности функции $\widehat{p}(\cdot)$, а $\dfrac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} < 0$ в силу строгой вогнутости функции $h(\cdot)$. Значит, второй сомножитель неположителен (и, более того, строго отрицателен). Если $\widehat{p}(x-y) \neq 0$, то $J \not\equiv 0$.

Из известной теоремы анализа о неявных функциях, определяемых системой уравнений, следует, что существуют окрестности точек x^* и y^*, такие, что в них имеем единственное решение: $y = y(C)$, $x = x(C)$. При этом функции, образующие эти решения, будут непрерывно дифференцируемы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

а. Фиксируем $C = \widetilde{C}$. Ему соответствует оптимальное ожидаемое действие АЭ – $\widetilde{y}^*$. Величине $C = C_0 = 0$ соответствует $y_0^* = y_2$. В силу непрерывной дифференцируемости, установленной в предыдущей лемме, по теореме о промежуточных значениях

$$\forall \widehat{y} \in [y_2, \widetilde{y}^*]\, \exists \widehat{C} \in \left[0, \widetilde{C}\right] : \widehat{y} = y^*(\widehat{C}).$$

б. Обозначим S_1 – множество действий, реализуемых системой стимулирования из M_x при $C = C_1$, S_2 – соответствующее множество при $C = C_2$. Предположим, что $C_2 \geqslant C_1$. Для любого действия из S_1 в силу непрерывности $y^*(C)$ выбором $\widehat{C}(C_1 \leqslant \widehat{C} \leqslant C_2)$ можно подобрать систему стимулирования из M_x, реализующую это действие, т.е. $S_1 \subseteq S_2$. Значит, увеличение C не сужает множества реализуемых действий. Следовательно, $y^*(C)$ – неубывающая функция. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. В соответствии с введенными выше и в [1] обозначениями

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = [1 - F(y)]\frac{\partial \widetilde{f}(y)}{\partial y}, \tag{П.4}$$

где $\widetilde{f}(z) = \widetilde{h}(z) - \widetilde{\chi}(z)$, $f(y) = Ef(z)$. В силу (П.4) система стимулирования $\widetilde{\chi}_c(\cdot)$ реализует действие $\widetilde{y}_3$.

Выражая из (П.4) $\widetilde{f}(y)$ через $f(y)$, легко показать, что в системе с простым АЭ точка глобального максимума полезности элемента не может лежать строго левее, чем точка глобального максимума его ожидаемой полезности. А так как при использовании систем стимулирования из класса M точка глобального максимума $\widetilde{f}(z)$ не может лежать правее $\widetilde{y}_3$, значит, система стимулирования $\widetilde{\chi}_c(\cdot)$ реализует максимальное действие и, следовательно, является оптимальной (отметим, что используемая в утверждении 1 величина x_0 определяется через $y_3 : h(y_3) = h_2 - C$, $y_3 \geqslant y_2$ и в общем случае $y_3 \neq \widetilde{y}_3$). Теорема доказана.

Доказательство утверждения 2. Докажем, что никакая система стимулирования из класса M_x не может реализовать действие $\widetilde{y}_3$.

Если существует $\widehat{x} : \chi_1(\widehat{x}, \cdot)$ реализует $\widehat{y}_3$, то в силу (П.4) $\widehat{x} = \widetilde{y}_3$ и достаточно сравнивать значения ожидаемой полезности в точках y_2 и $\widetilde{y}_3$. Предположение $f(\widetilde{y}_3) \geqslant f(y_2)$, по аналогии с доказательством теоремы 2 в работе [1], приводит к противоречию. Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еналеев А. К., Новиков Д. А.* Оптимальные механизмы стимулирования в активной системе с вероятностной неопределенностью. I // АиТ. 1995. № 9 . С.117–126.
2. *Бурков В. Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
3. *Бурков В. Н., Еналеев А. К., Новиков Д. А.* Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // АиТ. 1993. № 11. С. 3–30.

Поступила в редакцию 26.07.94