Задачи и упражнения по курсу "Механизмы планирования"

Модель 1.
Два региона (активные элементы), разделенные рекой, финансируют строительство моста через эту реку. Затраты на строительство этого моста $c = 1$. Используется следующий механизм распределения затрат. Каждый АЭ сообщает оценку s_i своего дохода h_i от использования моста. Мост строится только когда $s_1+s_2 \geq c$.

Задача 1.1

1. Показать, что, если истинные дохода агентов равны 1.4 и 0.6, соответственно, и используется принцип пропорционального распределения затрат $x_i(s) = \dfrac{s_i}{s_1 + s_2}c,$ то сообщение истинных доходов не является равновесием Нэша.
2. Найти все равновесия Нэша.
3. Найти оптимальные стратегии при условии, что агенты знают истинные доходы друг друга и один из них обладает правом первого хода.

Задача 1.2
Предложите и исследуйте (см задача 1.1) механизм распределения затрат, отличный от пропорционального.

Задача 1.3
Существует ли для пропорционального механизма распределения затрат (см. задача 1.1) эквивалентный механизм открытого управления (ОУ).

Задача 2
Приведите пример многоэлементной организационной системы (ОС) с сообщением информации, в которой не существует эквивалентного прямого механизма.

Задача 3
На примере задачи стимулирования в активной системе с одним АЭ в условиях не полной информированности центра:
$j(y) = y - s(y)$ - функция предпочтения центра;
$f(y,r) = s(y) - \dfrac{y^2}{2r}$ - функция предпочтения АЭ, где r – тип АЭ, не известный центру;
покажите возможность построения механизма открытого управления для произвольного механизма планирования не меньшей эффективности.

Задача 4
Целевые функции АЭ имеют вид $f_i(l, x_i, r_i) = j_i(x_i, r_i) - l x_i$, $i = \overline{1,n}$, где $j_i(x_i, r_i)$ - функции эффекта, вогнутые по получаемому количеству ресурса x_i.
Покажите, что при введении цены λ за ресурс и гипотезе слабого влияния механизм ОУ оптимален по критерию суммарного эффекта.

Задача 5
Докажите что, если в многоэлементной АС с квазиоднопиковыми функциями предпочтения назначаемые элементам планы монотонны по сообщениям АЭ и зависят от единственного скалярного параметра, выбираемого центром, то для любого механизма существует неманипулируемый механизм не меньшей эффективности.

Задача 6
Активная система состоит из центра и 5 АЭ. Множество возможных значений типов АЭ (количество ресурса, при котором достигается максимальное значение функции полезности АЭ) - $\Omega = [0, 10]$. Центр обладает ресурсом в количестве R=10.
Определите равновесную по Нэшу ситуацию для механизма прямых приоритетов

$$x_i = \begin{cases} s_i, \sum_i s_i \le R \\ \dfrac{s_i}{\sum_i s_i} R, \sum_i s_i > R \end{cases}$$

при следующих значениях типов АЭ:

1. r = {1,3,5,7,9};
2. r = {1,1,2,8,8};
3. r = {5,6,7,8,9};
4. r = {7,8,9,9,9};

Задача 7

Определите равновесную по Нэшу ситуацию для механизма прямых приоритетов

$$x_i = \begin{cases} s_i, \sum_i s_i \le R \\ \min(s_i, gh_i(s_i)), \sum_i s_i > R \end{cases}$$

где $h_i(s_i) = A_i s_i$, $g : \sum_i \min(s_i, gh_i(s_i)) = R$.

Функции полезности агентов: $j_i(x_i, r_i) = 2\sqrt{r_i x_i} - x_i$, $i = \overline{1,n}$

Задача 8

Исследуйте эффективность следующего механизма распределения ресурсов:

$s_i = \min(s_i, A_i g(s_i))$, где $g(s) : \sum_i x_i = R$, предполагая, что $\sum_i r_i > R$, $A_i > 0$.

Исследуйте неманипулируемость данного механизма.

Задача 9

Докажите, что все анонимные механизмы распределения ресурса эквивалентны.

Анонимные механизмы – назначаемые планы не зависят от перестановок АЭ.

Задача 10

Для заданного механизма распределения ресурса с двумя активными элементами построить на плоскости $r = (r_1, r_2)$ векторов точек пика функций полезности активных элементов множества диктаторства.

$x_1 = \dfrac{3}{2} \dfrac{s_1}{\frac{3}{2} s_1 + s_2}$, $x_1 = \dfrac{s_1}{\frac{3}{2} s_1 + s_2}$, $s_i \in [0,1]$, $i = \overline{1,2}$.

Задача 11

Для механизма активной экспертизы $p(s) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i$ в системе из n = 5 активных экспертов определить равновесную по Нэшу ситуацию, если множество возможных значений заявок экспертов $\Omega = [10,20]$, а истинные мнения экспертов имеют следующие значения:

1. r = {10,10,15,20,20};
2. r = {10,12,13,17,18};
3. r = {15,15,16,19,20};

Задача 12

Докажите, что процедура активной экспертизы $\pi(s)$, оптимальная в смысле близости к среднему арифметическому:

$p^0(s) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i$, заключается в разбиении $[d,D]$ на n равных отрезков.

Функции полезности экспертов - $j_i(x, r_i) = -|x - r_i|$, $i = \overline{1,n}$.

Истинное мнение экспертов - $r_i \in [d, D]$, $i = \overline{1,n}$.

Сообщаемая экспертами оценка - $s_i \in [d, D]$, $i = \overline{1,n}$.

Оптимальность процедуры активной экспертизы $\pi^*(s)$ в смысле близости к процедуре $\pi^0(s)$:
$\max_{r \in [d,D]} |p^*(s^*) - p^0(s)| \to \min$, где s^* - равновесные заявки экспертов.

Задача 13
Построить последовательность W_k и выписать вид эквивалентного прямого механизма для процедуры активной экспертизы n активными элементами, оптимальной в смысле близости (см. задачу 5) к:
$p^0(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$, где $0 \le a_i \le 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, $s_i \in [0,1]$.

Задача 14
Для заданного механизма активной экспертизы с двумя активными элементами построить на плоскости $r = (r_1, r_2)$ векторов точек пика функций полезности активных элементов множества диктаторства

$$x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i^2}\,,\ s_i \in [0,1],\ r_i \in [0,1],\ i = \overline{1,2}.$$

Задача 15
В активной системе с n активными элементами и функциями затрат типа Кобба-Дугласа с параметрами $a = 2$, $R = 1$. Центр выплачивает вознаграждение АЭ пропорционально объемам выполненных работ ly_i. Общий объем работ R_0 фиксирован.

Построить механизм распределения объема работ на основании внутренних цен. Определить цены объемов работ для каждого активного элемента в зависимости от его заявки.
Исследовать манипулируемость механизма внутренних цен в заданной активной системе в случаях а) гипотеза слабого влияния не выполнена и б) гипотеза слабого влияния выполнена.

Задача 16
Для активной системе состоящей из 3 активных элементов, имеющих функции затрат

$$c_i(y_i, r_i) = \frac{y_i^2}{2r_i}\ r_i \in \Omega = [0,1],\ i = \overline{1,3},$$

и центра, которому необходимо, что бы АЭ выполнили объем работ R=1,
1. построить механизм внутренних цен;
2. определить равновесные по Нэшу заявки АЭ
3. оценить эффективность механизма внутренних цен;
4. построить механизм В-типа.

Вектор типов АЭ r = {0.3,0.6,0.8}; Центру известно только множество возможных значений типов АЭ Ω.

Задача 17
Представить задачу распределения ресурсов как задачу обмена, и построить модель соответствующей обменной схемы.

Задача 18
Представить задачу стимулирования как задачу обмена, и построить модель соответствующей обменной схемы.

Задача 19
Построить механизм открытого управления $p(s)=(x_1(s),x_2(s))$ для задачи обмена в ОС с одним агентом в условиях неполной информированности центра:

$f_0(x_1,x_2)=x_2-x_1$ - функция полезности центра,

$f_1(x_1,x_2,r)=x_1-\frac{x_2^{\ 2}}{2r}$ - функция полезности АЭ, где r – тип АЭ.

Задача центра – максимизация ожидаемой полезности от обмена $\mathrm{E}f_0(p(s))\to\max\limits_{p(s)}$.

Множество возможных значений типа агента, известное центру – отрезок $[r_{min},r_{max}]$, $r_{min}>0$, и вероятностное распределение типов агента на данном отрезке $F(r)=\frac{r-r_{\min}}{r_{\max}-r_{\min}}$

Весь ресурс первого типа Y_1 сосредоточен у центра, весь ресурс второго типа Y_2 – у агента, причем $Y_1=\infty$ и $Y_2=\infty$.

Задача 20
Построить механизм открытого управления $p(s)=(x_1(s),x_2(s))$ для задачи обмена в ОС с одним агентом в условиях неполной информированности центра:

$f_0(x_1,x_2)=x_1-\frac{x_2^{\ 2}}{2}$ - функция полезности центра,

$f_1(x_1,x_2,r)=rx_2-x_1$ - функция полезности АЭ, где r – тип АЭ.

Задача центра – максимизация ожидаемой полезности от обмена $\mathrm{E}f_0(p(s))\to\max\limits_{p(s)}$.

Множество возможных значений типа агента, известное центру – отрезок $[r_{min},r_{max}]$, $r_{min}>0$, и вероятностное распределение типов агента на данном отрезке $F(r)=\frac{r-r_{\min}}{r_{\max}-r_{\min}}$

Весь ресурс первого типа Y_1 сосредоточен у центра, весь ресурс второго типа Y_2 – у агента, причем $Y_1=\infty$ и $Y_2=\infty$.

Задача 21
Построить соответствующий прямой механизм планирования для механизма

$g_1(s)=s_1+2s_2$, $g_2(s)=s_1+s_2$, $s_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,2}$, $(r_1,r_2)\in R^2$,

и доказать его неманипулируемость, используя метод множества диктаторства.
Найти равновесные по Нэшу заявки АЭ в зависимости от (r_1,r_2)

Задача 22
Центр предполагает построение механизма планирования объемов работ начальника отдела $i=1$ и подчиненных $i=2,3$ согласно следующему механизму планирования: $s_i\in[0;1]$, $x_i>0$, $g_1(s)=s_1+a(s_2+s_3)$, $g_i(s)=bs_1+s_i$, $a>0$, $b<\frac{1}{4}$. Коэффициенты a и b характеризуют влияние увеличение заявок на объем работ подчиненных на план работ начальника и наоборот.
Определить, при каких условиях для созданного механизма планирования возможно построение эквивалентного прямого механизма.

Задача 23
Механизм планирования в системе с двумя АЭ имеет следующий вид:

$g_1(s)=s_1+\cos(\frac{3p}{2}s_2)$, $g_2(s)=s_1+s_2$, $s_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,2}$.

Показать, что для данного механизма не возможно построить эквивалентный прямой механизм.
Найти множество возможных сообщений АЭ, максимально близкое к начальному, для которого становится возможным построение эквивалентного прямого механизма планирования.

Модель 24

У каждого из двух активных элементов есть два видами деятельности. Продолжительности этих видов деятельности для каждого элемента $i=\overline{1,2}$ x_1^i и x_2^i которые в сумме не должны превышать величину рабочего дня L_i. Основной вид деятельности каждого АЭ является дополнительным для другого.

Функции затрат каждого активного элемента квадратичны по продолжительности видов деятельности. $c_i^1(x_i^1) = a_i(x_i^1)^2$, $c_i\,(x_i^2) = b_i(x_i^2)^2$, где $x_i^1, x_i^2 \in [0, L_i]$ - времена, затрачиваемые АЭ на основную - x_i^1 и дополнительную деятельность - x_i^2, L_i - максимальная продолжительность работ каждого АЭ $i \in I$, $a_i > 0, b_i > 0$. Заработная плата каждого АЭ $i=\overline{1,2}$ составляет постоянную величину C_i.

Задача 24.1

Определить функцию полезности каждого элемента в зависимости от основного вида деятельности.

Задача 24.2

При условии, что активные элементы подбираются центром из условия, что $a_i < b_i$, спроектировать механизм планирования, который бы удовлетворял следующему, не определенному формально правилу: «план на основную деятельность для каждого элемента увеличивается с увеличением его заявки и уменьшается с увеличением заявки на основную деятельность другого АЭ».

Задача 24.3

Для спроектированного механизма планирования выяснить, существует ли эквивалентный прямой механизм. Построить множества диктаторства исходного механизма планирования.